سیستم‌های فازی و کاربردها
سال سوم، شماره دوم (پاییز و زمستان ۱۳۹۹) صص. ۵۹ تا ۷۲

ضریب جینی برای داده‌های فازی

زهرا بهدانی
بخش آمار، دانشگاه صنعتی خاتم الانبیاء بهبهان، بهبهان، ایران

چکیده

وجود هم خطی چندگانه در مدل های رگرسیون چند گانه برآورد ضرایب رگرسیونی را تحت تاثیر قرار میدهد به همین علت تفسیر مناسب و گویایی از مدل رگرسیونی بدست نمی آید. در این مقاله از روش رگرسیون مؤلفه های اصلی فازی برای مواجه با مشکل هم خطی چندگانه در مدلهای رگرسیون فازی با ورودی و خروجی فازی استفاده می‌کنیم. همچنین روشهای مقابله با هم خطی چندگانه را معرفی میکنیم و در نهایت مثالهای عددی ارایه می‌دهیم که تاثیر به کارگیری روشهای مقابله با هم خطی چندگانه را نشان می‌دهد.

۱ مقدمه

مسائلی هم‌چون گرسنگی، بیکاری و فقر از دغدغه‌های جوامع بشری در همه ادوار بوده است. همراه با رنسانس و صنعتی شدن کشورها انتظار می‌رفت که این معضل رفع گردد، اما به دنبال انقلاب صنعتی و مهاجرت از روستاها به مناطق شهری، فقر و نابرابری نه تنها کاهش نیافت بلکه به طور بی‌سابقه‌ای افزایش یافت و موجب بسیاری از مشکلات سیاسی و اجتماعی شد. توزیع عادلانه درآمد یکی از وظایف مهم دولت‌ها به حساب می‌آید. از این‌رو بحث و قضاوت درباره

Mathematics Subject Classification (2010): 03E72 ; 62P20, **Email:** behdani@bkatu.ac.ir.
عبارات و کلمات کلیدی:مجموعه های فازی، اصل توسیع، شاخص های نابرابری اقتصادی، ضریب جینی

چگونگی توزیع درآمد در کنار گسترش مدل‌های رشد اقتصادی، اهمیت دارد. با توجه به اهمیت این موضوع، بسیاری از محققان و سیاستمداران درصدد یافتن معیاری هستند که به خوبی نابرابری درآمد در طبقات مختلف جامعه را منعکس کند. در اقتصاد برای اندازه‌گیری میزان پراکندگی یا نابرابری درآمد از شاخص‌های مختلفی استفاده می‌شود، که معروفترین و پرکاربردترین آن ضریب جینی می‌باشد. اگر چه شاخص جینی در اقتصاد عامیت بیشتری دارد اما در هر زمینه‌ای از مطالعات علمی می‌تواند به کار برده شود. به عنوان مثال، در زیست‌شناسی شاخص جینی به عنوان یک اندازه‌گیری از تنوع زیستی مورد استفاده قرار می‌گیرد. شاخص جینی در سلامت نیز استفاده می‌شود، آن را به عنوان معیار سنجش نابرابری از سلامتی مربوط به کیفیت زندگی در جمعیت استفاده می‌کنند. در آموزش و پرورش، شیمی و فیزیک (مانند بررسی جینتروپی: کلیت‌بخشی به آنتروپی برپایه شاخص جینی)، ریاضیات و حتی کامپیوتر و داده‌کاوی نیز بهره گرفته می‌شود. برای مثال یکی کاربردهای شاخص جینی، در مباحث درخت تصمیم‌گیری است. به دلیل نقش مهم و تفسیر ساده و روشن ضریب جینی، این شاخص همواره مورد توجه پژوهشگران بوده است. آناند [۴]، چاکراواتی [۶]، کلیبر و کاتز [۱۳]، زو [۱۶]، لانگل و تیل [۱۴] و یتزاکی و سچچمن [۱۹] مطالعات گسترده‌ای در خصوص شاخص نابرابری جینی داشته‌اند. با وجود اهمیت فراوان ضریب جینی، در بسیاری از مسایل واقعی، به دلیل سیاست‌های مالیاتی یا آموزشی افراد، آن‌ها از بیان درآمد واقعی خودداری می‌کنند. بنابراین امکان اندازه گیری دقیق مشاهدات و داده‌های تحت بررسی وجود ندارد. در این شرایط داده‌ها به صورت نادقیق گردآوری و ثبت شده و از این رو استفاده از روش‌های دقیق برای تجزیه و تحلیل این‌گونه مسائل دقت لازم را نخواهد داشت و محاسبه ضریب جینی با مشکل مواجه خواهد بود. بنابراین در چنین شرایطی می بایست روش های جایگزین به منظور برآورد ضریب جینی مجموعه داده‌ها در شرایطی که داده‌های گردآوری شده، نادقیق هستند ارائه دهیم.

در این مقاله با استفاده از نظریه مجموعه‌های فازی به بررسی و روش محاسبه ضریب جینی برای مجموعه داده‌های نادقیق خواهیم پرداخت. در ادامه، در بخش ۲ ضریب جینی به عنوان مهم‌ترین شاخص نابرابری اقتصادی تعریف شده است. ارائه مختصری از مفاهیم فازی در بخش ۳ مطرح شده‌اند. بخش ۴ شامل روش‌های محاسبه ضریب جینی برای داده‌های فازی می‌باشد. برای

محاسبه ضریب جینی نیاز به رتبه بندی اعداد فازی است که در بخش ۵ به اختصار برخی از روش‌های رتبه بندی معرفی شده است. در پایان با یک مثال عددی روش‌های ارائه شده مقایسه خواهند شد.

۲ ضریب جینی، شاخص نابرابری اقتصادی

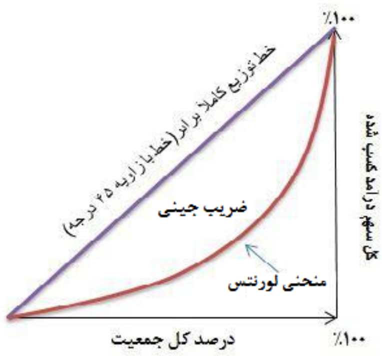
وجود نابرابری‌های گسترده در توزیع درآمد، به بروز فقر و افزایش داخلی آن و ایجاد شکاف بیشتر در طبقات جامعه منجر می‌شود. موضوع نابرابری در توزیع در آمدها و عدالت اجتماعی دغدغه خاطر سیاستگذاران هر کشوری است. برای سنجش نابرابری توزیع درآمد، معیارهای مختلفی وجود دارد که سه شاخص عمده آن عبارتند از: شاخص آتکینسون، ضریب جینی و شاخص تیل. ضریب جینی اولین بار در سال۱۹۱۲ توسط کورادو جینی [۱۱] معرفی شد. در بیشتر نشریات و منابع، ضریب جینی برابر با میانگین انحراف از خط قطر است. در حقیقت، ضریب جینی از تقسیم مساحت بین منحنی لورنتس و خط قطر، بر مساحت ناحیه بین خط قطر و محورهای مختصات حاصل می‌شود. از آنجا که مساحت این ناحیه برابر ۰٫۵ است لذا به صورت دو برابر ناحیه بین منحنی لورنتس و خط قطر و به صورت (۱) تعریف می‌شود.
برای یک جامعه با مقادیر $y_i,\ i = ۱, ۲, ..., n$ که به ترتیب غیر نزولی مرتب شده اند($y_i \leq y_{i+۱}$) عبارت زیر معرف ضریب جینی است:

$$G = \frac{۱}{n}\left(n + ۱ - ۲\frac{\sum_{i=۱}^{n}(n+۱-i)y_i}{\sum_{i=۱}^{n} y_i}\right) \qquad (۱)$$

ضریب جینی کمیتی است که مقداری بین صفر و یك داشته، مستقل از میانگین بوده و متقارن می باشد (به این معنا که اگر افراد درآمدهایشان را دو به دو معاوضه کنند، تغییری در ضریب جینی حاصل نمی‌شود). ضریب جینی صفر برابری کامل را نشان می‌دهد (به طور مثال جایی که همه درآمد یکسان دارند) و ضریب جینی یک، نشان دهنده حداکثر نابرابری است (تنها یک نفر صاحب تمام درآمد است). هر چه عدد ضریب جینی محاسبه شده برای یک کشور کوچکتر باشد، کشور مورد نظر از لحاظ توزیع درآمد و ثروت در شرایط بهتری قرار دارد. در مقابل زیاد بودن

ضریب جینی نشان می‌دهد که درصد کوچکی از جمعیت، سهم زیادی از درآمد و امکانات جامعه را مصرف می‌کنند.

شکل ۱ منحنی لورنتس و ضریب جینی را نشان می‌دهد. ضریب جینی را به راحتی می‌توان برای کشورها مقایسه کرد و تفسیر آن نیز آسان است. از ضریب جینی می‌توان برای نشان دادن چگونگی توزیع درآمد در داخل کشور در طی یک دوره از زمان استفاده کرد. در نتیجه این امکان وجود دارد تا ببینید که آیا نابرابری در حال افزایش است یا کاهش؟



شکل ۱: الگویی از منحنی لورنتس و ضریب جینی

۳ مفاهیم فازی

در این بخش مرور مختصری بر مفاهیم فازی ارائه خواهد شد. ایده‌ی مجموعه‌های فازی توسط پروفسور لطفی عسگرزاده [۲۰]، دانشمند ایرانی تبار، در سال ۱۹۶۵ با انتشار مقاله مجموعه‌های فازی به عرصه‌ی دانش معرفی شد و تا دهه ۱۹۷۰ مبانی نظریه مجموعه‌های فازی و نیز منطق فازی شکل گرفت. از دهه ۱۹۸۰ تولید محصولات کاربردی مبتنی بر منطق فازی آغاز شد و از دهه ۱۹۹۰ این محصولات به طور گسترده وارد بازارهای تجاری شدند ([۲]) .

مجموعه معمولی، با یک ویژگی دقیق و معین مشخص می‌شود و هر مولفه دارای عضویت یا عدم عضویت قطعی در یک مجموعه است. در نظریه مجموعه‌های فازی برای عضویت یک مولفه در

مجموعه از تابع عضویت استفاده می‌شود که به هر عضو مجموعه فازی عددی حقیقی در فاصله $[\circ, ۱]$ اختصاص می‌دهد.

اعداد فازی، یک تعمیم طبیعی اعداد معمولی هستند. در واقع این اعداد، مجموعه‌های فازی خاص از مجموعه اعداد حقیقی می‌باشند [۲۰]. از مهم‌ترین اعداد فازی می توان اعداد فازی LR ، اعداد فازی مثلثی، اعداد فازی ذوزنقه‌ای را نام برد. برای تعمیم عملگرهای حسابی معمولی به عملگرهای حسابی فازی، نیاز به بیان و تشریح یک اصل اساسی است که به اصل توسیع موسوم است. در ادامه این اصل ارائه می‌شود.

تعریف ۱.۳ (اصل توسیع). فرض کنید $X_۱, ..., X_n$، n مجموعه مرجع و $X = X_۱ \times ... \times X_n$ حاصل ضرب دکارتی آن‌ها باشد. هم‌چنین $A_۱, ..., A_n$، n مجموعه فازی به ترتیب از $X_۱, ..., X_n$ باشند. به‌علاوه $y = f(x_۱, ..., x_n)$ یک نگاشت از X به Y باشد. حاصل عمل f بر n مجموعه فازی $A_۱, ..., A_n$ به صورت مجموعه فازی B از Y با تابع عضویت زیر تعریف می‌شود:

$$B(y) = f(A_۱, ..., A_n)(y) = \begin{cases} \sup\limits_{x_۱,...,x_n} \min\{A_۱(x_۱), ..., A_n(x_n)\} & ; f^{-۱}(y) \neq \emptyset, \\ \circ & ; f^{-۱}(y) = \emptyset, \end{cases} \quad (۲)$$

هر مجموعه فازی را می‌توان به طور منحصربه فردی با یک خانواده از مجموعه‌های قطعی معرفی کرد. این مجموعه‌های قطعی، از مجموعه فازی αبرش نامیده می‌شود و نقش بسیار مهمی در نظریه مجموعه‌های فازی ایفا می‌کند.

۱.۳ رویکرد α-برش

همانطور که می‌دانید، α-برش‌های هر عدد فازی به ازای هر $\alpha \in [\circ, ۱]$، بازه‌های بسته از اعداد حقیقی هستند. این ویژگی سبب می‌شود که عملیات حسابی روی اعداد فازی بر حسب عملیات حسابی روی α-برش‌های آن‌ها قابل تعریف گردد. به همین جهت در ادامه عملیات حسابی روی بازه‌های بسته مرور می‌گردد.

فرض کنید عمل $*$ هر یک از چهار عمل اصلی جمع، تفریق، ضرب و تقسیم روی بازه‌های بسته باشد، آن‌گاه:

$$[a,b] * [c,d] = f * g | a \leq f \leq b, c \leq g \leq d. \qquad (۳)$$

ویژگی کلی تمام عملیات حسابی روی بازه‌های بسته است، به جز اینکه عمل تقسیم وقتی $[c.d] \in ۰$ تعریف شده نخواهد بود. این بدان معنی است که حاصل هر عمل حسابی روی بازه‌های بسته مجدداً یک بازه‌ی بسته است.

تعریف ۲.۳. چهار عمل حسابی روی بازه‌های بسته به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$[a,b] + [c,d] = [a+c, b+d]$$
$$[a,b] - [c,d] = [a-c, b-d]$$
$$[a,b].[c,d] = [\min(ac, ad, bc, bd), \max(ac, ad, bc, bd)]$$
$$[a,b]/[c,d] = [a,b].[\frac{۱}{d}, \frac{۱}{c}] = [\min(a/c, a/d, b/c, b/d), \max(a/c, a/d, b/c, b/d)]$$

اگر k یک عدد حقیقی باشد، آن‌گاه ضرب اسکالر k در بازه‌ی بسته‌ی $A = [a_۱, a_۲]$ به صورت زیر تعریف می‌گردد.

$$kA = k[a_۱, a_۲] = \begin{cases} [ka_۱, ka_۲] & k \geq ۰ \\ [ka_۲, ka_۱] & k < ۰ \end{cases} \qquad (۴)$$

تعریف ۳.۳. فرض کنید $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ دو عدد فازی و $[\tilde{A}]_\alpha = [a^L_\alpha, a^U_\alpha]$ و $[\tilde{B}]_\alpha = [b^L_\alpha, b^U_\alpha]$ به ترتیب α -برش‌های آن‌ها باشند. فرض کنید عمل $*$ هر یک از چهار عمل اصلی جمع $+$، تفریق $-$، ضرب $.$و تقسیم $/$ روی اعداد فازی باشد، آن‌گاه عمل $*$ روی دو عدد فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$،

نشان داده شده با $\tilde{A} * \tilde{B}$ ، یک عدد فازی به‌دست می‌دهد که در آن:

$$\tilde{A} * \tilde{B} = \cup_{\alpha \in [۰,۱]} \alpha [\tilde{A} * \tilde{B}]_\alpha$$
$$[\tilde{A} * \tilde{B}]_\alpha = [\tilde{A}]_\alpha * [\tilde{B}]_\alpha$$

ذکر این نکته ضروری است که $\tilde{A} * \tilde{B}$ یک عدد فازی است زیرا $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$، اعداد فازی‌اند و به ازای هر $\alpha \in [۰, ۱]$، $[\tilde{A}]_\alpha$، $[\tilde{B}]_\alpha$ و $[\tilde{A} * \tilde{B}]_\alpha$ همگی بازه‌های بسته می‌باشند. علاوه براین به ازای هر $\alpha \in [۰, ۱]$ می‌توان $[\tilde{A} * \tilde{B}]_\alpha$ را براساس عملیات حسابی روی بازه‌ی بسته، $[\tilde{A}]_\alpha$ و $[\tilde{B}]_\alpha$ نسبت به عمل $*$ به دست آورد. مانند

$$[\tilde{A} + \tilde{B}]_\alpha = [\tilde{A}]_\alpha + [\tilde{B}]_\alpha = [a_\alpha^L + b_\alpha^L, a_\alpha^U + b_\alpha^U] \qquad (۵)$$

$$[\tilde{A} - \tilde{B}]_\alpha = [\tilde{A}]_\alpha - [\tilde{B}]_\alpha = [a_\alpha^L - b_\alpha^U, a_\alpha^U - b_\alpha^L] \qquad (۶)$$

همچنین برای تعریف ضرب اسکالر k در عدد فازی $\tilde{A}$ می‌توان $[k\tilde{A}]_\alpha$ را با رابطه زیر محاسبه نمود:

$$[k\tilde{A}]_\alpha = k[\tilde{A}]_\alpha = k[a_\alpha^L, a_\alpha^U] = \begin{cases} [ka_\alpha^L, ka_\alpha^U] & k \geq ۰ \\ [ka_\alpha^U, ka_\alpha^L] & k < ۰ \end{cases} \qquad (۷)$$

۴ ضریب جینی داده‌های فازی

فرض کنید $\tilde{x}_۱, \ldots, \tilde{x}_n$ داده‌های نادقیق درآمد هستند، که $\tilde{x}_i$ داده فازی مربوط به فرد iام است. اگر این داده‌ها به ترتیب غیر نزولی مرتب شوند و داده‌های مرتب شده به صورت $\tilde{y}_۱, \ldots, \tilde{y}_n$

باشند ($\tilde{y}_i \leq \tilde{y}_{i+1}$) براساس این داده‌ها ضریب جینی فازی برابر است با ($\tilde{y}_i \leq \tilde{y}_{i+1}$):

$$\tilde{G} = \frac{1}{n}\left(n + 1 - 2\frac{\sum_{i=1}^{n}(n+1-i)\mu_i\tilde{y}_i}{\sum_{i=1}^{n}\mu_i\tilde{y}_i}\right) \qquad (8)$$

اگر داده‌های درآمد را به صورت اعداد فازی در نظر بگیریم، محاسبه ضریب جینی در دو حالت قطعی و فازی، قابل انجام است. در حالت اول، که ضریب جینی به صورت یک عدد قطعی ارائه می‌شود بخش قابل توجهی از اطلاعات داده‌ها از بین رفته و در برخی موارد مشاهده شده است که نتایج حاصل در شرایط و محدودیت‌های مسئله صدق نمی‌کند. در حالتی که ضریب جینی به صورت فازی محاسبه شود، زمانی که داده‌ها فازی باشد محاسبات دارای پیچیدگی بیشتر ولی در عوض نتایج منطقی‌تر و دقیق‌تر خواهد بود. برای استفاده از روش اول لازم است که عدد فازی از حالت فازی به مقداری قطعی برگردانده شود، که به نافازی‌سازی معروف است. روش‌های متنوع و زیادی برای نافازی‌سازی (فازی زدایی یا وافاسازی[1]) وجود دارند که از میان آن‌ها روش‌های مرکز ثقل[2]، ارتفاع و مینکوفسکی رواج بیشتری یافته است. در روش مرکز ثقل، مقدار قطعی نهایی در واقع مرکز سطح زیر منحنی عدد فازی است. برای اعداد فازی مثلثی روش‌های فازی زدایی مختلف را از طریق رابطه‌های زیر به‌دست می‌آوریم.

فازی زدایی مینکوفسکی

$$x = m + \frac{U - L}{4}$$

و فازی زدایی مرکز ثقل

$$x = \frac{M + U + L}{3}$$

برای استفاده از αبرش‌ها، لازم است ابتدا هر مجموعه فازی را بر حسب α برش‌های آن که بازه‌های حقیقی می‌باشند بیان کرد و سپس با استفاده از اعمال جبری روی بازه‌ها ضریب جینی را محاسبه نمود. اما برای محاسبه ضریب جینی با استفاده از داده‌های فازی و با توجه به رابطه (۸) واضح است لازم است ابتدا داده‌های فازی رتبه‌بندی شوند.

[1] defuzzy fication
[2] center of gravity

۵ رتبه بندی اعداد فازی

در برخی موارد لازم است مقایسه اعداد فازی انجام شود. این مبحث تحت عنوان رتبه بندی اعداد فازی خوانده می‌شود. رتبه بندی اعداد فازی برای اولین بار در سال ۱۹۷۶ توسط جین[۳] [۱۲]پیشنهاد شد. ممکن است اعداد فازی را نتوان به سادگی بر طبق خواص‌شان مرتب کرد ز یرا این اعداد بیانگر مقادیر نامطمئن و مبهم هستند. تاکنون روش‌های زیادی برای ارزیابی اعداد فازی مورد بحث و بررسی قرار گرفته است. این روش‌ها کاستی‌هایی دارند که در مرتب‌سازی برخی اعداد فازی ناتوان هستند، مثلاً برخی روش‌ها به محاسبات پیچیده‌ای نیازمندند[۱۵]. در برخی دیگر، نتایج حاصل از رتبه‌بندی با مشاهدات بشری تطابق ندارد [۹] و برخی قابلیت تبعیض اعداد فازی را ندارند و فقط می‌توانند برای رتبه‌بندی برخی از انواع اعداد فازی (به عنوان مثال اعداد فازی نرمال، غیر نرمال، مثبت واعداد فازی منفی) به کار روند [۱۰]. تعدادی از روش‌ها، تنها می‌توانند به طور مستقیم با توجه به نمودارشان رتبه‌بندی شوند؛ بنابراین استفاده از روشی صحیح در شرایط مناسب حائز اهمیت است. به عبارتی می‌توان گفت: تقریباً هر کدام از روش‌ها، در بعضی ویژگی‌ها ناکارآمد هستند یا به سوی عملگرهای اشتباه یعنی ناسازگاری با مشاهدات بشر، عدم تبعیض و پیچیدگی سوق می‌یابند. لذا چنین نتیجه گرفته میشود که روشی دقیق برای مقایسه اعداد فازی وجود ندارد و روش‌های مختلف، ممکن است با معیارهای گوناگونی برقرار باشند ([۱]). رویکردهای کلی رتبه‌بندی اعداد فازی را می‌توان به صورت زیر دسته‌بندی نمود:

- تبدیل داده‌های فازی به اعداد قطعی (فازی زدایی): تعدادی از روش‌های این دسته براساس درجه بهینه، فاصله همینگ، تابع مقایسه، میانگین فازی و پراکندگی و ... می‌باشند.

- معرفی یک نقطه مرجع و مقایسه اعداد فازی با این نقطه مرجع: در این دسته، از معرفی یک عدد ایده آل، رتبه چپ و راست، اندازه‌گیری منطقه و روش‌های رتبه‌بندی زبان‌شناسی استفاده شده است.

- بیان بزرگ‌تر بودن اعداد با استفاده از تابع عضویت: این روش‌ها بر مبنای روش‌های ارزیابی اهمیت نسبی ویژگی‌های چندگانه ساخته شده‌اند.

[3] Jain

روش‌های زیادی برپایه این سه رویکرد معرفی شده است که به معرفی تعداد اندکی از آن‌ها می‌پردازیم.

۱.۵ روش مقایسه یاگر

یاگر[۴] [۱۷، ۱۸]، روش شاخص ثقل برای رتبه‌بندی اعداد فازی پیشنهاد نمود. در این روش یاگر مرکز ثقل روی محور x هر عدد فازی $\tilde{A}$ از مجموعه مرجع X را برای رتبه‌بندی به کار برد که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$x(\tilde{A}) = \frac{\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} w(x)\mu_{\tilde{A}}(x)dx}{\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \mu_{\tilde{A}}(x)dx}. \qquad (۹)$$

که در آن $\mu_{\tilde{A}}(x)$ تابع عضویت $\tilde{A}$، $\mu_{\tilde{A}} : X \longrightarrow [۰,۱]$، $S = supp\tilde{A}$، $x_{\min} = \inf S$، $x_{\max} = \sup S$ و $W(x)$ یک تابع انتگرال‌پذیر و فاکتور وزنی برای نشان‌دادن درجه اهمیت x می‌باشد و می‌توان آن را برابر با x قرار داد. هر عددی که مرکز ثقل بزرگتری داشته باشد، رتبه بهتری دارد.

۲.۵ روش مقایسه چانگ

چانگ[۵] [۷] برای مقایسه اعداد فازی تابع مقایسه‌ای به صورت زیر را معرفی کرد:

$$C(\tilde{A}) = \int_{S_i} x\mu_{\tilde{A}}(x)dx, \quad S_i = supp\tilde{A}(), \qquad (۱۰)$$

این رابطه برای اعداد فازی مثلثی $\tilde{A} = (m, a, b)$ و $h = hgt(\tilde{A})$ (ارتفاع) که لزوماً نرمال نیستند به صورت زیر ساده می‌شود:

$$C(\tilde{A}) = \frac{(m-a)(a+m+b)}{۶} \cdot h$$

[4] Yager
[5] Chang

و برای عدد ذوزنقه‌ای $\tilde{A} = (a, b, c, d)$ با $h = hgt(\tilde{A})$ داریم:

$$C(\tilde{A}) = \frac{h}{6} \cdot [c^2 - b^2 - a(b+a) + d(c+d)] = \frac{h}{6}(c^2 + d^2 - a^2 - b^2 - ab + cd)$$

۳.۵ روش مقایسه آدامو

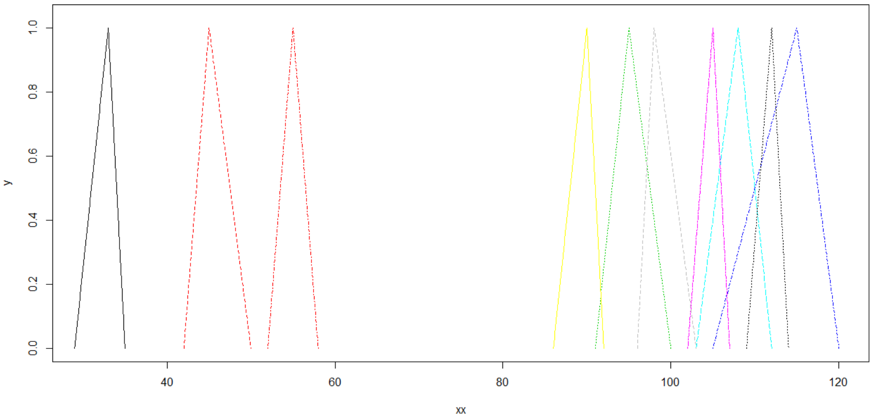
یکی دیگر از روش‌هایی که می‌توان برای رتبه بندی اعداد فازی استفاده کرد. براساس α برش‌ها می‌باشد که به دلیل امکان تصمیم گیری در سطوح محتلف α از کاربرد بیشتری نسبت به سایر روش‌ها برخوردار است. برخی از روش‌های رتبه بندی با مقاطع مختلف α از پیچیدگی و محاسبات بالایی برخوردارند. اما روش آدامو[6] [۳] دارای محاسباتی بسیار ساده می‌باشد. در این روش، ابتدا α مشخصی را در نظر گرفته و اعداد فازی را در آن α برش خاص به صورت $A_\alpha[a, b]$ مشخص می‌کنیم. سپس برای هر یک، مقدار ماکزیمم را در نظر گرفته و در نهایت مجموعه‌ای که در بین آنها دارای ماکزیمم مقدار باشد عدد فازی مربوط به آن دارای بالاترین رتبه خواهد بود. در ادامه با بیان یک مثال ساده، با هر یک از روش‌های ارائه شده در متن به محاسبه ضریب جینی می‌پردازیم.

مثال ۱.۵. میزان درآمد ده فرد که به صورت نادقیق جمع آوری شده،به صورت اعداد فازی مثلثی و برحسب میلیون ریال در جدول ۱ درج شده است. نمایی از این داده‌ها را می‌توان در شکل ۲ مشاهده کرد. برای این داده‌های مبهم، ضریب جینی و میزان نابرابری درآمد با روش‌های ارائه شده در متن محاسبه شده است که نتایج در جدول ۲ قابل مشاهده است. با استفاده از αبرش‌ها مقدار ضریب جینی برابر با $(۰/۰۰۲, ۰/۰۰۱, ۰/۱۷۷)$ است. همان‌طور که در جدول ۲ مشاهده می‌شود برای این داده‌های خاص هر سه روش چانگ، یاگر و آدامو جواب یکسانی را نتیجه داده است. که به این دلیل است که در هر سه روش رتبه‌بندی این داده‌های فازی یکسان بوده است. از طرفی در بین روش‌های نافازی‌سازی ارائه شده روش مینکوفسکی کمترین مقدار ضریب جینی را

[6] Adamo

جدول ۱: اطلاعات درآمدی (ماهانه بر حسب میلیون ریال) ده نفردر مثال ۱.۵

i	۱	۲	۳	۴	۵
درآمد	(۳۳, ۲, ۴)	(۴۵, ۵, ۳)	(۹۵, ۵, ۴)	(۱۱۵, ۵, ۱۰)	(۱۰۸, ۴, ۵)
i	۶	۷	۸	۹	۱۰
درآمد	(۱۰۵, ۲, ۳)	(۹۰, ۲, ۴)	(۹۸, ۵, ۲)	(۱۱۲, ۲, ۳)	(۵۵, ۳, ۳)



شکل ۲: نمودار تابع عضویت اعداد فازی درآمد ده نفر در مثال۱.۵

ارائه داده است ولی نمی‌توان این را علت بهتر بودن این روش نسبت به روش دیگر دانست.

مراجع

[۱] سرگلزائی، شکوه، حسین زاده سلجوقی، فرانک، آقایاری، هادی. (۱۳۹۷) ارائه روشی نوین برای رتبه بندی اعداد فازی با استفاده از مرکز محیطی دایره و کاربرد آن در ارزیابی عملکرد مدیریت زنجیره تأمین. تصمیم گیری و تحقیق در عملیات. دوره ۳، شماره (۳):صص۲۳۶-۴۸.

[۲] طاهری، محمود، ماشین چی، ماشالله. مقدمه‌ای بر احتمال و آمار فازی. (۱۳۹۲). انتشارات دانشگاه شهید باهنر کرمان.

جدول ۲: ضریب جینی برای داده‌های مثال ۱.۵ با روش‌های ارائه شده در متن

روش	ارتفاع	مرکز ثقل	مینکوفسکی
ضریب جینی	۰/۱۷۷	۰/۱۷۶	۰/۱۷۱
روش	روش چانگ	روش یاگر	روش آدامو
ضریب جینی	(۰/۱۷۷, ۰/۲۳, ۰/۲۱)	(۰/۱۷۷, ۰/۲۳, ۰/۲۱)	(۰/۱۷۷, ۰/۲۳, ۰/۲۱)

[3] Adamo.M. (1980). Fuzzy decision trees, Fuzzy Sets and Systems, 4, 207–219.

[4] Anand, S. (1983). Inequality and Poverty in Malaysia: Measurement and Decomposition. New York: Oxford University Press.

[5] Campos. L and Munoz. A. (1989). A subjective approach for ranking fuzzy numbers, Fuzzy Sets and Systems. 29. 145-153.

[6] Chakravarty, S. R. (1990). Ethical Social Index Numbers, Berlin: Springer-Verlag.

[7] Chang, W. Ranking of fuzzy utilities with triangular membership functions.(1999). Fuzzy Sets and Systems, 105.365-375.

[8] Chen, C. H. (1998). A new approach for ranking fuzzy numbers by distance method, fuzzy sets and system, 959,(3). 307-317.

[9] Chu, T. C., and Tsao, C. T. (2002). Ranking fuzzy numbers with an area between the centroid point and original point. Computers & mathematics with applications, 43(1-2), 111-117.

[10] de Campos Ibáñez, L. M., and Muñoz, A. G. (1989). A subjective approach for ranking fuzzy numbers. Fuzzy sets and systems, 29(2), 145-153

[11] Gini, C. (1912), Variability and mutability, contribution to the study of statistical distribution and relaitons, Studi Economico-Giuricici della R.

[12] Jain, R. Decision making in the presence of fuzzy variables. (1976). IEEE TRANSACTIONS ON SYSTEMS, MAN AND CYBERNETICS. 6(10). 698-703.

[13] Kleiber, C. and Kotz, S. (2003). Statistical Size Distributions in Economics and Actuarial Ssciences, John Wiley & Sons.

[14] Langel, M. and Tille, Y. (2013). Variance estimation of the Gini index : revisiting a result several time published. Journal of the Royal Statistical Society -Series A, 176, 521-540.

[15] Wang, Z. X., Liu, Y. J., Fan, Z. P., and Feng, B. (2009). Ranking L–R fuzzy number based on deviation degree. Information sciences, 179(13), 2070-2077.

[16] Xu, K. (2004). How has the literature on Gini index evolved in the past 80 years?. Working Paper. Department of Economics, Dalhousie University, Halifax.

[17] Yager.R.R.(1978). Ranking fuzzy subsets over the unit interval, IEEE Conference on Decision and Control including the 17th Symposium on Adaptive Processes,Iona College, New Rochelle, New York, 1435–1437.

[18] Yager.R.R. (1980). On choosing between fuzzy subsets, Kybernetes. 9, (2).151–154.

[19] Yitzhaki S. and Schechtman, E. (2013). The Gini Methodology: A primer on a statistical methodology. Springer Science, Business Media.

[20] Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy Sets, Inform. Control, 8: 338-353.