سیستم‌های فازی و کاربردها
شاپای چاپی: ۲۷۱۷-۴۴۰۹
سال چهارم، شماره اول (بهار و تابستان ۱۴۰۰)
شاپای الکترونیکی: ۲۷۱۷-۳۹۸۴
صص. ۲۴۷ تا ۲۶۷
DOI: 10.22034/JFSA.2021.138934

رهیافت تصمیم‌گیری‌های چند معیاره در ارزیابی نیکویی برازش مدل‌های آماری

جلال چاچی*، **احمد کاظمی‌فرد** و **حامد فهیمی**

گروه آمار، دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه شهید چمران اهواز، اهواز، ایران
گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه شهید چمران اهواز، اهواز، ایران
گروه علوم کامپیوتر، دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه شهید چمران اهواز، اهواز، ایران

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۴/۲۶ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۸/۲۱

چکیده

امروزه مدل‌های متنوعی با روش‌های برآوردیابی مختلف در مدل‌سازی داده‌ها، معرفی و به‌کار برده می‌شوند. تناسب هر یک از روش‌های برآوردیابیِ مدل‌های آماری در برازشِ مجموعه‌ای از داده‌ها مبتنی بر یک معیار نیکویی برازشِ خاص (یا تابع هدفی خاص) است. همچنین، شاخص نیکویی برازش هر مدل آماری (از جمله مدل‌های رگرسیونی کلاسیک و فازی) متناسب با منطقِ طراحی آن مدل تعریف، فرمول‌بندی و یا از معیارهای موجود انتخاب شده‌اند. لذا استفاده و به‌کارگیریِ صرفا یک معیار جهت مقایسهٔ نیکویی برازش مجموعهٔ متنوعی از مدل‌های آماری باعث تصمیم‌گیری‌های اریب و جهت‌دار می‌شود. در واقع چنین فرآیندی منجر به اولویت بخشی به مدل یا مدل‌هایی می‌شود که یا توابع هدفی یکسان با معیار ارزیابی دارند و یا توابع هدف آنها از لحاظ ساختاری متناسب با همان معیار ارزیابی است. لذا رویکرد تک معیاره برای ارزیابی نیکویی برازش مدل‌ها، امکان مقایسهٔ مطلوب و منصفانهٔ آنها که بسیار چالش برانگیز است را سلب می‌کند. هدف اصلی ما در این مقاله، ارایه و پیشنهاد چارچوبی مناسب در قالب رهیافت تصمیم‌گیری‌های چند معیاره به‌منظور حل و فصل این چالش است. در این رهیافت به روش‌های متنوعی امکان انبوهش(ادامه دارد)

عبارات و کلمات کلیدی: مدل‌های آماری، تصمیم‌گیری‌های چند معیاره، انبوهش، مدل‌های رگرسیون فازی، نیکویی برازش

Email(s): jalal.chachi@scu.ac.ir, a.kazemifard@scu.ac.ir, h.fahimi@scu.ac.ir .

Mathematics Subject Classification (2010): 60A86

مجموعه‌ای گسترده از معیارهای ارزیابی به‌منظور تولید یک معیار ارزیابی تعمیم‌یافته جهت تشخیص مدل بهینه فراهم می‌شود. در انتها رویکرد پیشنهادی به‌منظور رتبه‌بندی ارزیابی نیکویی برازش ۲۲ مدل رگرسیون فازی مختلف به‌کار برده می‌شود.

۱ مقدمه

تحلیل مدل‌های آماری به‌ویژه مدل‌های رگرسیونی جایگاه بسیار مهمی در مطالعات داده محور دارد. از طرفی تعمیم تحلیل‌های رگرسیونی کلاسیک به داده‌هایی که ماهیتاً دارای ابهام هستند به همراه ضعف دقت ابزارهای اندازه‌گیری، منجر به ابداع مدل‌های متنوع و مختلفی در رگرسیون فازی شده است. این نوع از مدل‌های رگرسیون، که به‌طور عمده دارای دسته‌بندی‌هایی مانند رویکردهای امکانی و رویکردهای کمترین توان دوم خطا در تحلیل داده‌های فازی یا داده‌هایی با مقادیر بازه‌ای هستند، بدواً توسط تاناکا و همکاران [۳۵، ۳۴] ابداع شدند. پس از آن تحقیقات گسترده در این زمینه منجر به دست آوردهای متنوعی در زمینه مدل‌های رگرسیونی شده است [۳، ۱۸، ۱۹، ۲۰، ۲۱]. به اهم مطالعات پیرامون مدل‌سازی‌های رگرسیونی فازی در مقاله مروری چوخوروا و جوهانسون [۱۴] اشاره شده است. می‌دانیم که تا کنون هر مدل رگرسیونی فازی مشابه با مدل‌های رگرسیونی کلاسیک، در برازشِ بر مجموعه‌ای از داده‌ها مبتنی بر یک معیار نیکویی برازش خاص ارزیابی شده است. برای این منظور معیارهای متعدد و پراکنده‌ای به فراخور این رگرسیون‌ها به‌کار برده شده‌اند. در واقع، معیار نیکویی برازش در هر مدل رگرسیونی متناسب با منطقِ طراحی آن مدل تعریف، فرمولبندی و یا استفاده می‌شود [۷، ۱۱]. لذا استفاده و به‌کارگیری انفرادی هر معیار خاص در جهت مقایسه نیکویی برازش مجموعه‌ای از مدل‌های رگرسیون فازی صرفا منجر به یک رتبه‌بندی اریب شکنندهٔ متناظر با آن معیار می‌شود. بدین معنی که با تغییر معیار نیکویی برازش، اولویت‌بندی مدل‌های رگرسیون مورد نظر به‌طور طبیعی و به آسانی، دستخوش تغییر می‌شود. از طرفی از آنجا که:

۱. برخی از معیارهای نیکویی برازش دارای مطلوبیت افزایشی و برخی نیز دارای مطلوبیت کاهشی هستند،

۲. در مواردی مقادیر فراهم شده توسط معیارهای نیکویی برازش دارای کران بالا و در

مواردی نیز فاقد کران بالا یا پایین هستند،

۳. معیارهای نیکویی برازش واجد تنوع بالایی هستند،

انتخاب یک معیار نیکویی برازش که بتواند رتبه‌بندی مناسبی بین مدل‌های رگرسیونی مختلف ایجاد نماید، چالشی مورد توجه است [۲۷]. لذا معرفی رویکرد مناسبی که بتواند از تجمیع اطلاعات موجود در معیارهای نیکویی برازش مختلف و متنوع در ارزیابی مدل‌های رگرسیونی استفاده نماید، هدف اصلی مقاله حاضر است. در این راستا و به منظور حل و فصل این چالش از روش‌های تصمیم‌گیری چند معیاره ($MCDM$[۱]) و بویژه روش‌های تصمیم‌گیری چند شاخصه ($MADM$[۲])، که عموماً از دهه هفتاد میلادی به بعد مطرح شده و با گذر زمان مورد توجه رو به تزایدی قرار گرفته‌اند، استفاده خواهد شد. این روش‌ها به موازات افزایش پیچیدگی‌های مسائل و نیز متناسب با پیش فرض‌های آن‌ها و همچنین مطابق با قالب داده‌ها مورد بازنگری و تعمیم واقع شده‌اند. برخی از این روش‌ها عبارتند از: مجموع وزین ساده، تحلیل سلسله مراتبی، تحلیل شبکه‌ای، ویکور، تخصیص خطی، رضایت بخش خاص، رضایت بخش شمول، تاپسیس و تاپسیس تعمیم‌یافته، و غیره [۱، ۲]. امروزه حوزه‌های استفاده از رویکردهای تصمیم‌گیری چند معیاره در تحلیل مسائل به قدری متنوع و گسترده است که به ندرت می‌توان حوزه‌ای از علم و دانش را نام برد که با این مقوله در نیامیخته باشد. روش‌های تصمیم‌گیری چند شاخصه چارچوب بسیار مناسبی برای صورتبندی و تحلیل مسائلی هستند که در آنها بنا داریم تعداد محدودی گزینه را بر اساس تعداد محدودی شاخص/معیار با یکدیگر مقایسه کرده و به دسته‌بندی، غربالگری یا رتبه‌بندیِ بهینگی آنها بپردازیم. در چنین مسائلی ممکن است شاخص‌ها/معیارها واجد تنوع و گوناگونی‌هایی از حیث میزان اثرگذاری در تصمیم، مقیاس، مطلوبیت، همپوشانی، تاثیر و تأثر، تعارض با یکدیگر و امثال آن باشند. این تنوع ممکن است در ارزش‌های گزینه‌ها در رابطه با شاخص‌ها/معیارها نیز مصداق داشته باشد. با وجود اینکه مجموعه چنین عواملی امر تصمیم‌گیری و رتبه‌بندی را به چالش می‌کشند، اما در برخی مدل‌های تصمیم‌گیری چند شاخصه امکان تحلیل مسایل و داده‌هایی که چنین اقتضائاتی دارند، مهیا است. از این رو، در روش معرفی شده در این

[۱] $Multiple\ Criteria\ Decision\ Making$

[۲] $Multiple\ Attribute\ Decision\ Making$

مقاله، به کاربرد رویکردهای تصمیم‌گیری چند معیاره در ارزیابی مدل‌های رگرسیون فازی پرداخته خواهد شد، تا بر این اساس مجموعه‌ای از معیارهای نیکویی برازش با هر نوع ساختاری در ارزیابی تعدادی متناهی از رگرسیون‌های فازی مورد استفاده قرار گیرد. این روش یک عملگر الحاق یا انبوهش[۳] [۵] معرفی می‌کند، که جدا از اینکه عملگر معرفی شده خود یک معیار نیکویی برازش است، ماتریس ورودی مقادیر معیارهای نیکویی برازش را به برداری از مقادیر نیکویی برازش تبدیل می‌کند. رتبه‌بندی مقادیر بردار خروجی این عملگر، معیار مناسبی در ارزیابی برازش مدل‌های رگرسیون فازی است، زیرا به‌طور همزمان از مجموعه‌ای متنوع از معیارهای نیکویی برازش در ارزیابی مدل‌ها استفاده می‌کند. برای این منظور، محتوای مقاله به صورت زیر ساختاربندی شده است:
در بخش آتی به معرفی اجمالی مدل‌های رگرسیون فازی پرداخته می‌شود. در بخش ۳ به گام‌های روش تصمیم‌گیری چندشاخصه $WASPAS$[۴] پرداخته می‌شود. سپس در بخش ۴ رهیافت پیشنهادی با استفاده از روش تصمیم‌گیری چندشاخصه $WASPAS$ برای مقایسه و اولویت‌بندی نیکویی برازش ۲۲ مدل رگرسیون فازی در پیش گرفته می‌شود. نهایتاً در انتها به بحث و نتیجه‌گیری پرداخته می‌شود.

۲ رگرسیون فازی

یک مدل رگرسیون فازی در حالت کلی به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\widetilde{y} = \widetilde{f_\beta(x)} \qquad (۱)$$

که در آن خروجی متغیرهای فازی ($\widetilde{y}$) و p متغیر ورودی دقیق/فازی ($\widetilde{x}/x$) و پارامترهای دقیق/فازی ($\widetilde{\beta}/\beta$) تعریف می‌شود. مدل (۱) را می‌توان در حالات متنوع زیر (ولی نه فقط محدود به آنها) مورد بررسی قرار داد:

---
[۳] *Aggregation operator*
[۴] *Weighted Aggregated Sum Product Assesment*

۱. مدل با ورودی‌های دقیق (x)، خروجی فازی ($\widetilde{y}$) و پارامترهای فازی $\widetilde{\beta}$

$$\widetilde{f_\beta(x)} = \bigoplus_{l=\circ}^{p} (\widetilde{\beta}_l \otimes x_l).$$

۲. مدل با ورودی‌های فازی ($\widetilde{x}$)، خروجی فازی ($\widetilde{y}$) و پارامترهای دقیق β

$$\widetilde{f_\beta(x)} = \bigoplus_{l=\circ}^{p} (\beta_l \otimes \widetilde{x}_l).$$

۳. مدل با ورودی‌های فازی ($\widetilde{x}$)، خروجی فازی ($\widetilde{y}$) که در آن فقط پارامتر عرض از مبدا فازی است و بقیه پارامترها دقیق هستند

$$\widetilde{f_\beta(x)} = \widetilde{\beta}_\circ \oplus \left(\sum_{l=۱}^{p} \beta_l \times x_l \right).$$

۴. مدل با ورودی‌های فازی ($\widetilde{x}$)، خروجی فازی ($\widetilde{y}$) و پارامترهای فازی $\widetilde{\beta}$

$$\widetilde{f_\beta(x)} = \bigoplus_{l=\circ}^{p} (\widetilde{\beta}_l \otimes \widetilde{x}_l).$$

ملاحظه ۱.۲. برخی از رویکردهای امکانی در مدل‌بندی رگرسیون فازی معرفی شده‌اند که در آنها خروجی مقادیر دقیق دارد و دیگر کمیتها از قبیل ورودی‌ها یا پارامترهای مدل با توجه به ماهیت و ساختار مساله به‌صورت دقیق و یا فازی اختیار می‌شوند [۳۵، ۳۴].

در رویکردهای امکانی و رویکردهای مبتنی بر کمترین توان‌های دوم خطا، هدف این است که در یک حالت کلی و جامع پارامترهای مدل بر اساس یک مساله بهینه‌سازی (خطی یا غیرخطی) مبتنی بر کمینه‌سازی مجموع ابهام‌های برآورد شده یا مجموع توان‌های دوم خطا برآورد شوند. در رویکردهای امکانی مجموع ابهام‌های خروجی برآورد شده نقش مهمی در ساختاردهی توابع هدف مسایل بهینه‌سازی مربوط به خود دارند. در حالی که در رویکردهای مبتنی بر کمترین توان‌های دوم خطا، خطاها که به‌صورت

فاصله بین مقادیر مشاهده شده متغیر خروجی و مقادیر برآورد شده آن تعریف می‌شوند، نقش اساسی در ساختاردهی توابع هدف مسایل بهینه‌سازی مربوط به خود دارند. در این رویکردها و در یک حالت کلی، می‌توان از یک فاصله مانند $\mathcal{D}$ بین اعداد فازی استفاده کرد و بر اساس آن، یک مساله بهینه‌سازی مانند زیر ساختاربندی نمود

$$\min_{\beta} \sum_{i=1}^{n} \mathcal{D}(\widetilde{y}_i, \widetilde{f_\beta(x_i)}). \tag{۲}$$

انتخاب‌های متنوع فاصله $\mathcal{D}$ باعث می‌شود که خطاها و نیکویی برازش مدل‌ها به حالات و روش‌های مختلفی اندازه‌گیری شود. لذا با توجه به نوع فاصله انتخاب شده که از توان دوم و یا قدرمطلق در محاسبه خطاها استفاده می‌کند، از رویکرد مبتنی بر کمترین توان‌های دوم خطا یا رویکرد مبتنی بر کمترین قدرمطلق انحرافات در برآورد مدل رگرسیون فازی استفاده می‌شود. همچنین مساله (۲) اخیرا از نقطه نظر روش‌های استوار در برآوردیابی پارامترها نیز بسیار مورد توجه قرار گرفته است [۴، ۶، ۸، ۹، ۱۰، ۱۵، ۱۶، ۲۴، ۲۵، ۲۶، ۳۳].

بنابراین، معرفی چارچوب مناسبی که بتواند به رتبه‌بندی و ارزیابی نیکویی برازش مجموعه‌ای از مدل‌های رگرسیون فازی که بر داده‌ها برازش داده می‌شوند، بپردازد، تا بر این اساس بتوان مناسب‌ترین مدل را در برازش و تحلیل داده‌های مورد نظر به‌کار برد، بسیار حائز اهمیت و مورد توجه است. معرفی چنین چارچوبی در ادامه مورد بحث و بررسی قرار گرفته است.

۳ معرفی رویکرد

این بخش منعکس کننده ظرفیت‌های رویکرد $MADM$ و به‌کارگیری یک روش مناسب در این چارچوب برای حل و فصل چالش پیش گفته است. در این راستا به بیان دو گزاره مفید نیز خواهیم پرداخت. روش‌های مختلف $MADM$ بر حسبِ پیش فرض‌های مسایل تصمیم‌گیری و نیز میزان و نوع اطلاعاتی که در رابطه با گزینه‌ها و شاخص‌ها در دست باشد دارای تنوع و گوناگونی گسترده‌ای هستند. به‌ویژه میزان دقت در الگوریتم‌های $MADM$ تابعی از این موارد است. به عنوان نمونه و به‌طور طبیعی هرچه استفاده

از اطلاعات ماتریس تصمیم‌گیری که شامل وضعیت گزینه‌ها نسبت به شاخص‌های مساله است، بیشتر باشد استفاده از روش‌های دقیق‌تری از تصمیم‌گیری لازم است. در این راستا روشهای ترکیبی در تصمیم‌گیری جایگاه ویژه‌ای دارند [۲]. از جمله این روشهای ترکیبی که تمامی جزییات ماتریس تصمیم‌گیری در الگوریتم آن لحاظ می‌شود، روش $WASPAS$ است. این روش توسط زاواسکاس و همکاران [۳۸] طراحی و در سال‌های اخیر مورد تعمیم و کاربرد واقع شده است [۳۹]. برخی از مزایای کلیِ این روش و نیز برخی ویژگی‌های آن که مؤید سنخیت این روش با ماهیت آماری این مطالعه هستند از قرار زیر می‌باشند [۲]:

۱. پویایی در الگوریتم و استفاده از تمامی داده‌های ماتریس تصمیم‌گیری،

۲. دقت بالا که با ترکیب روش‌های WSM[۵] و WPM[۶] حاصل شده است،

۳. امکان تجمیع معیارهای نیکویی برازش متعارض،

۴. حضور شاخص‌های آماری مانند میانگین حسابی وزنی، میانگین هندسی وزنی و واریانس در الگوریتم این روش.

۵. دارا بودن ویژگی‌های عملگرهای انبوهشی [۵].

الگوریتم $WASPAS$:

ورودی: ماتریس تصمیم‌گیری $\mathbf{D}_{m\times n}=[d_{ij}]_{m\times n}$ که در آن $d_{ij}\geq 0$ وضعیت گزینه iام نسبت به شاخص jام است.

خروجی: رتبه‌بندی m گزینه $R_1,\ldots,R_m$ توسط n شاخص $G_1,\ldots,G_n$.

گام ۱- در شاخص‌های با جنبه مثبت، تبدیل زیر را انجام دهید

$$\delta_{ij}=\begin{cases}\frac{d_{ij}}{\max_i d_{ij}} & \max_i d_{ij}\neq 0,\\ 0 & \max_i d_{ij}=0,\end{cases}\qquad i=1,\ldots,m,\quad j=1,\ldots,n.$$

[۵] $Weighted\ Sum\ Model$
[۶] $Weighted\ Product\ Model$

گام ۲- در شاخص‌های با جنبه منفی، تبدیل زیر را انجام دهید

$$\delta_{ij} = \begin{cases} \frac{\min_i d_{ij}}{d_{ij}}, & d_{ij} \neq ۰, \\ ۱ & d_{ij} = ۰, \end{cases} \qquad i = ۱, \ldots, m, \quad j = ۱, \ldots, n.$$

گام ۳- قرار دهید

$$\mathbf{A} = \left[\sum_{j=۱}^{n} w_j \delta_{۱j}, \ldots, \sum_{j=۱}^{n} w_j \delta_{mj}\right]^t_{۱\times m},$$

$$\mathbf{B} = \left[\prod_{j=۱}^{n} \delta_{۱j}^{w_j}, \ldots, \prod_{j=۱}^{n} \delta_{mj}^{w_j}\right]^t_{۱\times m},$$

در اینجا w_j برای $j = ۱, \ldots, n$ وزن شاخص jام است. در این مقاله، اوزان استفاده شده در گام ۳، توسط انتروپی شانون محاسبه می‌شوند.

گام ۴- قرار دهید

$$\mathbf{C} = [C_۱, \ldots, C_m]^t_{۱\times m},$$

که در آن برای $i = ۱, \ldots, m$ داریم

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}(\delta_{i۱}, \quad \ldots, \quad \delta_{in}) &= C_i \\ &= \frac{var(\mathbf{B})}{var(\mathbf{B}) + var(\mathbf{A})} \sum_{j=۱}^{n} w_j \delta_{ij} + \frac{var(\mathbf{A})}{var(\mathbf{B}) + var(\mathbf{A})} \prod_{j=۱}^{n} \delta_{ij}^{w_j}. \end{aligned}$$

گام ۵- مطلوبیت گزینه‌ها را بر اساس ترتیب نزولی مولفه‌های بردار $\mathbf{C}$ مرتب کنید. گزینه‌ای که بزرگترین مقدار C_i را دارد، مطلوب‌ترین گزینه است. در الگوریتم‌های مختلف $MADM$ اوزان شاخص‌ها وابسته به شرایط و ماهیت مساله به روش‌های مختلفی برآورد می‌شوند [۲]. در این پژوهش اوزان شاخص‌ها مبتنی بر آنتروپی شانون در گام ۳ از الگوریتم $WASPAS$ محاسبه می‌شوند [۳۲]. استفاده از آنتروپی شانون باعث می‌شود

که اوزان شاخص‌ها متناسب با میزان تاثیر آن‌ها در ایجاد تمایز بین گزینه‌ها و از طریق تخصیص یک تابع توزیع احتمال به هر شاخص تعیین شود. برای این منظور، با در نظر گرفتن ماتریس تصمیم‌گیری

$$\mathbf{D}_{m\times n} = [d_{ij}]_{m\times n}$$

قرار می‌دهیم

$$\mathbf{P}_{m\times n} = [p_{ij}]_{m\times n},$$

که در آن

$$p_{ij} = \frac{d_{ij}}{\sum_{i=1}^{m} d_{ij}}, \qquad i = 1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, n,$$

در این‌صورت آنتروپی وابسته به شاخص jام به‌صورت زیر محاسبه می‌شود

$$E_j = -\frac{1}{\ln(m)} \sum_{i=1}^{m} p_{ij} \ln(p_{ij}), \qquad j = 1, \ldots, n,$$

نهایتا وزن شاخص jام عبارت است از

$$w_j = \frac{1 - E_j}{\sum_{l=1}^{n}(1 - E_l)}, \qquad j = 1, \ldots, n.$$

گزاره ۱.۳. *فرض کنیم $\Delta = [\delta_{ij}]_{m\times n}$ ماتریس تبدیل یافته تصمیم‌گیری حاصل از الگوریتم ۱ باشد. در این‌صورت عملگر $\mathfrak{C}(\cdot, \ldots, \cdot)$ یک عملگر انبوهش (الحاق) است.*

اثبات. ۱) برای هر $a \in [0, 1]$ داریم

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}(a, \ldots, a) &= \frac{var(\mathbf{B})}{var(\mathbf{B}) + var(\mathbf{A})} \sum_{j=1}^{n} w_j \times a + \frac{var(\mathbf{A})}{var(\mathbf{B}) + var(\mathbf{A})} \prod_{j=1}^{n} a^{w_j} \\ &= a. \end{aligned}$$

به‌ویژه $\mathfrak{C}(۱,\dots,۱)=۱$ و $\mathfrak{C}(\circ,\dots,\circ)=\circ$.

۲) برای $j=۱,\dots,n$ اگر $\delta_{ij}\le\delta'_{ij}$ دراین‌صورت

$$\mathfrak{C}(\delta_{i۱},\dots,\delta_{in})\le\mathfrak{C}(\delta'_{i۱},\dots,\delta'_{in}).$$

۳) اگر $\sigma(۱),\dots,\sigma(n)$ جایگشتی از اندیسهای $۱,\dots,n$ باشد، در این‌صورت

$$\begin{aligned}\mathfrak{C}(\delta_{\sigma(۱)},\dots,\delta_{\sigma(n)}) &= \frac{var(\mathbf{B}_\sigma)}{var(\mathbf{B}_\sigma)+var(\mathbf{A}_\sigma)}\sum_{j=۱}^{n} w_{\sigma(j)}\delta_{\sigma(j)}\\ &\quad+\frac{var(\mathbf{A}_\sigma)}{var(\mathbf{B}_\sigma)+var(\mathbf{A}_\sigma)}\prod_{j=۱}^{n}\delta_{\sigma(j)}^{w_{\sigma(j)}}\\ &= \frac{var(\mathbf{B})}{var(\mathbf{B})+var(\mathbf{A})}\sum_{j=۱}^{n} w_j\delta_j+\frac{var(\mathbf{A})}{var(\mathbf{B})+var(\mathbf{A})}\prod_{j=۱}^{n}\delta_j^{w_j}\\ &= \mathfrak{C}(\delta_۱,\dots,\delta_n).\end{aligned}$$

که در آن

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_\sigma &= \left[\sum_{j=۱}^{n} w_{\sigma(j)}\delta_{\sigma(۱j)},\dots,\sum_{j=۱}^{n} w_{\sigma(j)}\delta_{\sigma(mj)}\right]^t_{۱\times m},\\ \mathbf{B}_\sigma &= \left[\prod_{j=۱}^{n}\delta_{۱j}^{w_{\sigma(j)}},\dots,\prod_{j=۱}^{n}\delta_{\sigma(mj)}^{w_{\sigma(j)}}\right]^t_{۱\times m},\end{aligned}$$

جایگشت‌های متناظر $\sigma(۱),\dots,\sigma(n)$ در بردارهای $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ هستند.

۴) تابع $\mathfrak{C}(\cdot,\dots,\cdot)$ پیوسته است. $\square$

گزاره ۲.۳. با در نظر گرفتن نمادگذاری‌های الگوریتم اخیر، اگر ماتریس $\mathbf{D}_{new}$ به صورت

زیر ساخته شود

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{new} &= [\mathbf{D} \ \ \mathbf{C}]_{m\times(n+1)} \\ &= \begin{bmatrix} d_{11} & \dots & d_{1n} & C_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ d_{m1} & \dots & d_{mn} & C_m \end{bmatrix}_{m\times(n+1)} \end{aligned}$$

آنگاه رتبه‌بندی حاصل از ماتریس‌های $\mathbf{D}$ و $\mathbf{D}_{new}$ یکسان خواهد بود.

اثبات. *کافی است دقت کنیم که اگر وزن حاصل از آنتروپی شانون در ماتریس‌های تصمیم‌گیری $\mathbf{D}$ و $\mathbf{D}_{new}$ برای شاخص jام، $j = 1, \dots, n$ به ترتیب w_j و λ_j باشد، آنگاه برای $1 \le s, t \le n$ داریم*

$$w_s \times \lambda_t = w_t \times \lambda_s.$$

زیرا برای $k = 1, \dots, n$ داریم

$$\begin{aligned} w_k &= \frac{1 - E_k}{\sum_{j=1}^{n}(1 - E_j)}, \\ \lambda_k &= \frac{1 - E_k}{\sum_{j=1}^{n}(1 - E_j) + (1 - E_{n+1})}. \end{aligned}$$

□

۴ ارزیابی نیکویی برازش رگرسیون‌های فازی

در این بخش به کاربرد الگوریتم بیان شده در بخش ۳ در ارزیابی نیکویی برازش مدل‌های رگرسیون فازی پرداخته می‌شود. بدین منظور، در مقایسه مدل‌های رگرسیون فازی از سه

معیار نیکویی برازش شناخته شده زیر به عنوان شاخص‌ها استفاده می‌شود [۴، ۱۰، ۲۵]

$$
\begin{aligned}
G_1 &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\int \min\{\widetilde{y}_i(t),\widehat{\widetilde{y}}_i(t)\}\,dt}{\int \max\{\widetilde{y}_i(t),\widehat{\widetilde{y}}_i(t)\}\,dt},\\
G_2 &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int |\widetilde{y}_i(t)-\widehat{\widetilde{y}}_i(t)|\,dt,\\
G_3 &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int \frac{|\widetilde{y}_i(t)-\widehat{\widetilde{y}}_i(t)|}{\int \widetilde{y}_i(t)\,dt}\,dt.
\end{aligned}
$$

توجه کنید که معیارهای نیکویی برازش متنوعی برای ارزیابی مدل‌های رگرسیون فازی معرفی شده است که هر تعداد از آن‌ها با هر نوع تنوع و ساختاری می‌تواند در الگوریتم بخش ۳ مورد استفاده قرار گیرد. اما در این مقاله به عنوان نمونه از G_1 که میانگین اندازه‌های تشابه بین مقادیر مشاهده شده و برآورد شده متغیر پاسخ توسط مدل است، و G_2 و G_3 که میانگین قدرمطلق خطاها بین مقادیر مشاهده شده و برآورد شده متغیر پاسخ توسط مدل هستند، استفاده می‌شود. در این معیارها G_1 دارای مطلوبیت افزایشی (مثبت) و G_2 و G_3 دارای مطلوبیت کاهشی (منفی) می‌باشند. در ادامه، داده‌های واقعی مقاله [۴۱] با ۶ متغیر تبیینی حقیقی-مقدار (غیر فازی) و یک متغیر وابسته فازی با ۱۴۷ مشاهده به‌کار برده می‌شود تا ۲۲ مدل رگرسیون فازی انعکاس یافته در جدول ۱ بر این داده‌ها برازش داده شود. جزییات محاسباتی الگوریتم $WASPAS$ در ادامه و در جداول ۱ و ۲ آورده شده است. این نتایج با اجرای برنامه‌های مختص هر روش مدل رگرسیون فازی از طریق برنامه‌نویسی در محیط نرم‌افزار R حاصل شده است. نتایج ارایه شده در ستون آخر جدول ۲ نشان می‌دهد که روش [۱۶] بهترین برازش را در بین ۲۲ روش کاندید در برازش به مجموعه داده‌های [۴۱] دارد. دیگر روشها نیز به ترتیب بهینگی در برازش به این مجموعه داده‌ها مرتب شده‌اند.

ملاحظه ۱.۴. مطابق گزاره ۲، اگر نتایج ظاهر شده در ستون $\mathbf{C}$ به عنوان شاخص چهارم با ماتریس $\mathbf{D}$ ادغام شود، نتایج رتبه‌بندی مدل‌های رگرسیون فازی تغییر نخواهد کرد و همچنان رویکرد و روش برآوردیابی [۱۶] بهترین برازش را در بین ۲۲ روش در برازش به مجموعه داده‌های [۴۱] دارد. یعنی مقادیر بردار $\mathbf{C}$ کلیه اطلاعات موجود در ماتریس تصمیم‌گیری را در بر دارد و تکرار فرآیند با اضافه کردن این مقادیر تغییری در رتبه‌بندی

جدول ۱: *ماتریس تصمیم، ماتریس تصمیم نرمال شده به همراه وزنها*

ID	مدلها	معیارها نیکویی برازش‌ها $G_۱$	$G_۲$	$G_۳$	$\mathbf{P} = [p_{ij}]_{۲۲\times۳}$ $\frac{G_۱}{\sum G_۱}$	$\frac{G_۲}{\sum G_۲}$	$\frac{G_۳}{\sum G_۳}$
۱	[۳۴] $h = ۰٫۰۰$	۰٫۰۰۰	۱۰٫۸۶	۰٫۱۶	۰٫۰۰۰	۰٫۰۰۶	۰٫۰۰۸
۲	[۳۴] $h = ۰٫۵۰$	۰٫۰۰۰	۲۲٫۹۱	۰٫۳۱	۰٫۰۰۰	۰٫۰۱۳	۰٫۰۱۶
۳	[۳۴] $h = ۰٫۷۵$	۰٫۰۶۸	۱۷۰٫۷۹	۱٫۷۱	۰٫۰۰۷	۰٫۰۹۶	۰٫۰۸۸
۴	[۳۴] $h = ۰٫۹۰$	۰٫۰۲۴	۳۹۱٫۹۷	۳٫۹۱	۰٫۰۰۲	۰٫۲۲۰	۰٫۲۰۱
۵	[۱۲]	۰٫۳۰۲	۲۹۶٫۵۱	۲٫۳۴	۰٫۰۳۱	۰٫۱۶۶	۰٫۱۲۰
۶	[۳۶]	۰٫۷۳۹	۳۷٫۸۷	۰٫۳۲	۰٫۰۷۶	۰٫۰۲۱	۰٫۰۱۶
۷	[۳۰] $h = ۰٫۱۰$	۰٫۰۰۰	۱۸٫۹۳	۰٫۰۵	۰٫۰۰۰	۰٫۰۱۱	۰٫۰۰۳
۸	[۲۸] $h = ۰٫۰۰$	۰٫۰۱۴	۳۴٫۴۵	۰٫۳۴	۰٫۰۰۱	۰٫۰۱۹	۰٫۰۱۷
۹	[۲۹] $h = ۰٫۵۰$	۰٫۰۰۰	۳۸٫۵۶	۳٫۲۲	۰٫۰۰۰	۰٫۰۲۲	۰٫۱۶۶
۱۰	[۳۱] $h = ۰٫۹۰$	۰٫۰۳۲	۲۹۹٫۸۰	۳٫۰۶	۰٫۰۰۳	۰٫۱۶۸	۰٫۱۵۷
۱۱	[۲۲]	۰٫۸۵۶	۳۹٫۴۵	۰٫۴۲	۰٫۰۸۸	۰٫۰۲۲	۰٫۰۲۲
۱۲	[۱۳]	۰٫۴۱۲	۴۹٫۲۸	۰٫۳۷	۰٫۰۴۲	۰٫۰۲۸	۰٫۰۱۹
۱۳	[۱۷]	۰٫۷۳۲	۳۸٫۵۸	۰٫۳۳	۰٫۰۷۵	۰٫۰۲۲	۰٫۰۱۷
۱۴	[۱۶]	۰٫۷۵۲	۳۳٫۵۸	۰٫۳۱	۰٫۰۷۷	۰٫۰۱۹	۰٫۰۱۶
۱۵	[۱۵]	۰٫۶۹۹	۳۳٫۸۷	۰٫۲۸	۰٫۰۷۲	۰٫۰۱۹	۰٫۰۱۴
۱۶	[۴۰]	۰٫۷۲۴	۳۹٫۷۲	۰٫۳۶	۰٫۰۷۴	۰٫۰۲۲	۰٫۰۱۹
۱۷	[۹]	۰٫۶۷۱	۴۲٫۱۲	۰٫۴۱	۰٫۰۶۹	۰٫۰۲۴	۰٫۰۲۱
۱۸	[۶]	۰٫۷۵۳	۳۴٫۰۵	۰٫۳۱	۰٫۰۷۷	۰٫۰۱۹	۰٫۰۱۶
۱۹	[۴]	۰٫۷۴۵	۳۷٫۰۲	۰٫۳۰	۰٫۰۷۶	۰٫۰۲۱	۰٫۰۱۵
۲۰	[۲۵]	۰٫۷۳۰	۳۸٫۹۵	۰٫۳۲	۰٫۰۷۵	۰٫۰۲۲	۰٫۰۱۶
۲۱	[۳۳]	۰٫۷۴۲	۳۹٫۳۶	۰٫۳۳	۰٫۰۷۶	۰٫۰۲۲	۰٫۰۱۷
۲۲	[۸]	۰٫۷۵۵	۳۶٫۴۱	۰٫۲۹	۰٫۰۷۷	۰٫۰۲۰	۰٫۰۱۵
$\sum$		۹٫۷۵۵	۱۷۸۵٫۰۴	۱۹٫۴۵	۱٫۰۰۰	۱٫۰۰۰	۱٫۰۰۰
		$E_j = -\frac{۱}{\ln(۲۲)}\sum_{i=۱}^{۲۲}\delta_{ij}\ln(\delta_{ij})$			$E_۱ = ۰٫۸۱۵$	$E_۲ = ۰٫۸۱۶$	$E_۳ = ۰٫۸۰۲$
		$w_j = \frac{۱-E_j}{\sum_{l=۱}^{n}(۱-E_l)},\ j = ۱, ۲, ۳$			$w_۱ = ۰٫۳۲۶$	$w_۲ = ۰٫۳۲۴$	$w_۳ = ۰٫۳۵۰$

نهایی ایجاد نمی‌کند. به عبارتی، اضافه کردن عملگر الحاقی پیشنهادی این پژوهش به مجموعه معیارهای نیکویی برازش اولیه و تکرار فرآیند مورد بحث، تغییری در رتبه‌بندی مدل‌های رگرسیون فازی ایجاد نمی‌کند.

بحث و نتیجه‌گیری

مقایسه مدل‌های رگرسیون فازی که با رویکردها و روش‌های برآوردیابی مختلفی حاصل شده‌اند، امری چالش برانگیز بوده که تاکنون چارچوب مناسبی برای حل و فصل این چالش پیشنهاد نشده است. در رویکردهای موجود در این خصوص، همه مقایسه‌ها تک بعدی بوده و بر مبنای انتخاب و استفاده از یک شاخص و/یا یک معیار نیکویی برازش خاص انجام شده‌اند. در حقیقت متاثر از انتخاب یک معیار نیکویی برازش خاص، این

جدول ۲: *رتبه‌بندی بر اساس روش* $WASPAS$

ID	$\Delta = [\delta_{ij}]_{۲۲\times۳}$			A	B	C	رتبه L_i
	$\frac{G_۱}{\max G_۱}$	$\frac{\min G_۲}{G_۲}$	$\frac{\min G_۳}{G_۳}$				
۱	۰٫۰۰۰	۱٫۰۰۰	۰٫۳۱۲	۰٫۴۳۴	۰٫۰۰۰	۰٫۱۹۸	۸
۲	۰٫۰۰۰	۰٫۴۷۴	۰٫۱۶۱	۰٫۲۱۰	۰٫۰۰۰	۰٫۰۹۶	۶
۳	۰٫۰۷۹	۰٫۰۶۴	۰٫۰۲۹	۰٫۰۵۷	۰٫۰۵۲	۰٫۰۵۴	۴
۴	۰٫۰۲۸	۰٫۰۲۸	۰٫۰۱۳	۰٫۰۲۳	۰٫۰۲۱	۰٫۰۲۲	۱
۵	۰٫۳۵۳	۰٫۰۳۷	۰٫۰۲۱	۰٫۱۳۴	۰٫۰۶۳	۰٫۰۹۶	۵
۶	۰٫۸۶۳	۰٫۲۸۷	۰٫۱۵۶	۰٫۴۲۹	۰٫۳۳۲	۰٫۳۷۶	۱۶
۷	۰٫۰۰۰	۰٫۵۷۴	۱٫۰۰۰	۰٫۵۳۶	۰٫۰۰۰	۰٫۲۴۵	۹
۸	۰٫۰۱۶	۰٫۳۱۵	۰٫۱۴۷	۰٫۱۵۹	۰٫۰۹۲	۰٫۱۲۳	۷
۹	۰٫۰۰۰	۰٫۲۸۲	۰٫۰۱۶	۰٫۰۹۷	۰٫۰۰۰	۰٫۰۴۴	۳
۱۰	۰٫۰۳۷	۰٫۰۳۶	۰٫۰۱۶	۰٫۰۳۰	۰٫۰۲۸	۰٫۰۲۹	۲
۱۱	۱٫۰۰۰	۰٫۲۷۵	۰٫۱۱۹	۰٫۴۵۷	۰٫۳۱۳	۰٫۳۷۸	۱۷
۱۲	۰٫۴۸۱	۰٫۲۲۰	۰٫۱۳۵	۰٫۲۷۶	۰٫۲۴۰	۰٫۲۵۶	۱۰
۱۳	۰٫۸۵۵	۰٫۲۸۱	۰٫۱۵۲	۰٫۴۲۳	۰٫۳۲۵	۰٫۳۷۰	۱۳
۱۴	۰٫۸۷۹	۰٫۳۲۳	۰٫۱۶۱	۰٫۴۴۸	۰٫۳۵۱	۰٫۳۹۵	۲۲
۱۵	۰٫۸۱۷	۰٫۳۲۱	۰٫۱۷۹	۰٫۴۳۲	۰٫۳۵۴	۰٫۳۹۰	۱۹
۱۶	۰٫۸۴۶	۰٫۲۷۳	۰٫۱۳۹	۰٫۴۱۳	۰٫۳۱۲	۰٫۳۵۸	۱۲
۱۷	۰٫۷۸۴	۰٫۲۵۸	۰٫۱۲۲	۰٫۳۸۲	۰٫۲۸۵	۰٫۳۲۹	۱۱
۱۸	۰٫۸۸۰	۰٫۳۱۹	۰٫۱۶۱	۰٫۴۴۶	۰٫۳۵۰	۰٫۳۹۴	۲۱
۱۹	۰٫۸۷۰	۰٫۲۹۳	۰٫۱۶۷	۰٫۴۳۷	۰٫۳۴۳	۰٫۳۸۶	۱۸
۲۰	۰٫۸۵۳	۰٫۲۷۹	۰٫۱۵۶	۰٫۴۲۳	۰٫۳۲۸	۰٫۳۷۱	۱۵
۲۱	۰٫۸۶۷	۰٫۲۷۶	۰٫۱۵۲	۰٫۴۲۵	۰٫۳۲۵	۰٫۳۷۱	۱۴
۲۲	۰٫۸۸۲	۰٫۲۹۸	۰٫۱۷۲	۰٫۴۴۴	۰٫۳۵۱	۰٫۳۹۳	۲۰
				$var\mathbf{A} = ۰٫۰۲۷$	$var\mathbf{B} = ۰٫۲۳۰$		

روشها از نقطه نظرات زیر مورد انتقاد واقع شده‌اند:

۱. تصمیم‌گیری‌های اریب و جهت‌دار در نتایج رتبه‌بندی حاصل کرده‌اند،

۲. رتبه‌بندی‌هایی به شدت شکننده ایجاد کرده‌اند که به آسانی و حتی با تغییرات بسیار جزیی در داده‌ها، تغییر کرده‌اند.

لذا در این مقاله، رهیافت و چارچوب منسجمی در قالب رویکرد $MADM$ برای مقایسه و رتبه‌بندی هر مجموعه متناهی دلخواه از مدل‌های رگرسیونی با معیارهای نیکویی برازش دلخواه، که بر مجموعه‌ای از داده‌ها برازش داده می‌شوند، ارایه شد. در چنین ساختار و چارچوبی، مدل‌های رگرسیونی در نقش گزینه‌ها و معیارهای نیکویی برازش در نقش شاخص‌ها ظاهر شدند. در این راستا مقادیر شاخص‌ها بر مبنای مقادیر حاصل از معیارهای نیکویی برازش و اوزان شاخص‌ها نیز مبتنی بر آنتروپی شانون تعیین شد. اگرچه رویکرد پیشنهادی با استفاده از سه معیار نیکویی برازش به عنوان شاخص‌ها، ۲۲ مدل رگرسیون فازی به عنوان گزینه‌ها، آنتروپی شانون در تعیین وزن شاخص‌ها و روش $WASPAS$ در رتبه‌بندی گزینه‌ها اعمال شد، اما این رویکرد ظرفیت کاربرد و تعمیم در هر مساله‌ای با هر تعداد متناهی دلخواه از معیارهای نیکویی برازش و مدل‌های رگرسیونی

و نیز امکان ارزیابی اوزان معیارهای نیکویی برازش به روش‌های متنوع را دارد. در این راستا اضافه می‌نماید که:

۱. امکان در نظر گرفتن هر تعداد متناهی دلخواه از معیارهای نیکویی برازش در رتبه‌بندی مدل‌های رگرسیون فازی فراهم است. این امر می‌تواند اریبی و جهت‌داری یک (یا چند) معیار در رتبه‌بندی را تعدیل و خنثی نماید. به عبارتی، امکان دخالت معیارهای متنوع نیکویی برازش در مقایسه مدل‌های رگرسیون منجر به تقویت پایایی رتبه‌بندی‌ها خواهد شد. به گونه‌ای که اگر شاخص خاصی در جهت بالابردن رتبه یکی از گزینه‌ها در محاسبات وارد شود، تاثیر آن در جهت بخشی به نفع یکی از گزینه‌ها در مقابل دیگر شاخص‌های موجود تعدیل و خنثی خواهد شد.

۲. امکان تعیین اوزان شاخص‌ها به روش‌های متنوع فراهم است. می‌توان اوزان شاخص‌ها را به کمک رویکردی ترکیبی از آنتروپی شانون و روش‌های مبتنی بر قضاوت‌های دو به دو مانند ماتریس‌های مقایسات زوجی، $SWARA$ یا BWM تعیین کرد. به‌طور ویژه، در صورتی که تخصیص اوزان نرمال شده شاخص‌ها به‌صورت ۰ و ۱ باشد، حاصل این رویکرد منطبق/معادل با رویکرد تک بعدی در مقایسه گزینه‌ها خواهد بود. لذا از این منظر، رویکرد پیشنهادی تعمیم روش‌های موجودِ مقایسه‌ای است.

۳. صرف نظر از اینکه رهیافت پیشنهادی به رتبه‌بندی گزینه‌ها می‌انجامد، کمیت $\mathbf{C}$ به‌طور مطلق نیز می‌تواند میزان نزدیکی گزینه‌ها به گزینه و/یا وضعیت ایده‌آل در برازش به داده‌ها را نشان دهد. به عبارت دیگر، $\mathbf{C}$ خود می‌تواند به عنوان یک معیار نیکویی برازش در نظر گرفته شود که مقادیر آن حاصل الحاق و انبوهش تعدادی متناهی از معیارهای نیکویی برازش دیگر است.

۴. کلیه اطلاعات مربوط به معیارهای نیکویی برازش در الگوریتم پیشنهادی استفاده می‌شود و این نکته از منظر دقت و اطمینان، حسن قابل توجهی در نظریه تصمیم‌گیری‌های چند معیاره محسوب می‌گردد.

۵. اگر چه این مقاله بر مقایسه مدل‌های رگرسیون فازی متمرکز شده است، اما رهیافت پیشنهادی در انجام مقایسه بین سایر انواع مدل‌های آماری از قبیل انواع

مدل‌های رگرسیونی کلاسیک، انواع مدل‌های سری‌های زمانی، انواع مدل‌های ناپارامتری و نیمه-پارامتری، انواع مدل‌های مبتنی بر یادگیری عمیق و ... نیز قابل استفاده است.

تشکر و قدردانی

نویسندگان مقاله از داوران محترم که نظرات ارزشمند ایشان باعث بهبود مطالب ارایه شده در این مقاله گردید، کمال تشکر و قدردانی را دارند.

مراجع

[۱] کاظمی‌فرد، ا. (۱۳۹۹). یک تعمیم از مدل تصمیم‌گیری چندشاخصه‌ی $TOPSIS$ مبتنی بر یکنواخت‌سازی مطلوبیت شاخص‌ها، مجله مدلسازی پیشرفته ریاضی، دوره ۱۰، شماره ۱، ص ص ۱۹۶-۲۱۴.

[۲] کاظمی‌فرد، ا. و صادقیان، ر. تصمیم‌گیری‌های چند معیاره، انتشارات دانش‌پرور، ۱۳۹۷.

[3] Asadolahi, M., Akbari, M.G., Hesamian, G. and Arefi, M. (2021). A Robust Support Vector Regression with Exact Predictors and Fuzzy Responses, *International Journal of Approximate Reasoning*, **132**, 206–225.

[4] Arefi, M. (2020). Quantile Fuzzy Regression Based on Fuzzy Outputs and Fuzzy Parameters, *Soft Computing*, **24**, 311–320.

[5] Beliakov, G., Pradera, A. and Calvo, T. (2007). *Aggregation Functions: A Guide for Practitioners*, Springer, Berlin Heidelberg.

[6] Chachi, J. (2019). A Weighted Least Squares Fuzzy Regression for Crisp Input Fuzzy Output Data, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, **27(4)**, 739–748.

[7] Chachi, J. and Chaji, A. (2021). An OWA-Based Approach to Quantile Fuzzy Regression. *Computers and Industrial Engineering*, **159**, 107498.

[8] Chachi, J., Kazemifard, A. and Jalalvand M. (2021). A Multi-Attribute Assessment of Fuzzy Regression Models, *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, **18**, 131–148.

[9] Chachi, J. and Roozbeh, M. (2017). A Fuzzy Robust Regression Approach Applied to Bedload Transport Data, *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, **47**, 1703–1714.

[10] Chachi, J. and Taheri, S.M. (2021). Outliers Detection in Fuzzy Regression Models, In: Shahbazova SN, Kacprzyk J, Balas VE, Kreinovich V (eds) *Recent Developments and the New Direction in Soft-Computing Foundations and Applications, Studies in Fuzziness and Soft Computing*, Springer, vol **393**, pp 299–308.

[11] Chachi, J., Taheri, S.M. and D'Urso, P. (2022). Fuzzy Regression Analysis Based on M-estimates, *Expert Systems with Applications*, **187**, 115891.

[12] Chang, P.T. and Lee, S. (1994). Fuzzy Linear Regression with Spreads Unrestricted in Sign, *Computers and Mathematics with Applications*, **28**, 61–70.

[13] Choi, S.H. and Buckley, J.J. (2008). Fuzzy Regression Using Least Absolute Deviation Estimators, *Soft Computing*, **12**, 257–263.

[14] Chukhrova, N. and Johannssen, A. (2019). Fuzzy Regression Analysis: Systematic Review and Bibliography, *Applied Soft Computing*, **84**, 105708.

[15] D'Urso, P. and Massari, R. (2013). Weighted Least Squares and Least Median Squares Estimation for the Fuzzy Linear Regression Analysis, *Metron*, **71**, 279–306.

[16] D'Urso, P., Massari, R. and Santoro, A. (2011). Robust Fuzzy Regression Analysis, *Information Sciences*, **181**, 4154–4174.

[17] Ferraro, M., Coppi, R., Rodriguez, G.G. and Colubi, A. (2010). A Linear Regression Model for Imprecise Response, *International Journal of Approximate Reasoning*, **51**, 759–770.

[18] Hesamian, G. and Akbari, M.G. (2020). A Robust Varying Coefficient Approach to Fuzzy Multiple Regression Model, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **371**, 112704.

[19] Hesamian, G. and Akbari, M.G. (2021). A Robust Multiple Regression Model Based on Fuzzy Random Variables, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **388**, 113270.

[20] Hesamian, G. and Akbari, M.G. (2021). A Fuzzy Additive Regression Model with Exact Predictors and Fuzzy Responses, *Applied Soft Computing*, **95**, 106507.

[21] Hesamian, G., Akbari, M.G. and Shams, M. (2021). Parameter Estimation in Fuzzy Partial Univariate Linear Regression Model with Non-Fuzzy Inputs and Triangular Fuzzy Outputs *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, **18**, 51–64.

[22] Hojati, M., Bector, C.R. and Smimou, K. (2005). A Simple Method for Computation of Fuzzy Linear Regression, *European Journal of Operational Research*, **166**, 172–184.

[23] Hwang, C. and Yoon, K. (1981). *Multiple Attribute Decision Making: Methods and Applications*, Springer-Verlag, NY.

[24] Kazemifard, A. and Chachi, J. (2021). MADM Approach to Analyse the Performance of fuzzy regression models. *Journal of Ambient Intelligence and Humanized Computing*, https://doi.org/10.1007/s12652-021-03394-4.

[25] Khammar, A.H., Arefi, M. and Akbari, M.G. (2020). A Robust Least-Squares Fuzzy Regression Model Based on Kernel Function, *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, **17**, 105–119.

[26] Khammar, A.H., Arefi, M. and Akbari, M.G. (2021). A General Approach to Fuzzy Regression Models Based on Different Loss Functions, *Soft Computing*, **25**, 835–849.

[27] Lu, J. and Wang, R. (2009). An Enhanced Fuzzy Linear Regression Model with More Flexible Spreads, *Fuzzy Sets and Systems*, **160**, 2505–2523.

[28] Modarres, M., Nasrabadi, E. and Nasrabadi, M.M. (2004). Fuzzy Linear Regression Analysis From the Point of View Risk, *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, **12**, 635–649.

[29] Modarres, M., Nasrabadi, E. and Nasrabadi, M.M. (2005). Fuzzy Linear Regression Models with Least Square Errors, *Applied Mathematics and Computation*, **163**, 977–989.

[30] Nasrabadi, M.M. and Nasrabadi, E. (2004). A Mathematical-Programming Approach to Fuzzy Linear Regression Analysis, *Applied Mathematics and Computation*, **155**, 873–881.

[31] Nasrabadi, M.M., Nasrabadi, E. and Nasrabadi, A.R. (2005). Fuzzy Linear Regression Analysis: A Multi-Objective Programming Approach, *Applied Mathematics and Computation*, **163**, 245–251.

[32] Shannon, C.E. (1948). A Mathematical Theory of Communication, *Bell System Technical Journal*, **27**, 379–423 & 623–656.

[33] Taheri, S.M. and Chachi, J. (2021). A Robust Variable-Spread Fuzzy Regression Model, In: Shahbazova SN, Kacprzyk J, Balas VE, Kreinovich V (eds) *Develop-*

ments and the New Direction in Soft-Computing Foundations and Applications, Studies in Fuzziness and Soft Computing, Springer, vol **393**, pp 309–320.

[34] Tanaka, H., Hayashi, I. and Watada, J. (1989). Possibilistic Linear Regression Analysis for Fuzzy Data, *European Journal of Operational Research*, **40**, 389–396.

[35] Tanaka, H. , Uegima, S. and Asai, K. (1982). Linear Regression Analysis with Fuzzy Model, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, **12**, 903–907.

[36] Xu, R. and Li, C. (2001). Multidimensional Least-Squares Fitting With a Fuzzy Model, *Fuzzy Sets and Systems*, **119**, 215–223.

[37] Xu, Z. (2015). *Uncertain Multi–Attribute Decision Making: Methods and Applications*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.

[38] Zavadskas, E.K., Turskis, Z., Antucheviciene, J. and Zakarevicius, A. (2012). Optimization of Weighted Aggregated Sum Product Assessment, *Electronics and Electrical Engineering*, **122**, 3–6.

[39] Zavadskas, E.K., Antucheviciene, J., Hajiagha, S.H.R. and Hashemi, S.S. (2014). Extension of Weighted Aggregated Sum Product Assessment with Interval-Valued Intuitionistic Fuzzy Numbers (Waspas-Ivif), *Applied Soft Computing*, **24**, 1013–1021.

[40] Zeng, W., Feng, Q. and Lia, J. (2017). Fuzzy Least Absolute Linear Regression, *Applied Soft Computing*, **52**, 1009–1019.

[41] Zhou, J., Zhang, H., Gu, Y. and Pantelous, A.A. (2018). Affordable Levels of House Prices Using Fuzzy Linear Regression Analysis: The Case of Shanghai, *Soft Computing*, **22**, 5407–5418.

[42] Zimmermann, H.J. (2001). *Fuzzy Set Theory and Its Applications*, 4th ed., Kluwer Nihoff, Boston.