سیستم‌های فازی و کاربردها
سال چهارم، شماره اول (بهار و تابستان ۱۴۰۰)
صص. ۱۴۵ تا ۱۶۹

شاپای چاپی: ۲۷۱۷-۴۴۰۹
شاپای الکترونیکی: ۲۷۱۷-۳۹۸۴
DOI: 10.22034/JFSA.2021.140196

تقریب اعداد فازی مبتنی برحفظ ترکیب توام پشتیبان و هسته

بهرام فرهادی نیا و نبی همتی
استاد دانشگاه صنعتی قوچان، قوچان، ایران
کارشناسی ارشد، دانشگاه صنعتی قوچان، قوچان، ایران

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۵/۱۷ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۸/۱۴

چکیده
هدف ما در این مقاله یافتن نزدیک ترین عدد فازی ذوزنقه ای به یک عدد فازی است که ترکیب محدب بازه های پشتیبان و هسته عدد فازی را حفظ می کند. این امکان به تصمیم گیرنده این اجازه را می دهد تا تقریب دلخواه یک عدد فازی را از یک دسته تقریب های ذوزنقه ای انتخاب کند.

۱ مقدمه

امروزه مفاهیم فازی به طور گسترده ای در بسیاری از برنامه های کاربردی مهندسی مانند مدل های جمعیتی، سیستم های کنترل بی نظمی، اقتصاد و امور مالی، هوش مصنوعی، علوم کامپیوتر، سیستم های خبره، علوم مدیریت، شناسایی الگو، رباتیک و سایر موارد استفاده می شود.

به دلیل وجود پارامترهای فازی و عملیاتی که بر روی مقادیر فازی انجام می شود طبیعتا نتایج حاصل شده فازی هستند. این نتایج به سادگی قابل فهم و تفسیر نیستند و همچنین محاسبات مفاهیم فازی با پیچیدگی و دشواری توام است. از این رو برای سادگی

عبارات و کلمات کلیدی: اعداد فازی، تقریب های ذوزنقه ای، پایایی پشتیبان و هسته

Email(s): bfarhadinia@qiet.ac.ir.

Mathematics Subject Classification (2010): 93C42

و فهم نتایج حاصل از محاسبات فازی می بایست اعداد فازی به اعداد قطعی (غیر فازی) تبدیل شوند. فرایند تبدیل اعداد فازی به اعداد قطعی را نافازی سازی می گویند. بدیهی است که در بیشتر موارد با تبدیل مجموعه فازی به مجموعه قطعی اطلاعات بسیارمهم و ارزشمندی از دست می رود. به هر حال برای بهره بردن از نافازی سازی باید معیارهایی تعریف شود و برای آن چارچوب مشخصی وجود داشته باشد. ون لیکوایک و کری [۲۱]، به منظور نافازی سازی مجموعه ای از معیارها را ارائه دادند و پر کاربردترین تکنیک های نافازی سازی را در گروه های مختلف طبقه بندی کردند. همچنین نمونه های اولیه هر گروه را با توجه به معیارهای نافازی سازی مورد بررسی قرار دادند.

مقالات مختلفی به تقریب اعداد فازی برای کاستن از مشکلات ناشی از محاسبات فازی اختصاص یافته است. چنس [۹]، گزگوزسکی [۱۳,۱۴] و رونتا [۲۲]، برای اعداد فازی، تقریب بازه معرفی کرده اند که در آن یک مساله محاسبه فازی به یک مساله محاسبه بازه تبدیل می شود. ولی ایرادی که این روش دارد این است که هسته (۱-برش) اعداد فازی از بین می رود.

با توجه به این مطلب که هر عدد فازی با توابع عضویت مشخص می شود و ساده ترین تابع عضویت خطی است، از این رو روش های زیادی برای معرفی تقریب اعداد فازی بر اساس نوع مثلثی و ذوزنقه ای ارائه شده است. دلگادو و همکاران [۱۰]، تقریب ذوزنقه ای متقارن و نامتقارن عدد فازی را بر اساس دو شاخص، ارزش و ابهام پیشنهاد کردند. نزدیک ترین عدد فازی مثلثی متقارن برای هر کمیت فازی توسط می و همکاران [۱۸] معرفی گردید. عباسبندی و اسدی [۲] رویکردی ازنزدیکترین تقریب ذوزنقه ای فازی با استفاده از متریک بین دو عدد فازی ارائه کردند. گزگوزسکی و امروکا[۱۵] مساله تقریب ذوزنقه ای یک عدد فازی را مطرح کردند. الله ویرانلو و ادبی تبار [۵] دو مثال نقض را ارائه دادند که موقعیت هایی را نشان میداد که در مساله گزگوزسکی و امروکا ممکن است عملگر نتواند یک عدد فازی ذوزنقه ای را به دست آورد. بعد از آن این مشکل توسط گزگوزسکی و امروکا حل شد [۱۶] و بان [۶] خلأهای موجود در این خصوص را برطرف کرد، به علاوه گزگوزسکی و امروکا مجموعه ای از معیارهای تقریب ذوزنقه ای اعداد فازی را همانند [۲۱] در [۱۵] نیز ارائه کردند. برخی از خصوصیات تعمیم یافته و جدید تقریب ذوزنقه ای اعداد فازی توسط یه [۲۳] مطرح شده است. پیشنهاد عباسبندی و اسدی [۲]

با در نظر گرفتن نمایش پارامتری عدد فازی تقریبی [۲۰] تعمیم یافت. عباسبندی و امیرفخریان [۱] از مقدار و ابهام عدد فازی استفاده کردند و یک مساله بهینه سازی را برای به دست آوردن نزدیک ترین عدد فازی مثلثی یا ذوزنقه ای برای یک عدد فازی دلخواه حل کردند. همچنین نزدیک ترین عدد فازی مثلثی با استفاده از ارزیابی های وزنی-α بر اساس فرمول یاگر و فیلو توسط عباسبندی و همکاران معرفی شد[۳].

در این مقاله ما تقریب ذوزنقه ای جدیدی از اعداد فازی را ارائه می دهیم که ترکیب محدب بازه ی پشتیبان و هسته را حفظ می کند. در طول مقاله چنین ترکیب محدبی را با بازه نشان می دهیم. ایده تقریب ذوزنقه ای اعداد فازی بر اساس حفظ ***P–SC*** بازه آنها، این مطلب را خاطر نشان میکند که تقریب حاصل شده، گسترش آن تقریب هایی است که فقط بازه پشتیبان یا فقط بازه هسته را حفظ می کنند. بقیه این مقاله به شرح زیر تنظیم شده است. دربخش ۲ برخی از تعاریف اساسی در خصوص اعداد فازی را یادآوری می کنیم. تقریب پایای ***P–SC***عدد فازی در بخش ۳ پیشنهاد شده است. سپس برخی از ویژگیهای منطقی را در بخش ۴ مورد بحث قرار می دهیم. در بخش ۵ عملکرد تقریب پیشنهادی را از طریق بکارگیری در مثال های مختلف نشان می دهیم و نتیجه گیری در بخش ۶ انجام شده است.

۲- اعداد فازی

تعریف۲-۱-[۱۱] هسته یک مجموعه فازی A در فضای X، مجموعه ای از تمامx هایی است که$\mu_A(x)$ آن ها برابر یک باشد به عبارت دیگر،

$$\text{core}(A) = \{x \epsilon X |\ \mu_A(x) = ۱\}.$$

تعریف۲-۲-[۱۱] پشتیبان یک مجموعه فازی A در فضای X، یک مجموعه غیر فازی است که شامل تمام عضوهایی با تابع عضویت غیر صفر می‌باشد به عبارت دیگر،

$$\text{supp}(A) = \{x \epsilon X |\ \mu_A(x) > ۰\}.$$

اگر پشتیبان یک مجموعه فازی تهی باشد، آن را یک مجموعه فازی تهی می نامند. و اگر پشتیبان آن یک نقطه واحد در مجموعه مرجع X باشد، آن را یک مجموعه فازی

تکین می گویند.

تعریف۲-۳-[۱۱] ارتفاع یک مجموعه فازی، بزرگ ترین مقدار یک تابع عضویت است. اگر ارتفاع یک مجموعه فازی برابر با یک باشد، در آن صورت آن را یک مجموعه فازی نرمال می نامند.

تعریف۲-۴-[۱۱] یک مجموعه فازیA از مجموعه مرجع X محدب است، اگر و فقط اگر برای هر $x_۱,\ x_۲ \in X$ و $۰ \leq \lambda \leq ۱$ داشته باشیم،

$$\mu_A\left(\lambda x_۱ + (۱-\lambda)\, x_۲\right) \geq min\left(\mu_A\left(x_۱\right), \mu_A\left(x_۲\right)\right).$$

تعریف۲-۵-[۱۱] برش آلفای یک عدد فازی A، یک مجموعه غیرفازی A_α است که شامل تمامی عضوهایX می‌باشد که درجه عضویت بزرگ‌تر یا مساوی α داشته باشند، به‌عبارت‌دیگر،

$$A_\alpha = \{x\epsilon X | \mu_A(x) \geq \alpha\}\ ,\quad ۰ < \alpha \leq ۱.$$

در صورتی که A_α یک بازه بسته غیرتهی کران دار درX باشد آن گاه آن را میتوان به صورت $A_\alpha = \ [A_L(\alpha)\ ,\ A_U(\alpha)]$ نشان داد که$A_L(\alpha)\ ,\ A_U(\alpha)$ به ترتیب، پایین ترین و بالاترین مرزهای بازه بسته هستند. به تعبیری دیگر،

$$\begin{cases} A_L(\alpha) = inf\left\{x\epsilon X | \mu_A(x) \geq \alpha\right\}, \\ A_U(\alpha) = sup\left\{x\epsilon X | \mu_A(x) \geq \alpha\right\}. \end{cases}$$

واضح است که،

$$A_۰ = \ [A_L(۰)\ ,\ A_U(۰)] = \text{پشتیبان}(A)$$

$$A_۱ = \ [A_L(۱)\ ,\ A_U(۱)] = \text{هسته}(A).$$

بنابراین بازه های پشتیبان و هسته یک عدد فازی به ترتیب مجموعه های

صفر-برش و ۱- برش آن است.

تعریف۲-۶-[۱۱] فرض کنید A یک زیر مجموعه فازی روی $X = R$ با تابع عضویت $\mu_A : X \to [۰,۱]$ باشد. آنگاه A یک عدد فازی نامید می شود اگر (الف) نرمال باشد، (ب) محدب باشد، (ج) دارای یک پشتیبان کران دار باشد و (د) همهα-برش‌های آن درR بازه های بسته باشند.

در کل مقاله، مجموعه تمام اعداد فازی را با $F\left(R\right)$ نشان می دهیم.

می دانیم برای هر عدد فازیA چهار عدد a,b,c,d جزو اعداد حقیقی و دو تابع $l_A, r_A : R \to [۰,۱]$ وجود دارد که l_A غیرنزولی و r_A غیرصعودی است به گونه ای که تابع عضویت μ_A را می توان به صورت زیر نشان داد،

$$\mu_A\left(x\right) = \begin{cases} l_A\left(x\right) & a \le x \le b, \\ ۱ & b \le x \le c, \\ r_A\left(x\right) & c \le x \le d, \\ ۰ & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

که در آن دو تابع l_A و r_A به ترتیب سمت چپ و سمت راست عدد فازی A نامیده می شوند. از این رو عدد فازی A به صورت پارامتری به صورت $A = (a,b,c,d)_{l_A,r_A}$ نشان داده می شود.

در اینجا l_A و r_A خطی هستند و داریم،

$$\mu_A\left(x\right) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a} & a \le x \le b, \\ ۱ & b \le x \le c, \\ \frac{d-x}{d-c} & c \le x \le d, \\ ۰ & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

A عدد فازی ذوزنقه ای گفته می شود و بطور خلاصه به صورت $A = (a,b,c,d)$ نشان می دهیم.

ما مجموعه ی تمام اعداد فازی ذوزنقه ای را با $F^T\left(R\right)$ نمایش می دهیم.

تعریف۲-۷- ترکیبی محدب از بازه های پشتیبان و هسته یک عدد فازی به صورت زیر تعریف می شود،

$$p - SC\left(A\right) = \ p\left[A_L\left(۰\right)\ ,\ A_U\left(۰\right)\right] + q\left[A_L\left(۱\right)\ ,\ A_U\left(۱\right)\right],$$

یا

$$p-SC\left(A\right)=\ \left[pA_L\left(\circ\right)+q\ A_L\left(\text{۱}\right),\ p\ A_U\left(\circ\right)+q\ A_U\left(\text{۱}\right)\right],$$

که $\circ \leq p,q \leq \text{۱}$ و $p+q=\text{۱}$ هستند.

بدیهی است که بازه $P-SC\ \ (A)$ زمانی که $p=\text{۱}$ است تبدیل به پشتیبان A و زمانی که $p=\circ$ است تبدیل به هسته A می شود.

اگرچه تئوری مجمو عه های فازی این اجازه را به ما می دهد تا از عدم دقت و عدم قطعیت مدل سازی کنیم، اما گاهی مجبور هستیم برای کاهش پیچیدگی محاسبات تا حد امکان، پارامترهای فازی را ساده کنیم. ساده ترین و پرکاربردترین عدد فازی، عدد فازی ذوزنقه ای است. با توجه به این واقعیت، تمرکز ما بر روی مساله یافتن یک عملگر تقریب ذوزنقه ای به نزدیک ترین عدد فازی داده شده با حفظ بازه ***P–SC*** با توجه به متریک ارائه شده توسط گزگوزسکی[۱۲] خواهد بود.

۳- تقریب پایای $\mathbf{p-SC}$

در این بخش ما برآنیم تا عملگر پایای ***P–SC***، $T:F\left(R\right)\ \ \rightarrow F^T\left(R\right)$ را بیابیم که اعداد فازی را به خانواده ای از اعداد فازی ذوزنقه ای شکل تبدیل می کند. فرض کنید A و B دو عدد فازی دلخواه باشند که به ترتیب مجموعه های α-برش آنها $A_\alpha=\ \left[A_L\left(\alpha\right)\ ,\ A_U\left(\alpha\right)\right]$ و $B_\alpha=\ \left[B_L\left(\alpha\right)\ ,\ B_U\left(\alpha\right)\right]$ هستند. فاصله بین A و B به صورت زیر تعریف می شود[۱۲]،

$$d\left(A,B\right)=\sqrt{\int_\circ^\text{۱}\left(A_L\left(\alpha\right)-B_L\left(\alpha\right)\right)^\text{۲}d\alpha+\int_\circ^\text{۱}\left(A_U\left(\alpha\right)-B_U\left(\alpha\right)\right)^\text{۲}d\alpha}$$

در اینجا قصد داریم با توجه به عدد فازی A یک عملگر تقریب ذوزنقه ای $T\left(A\right)\in F^T\left(R\right)$ بیابیم که،

$$d\left(A,T\left(A\right)\right)=\sqrt{\int_\circ^\text{۱}\left(A_L\left(\alpha\right)-T_L\left(\alpha\right)\right)^\text{۲}d\alpha+\int_\circ^\text{۱}\left(A_U\left(\alpha\right)-T_U\left(\alpha\right)\right)^\text{۲}d\alpha} \qquad (\text{۱})$$

حداقل باشد و بعلاوه دارای بازه P–SC برابر با عدد فازی A باشد یعنی،

$$p-SC\left(T\left(A\right)\right)=p-SC\left(A\right). \qquad (\text{۲})$$

توجه داشته باشید که هر عدد فازی ذوزنقه ای را می توان با چهار عدد حقیقی

$t_۱ \geq t_۲ \geq t_۳ \geq t_۴$ که مرزهای پشتیبان و هسته اند توصیف کرد. بنابراین با توجه به

$$T\left(A\right) = \left(t_۱, t_۲, t_۳, t_۴\right)$$

و

$$\left[T_L\left(\alpha\right)\ ,\ T_U\left(\alpha\right)\right] = \ \left[t_۱ + \left(t_۲ - t_۱\right)\alpha\ ,\ t_۴ - \left(t_۴ - t_۳\right)\alpha\right]$$

فاصله تعریف شده در(۱) و تساوی (۲) داریم،

$$d\left(A, T\left(A\right)\right) = \sqrt{\int_{\circ}^{۱} \left(A_L\left(\alpha\right) - t_۱ - \left(t_۲ - t_۱\right)\alpha\right)^۲ d\alpha + \int_{\circ}^{۱} \left(A_U\left(\alpha\right) - t_۴ + \left(t_۴ - t_۳\right)\alpha\right)^۲ d\alpha},$$

و

$$\left[pt_۱ + qt_۲, pt_۴ + qt_۳\right] = \left[pA_L\left(\circ\right) + q\ A_L\left(۱\right),\ p\ A_U\left(\circ\right) + q\ A_U\left(۱\right)\right],$$

که $\circ \leq p, q \leq ۱$ و $p + q = ۱$ هستند.

اکنون در موقعیتی هستیم که می توانیم یک عدد فازی ذوزنقه ای $T\left(A\right)$ را پیدا کنیم که نه تنها نزدیک به عدد فازی داده شده A است، بلکه باعث حفظ بازه ***P–SC*** از A می شود. می دانیم که برای به حداقل رساندن $d\left(A, T\left(A\right)\right)$ می توان حداقل سازی $d^۲\left(A, T\left(A\right)\right)$ را در نظر گرفت.

به منظور دستیابی به عملگر پایای ***P–SC***، $T : F\left(R\right) \rightarrow F^T\left(R\right)$ باید مساله بهینه سازی زیر را برای $t = \left(t_۱, t_۲, t_۳, t_۴\right) \in R^۴$ حل کنیم،

$$\begin{aligned} Min \quad f\left(t\right) = & \int_{\circ}^{۱} \left(A_L\left(\alpha\right) - t_۱ - \left(t_۲ - t_۱\right)\alpha\right)^۲ d\alpha \qquad (P) \\ & + \int_{\circ}^{۱} \left(A_U\left(\alpha\right) - t_۴ + \left(t_۴ - t_۳\right)\alpha\right)^۲ d\alpha \\ s.t. : & \\ & h\left(t\right) = \left[p\left(t_۱ - A_L\left(\circ\right)\right) + q\left(t_۲ - A_L\left(۱\right)\right)\right. \\ & \qquad \left.,\ p\left(t_۴ - A_U\left(\circ\right)\right) + q\left(t_۳ - A_U(۱)\right)\right] = \circ \\ & g(t) = t_۲ - t_۳ \leq \circ \end{aligned}$$

ما (P) را با استفاده از قضیه کاروش–کوهن–توکر(**KKT**) [۷] حل میکنیم که بیان

می کند t^*برای (P) حداقل کننده است، اگر ضریب لاگرانژ λوجود داشته باشد به گونه ای که،

$$Df\left(t^*\right)+\mathrm{Dh}\left(t^*\right)\lambda+\mu Dg\left(t^*\right)=0 \qquad (۳)$$

$$\mu g\left(t^*\right)=0\ ,\ \mu\geq 0$$

برای حل (۳) با محاسبه Df ، Dh وDg درt^* شروع می کنیم.

$$\begin{aligned}
Df\left(t^*\right)&=\left[\frac{\partial f}{\partial t_1},\frac{\partial f}{\partial t_2},\frac{\partial f}{\partial t_3},\frac{\partial f}{\partial t_4}\right]\\
&=\left[\frac{2}{3}t_1+\frac{1}{3}t_2+2\int_0^1 \alpha\mathrm{A}_L\left(\alpha\right)d\alpha-2\int_0^1 A_L\left(\alpha\right)d\alpha\right.\\
&\quad,\frac{1}{3}t_1+\frac{2}{3}t_2-2\int_0^1 \alpha\mathrm{A}_L\left(\alpha\right)d\alpha,\frac{2}{3}t_3+\frac{1}{3}t_4-2\int_0^1 \alpha\mathrm{A}_U\left(\alpha\right)d\alpha\\
&\quad\left.,\frac{1}{3}t_3+\frac{2}{3}t_4+2\int_0^1 \alpha\mathrm{A}_U\left(\alpha\right)d\alpha-2\int_0^1 A_U\left(\alpha\right)d\alpha\right],
\end{aligned}$$

$$\mathrm{Dh}\left(t^*\right)=\begin{bmatrix}\frac{\partial h_1}{\partial t_1}&\frac{\partial h_1}{\partial t_2}&\frac{\partial h_1}{\partial t_3}&\frac{\partial h_1}{\partial t_4}\\ \frac{\partial h_2}{\partial t_1}&\frac{\partial h_2}{\partial t_2}&\frac{\partial h_2}{\partial t_3}&\frac{\partial h_2}{\partial t_4}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}p&q&0&0\\0&0&q&p\end{bmatrix},$$

$$\mathrm{Dg}\left(t^*\right)=\begin{bmatrix}\frac{\partial g}{\partial t_1}&\frac{\partial g}{\partial t_2}&\frac{\partial g}{\partial t_3}&\frac{\partial g}{\partial t_4}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&-1&0\end{bmatrix}.$$

بنابراین، شرایط کاروش-کوهن-توکر را می توان دوباره به این صورت نوشت،

$$\frac{2}{3}t_1+\frac{1}{3}t_2+2\int_0^1 \alpha\mathrm{A}_L\left(\alpha\right)d\alpha-2\int_0^1 A_L\left(\alpha\right)d\alpha+p\lambda_1=0,$$

$$\frac{1}{3}t_1+\frac{2}{3}t_2-2\int_0^1 \alpha\mathrm{A}_L\left(\alpha\right)d\alpha+q\lambda_1+\mu=0\ ,$$

$$\frac{2}{3}t_3+\frac{1}{3}t_4-2\int_0^1 \alpha\mathrm{A}_U\left(\alpha\right)d\alpha+q\lambda_2-\mu=0\ ,$$

$$\frac{1}{3}t_3+\frac{2}{3}t_4+2\int_0^1 \alpha\mathrm{A}_U\left(\alpha\right)d\alpha-2\int_0^1 A_U\left(\alpha\right)d\alpha+p\lambda_2=0,$$

$$p\left(t_{1}-A_{L}\left(0\right)\right)+q\left(t_{2}-A_{L}\left(1\right)\right)=0,$$

$$p\left(t_{4}-A_{U}\left(0\right)\right)+q\left(t_{3}-A_{U}\left(1\right)\right)=0,$$

$$\mu\left(t_{2}-t_{3}\right)=0.$$

در اینجا به معرفی چند نماد می پردازیم که در ادامه تجزیه و تحلیل ارائه شده در مقاله ما را تسهیل می کند.

$$K_{1}\left(A\right)=-2\int_{0}^{1}\alpha A_{L}\left(\alpha\right)d\alpha+2\int_{0}^{1}A_{L}\left(\alpha\right)d\alpha, \tag{4}$$

$$K_{2}\left(A\right)=2\int_{0}^{1}A_{L}\left(\alpha\right)d\alpha, \tag{5}$$

$$K_{3}\left(A\right)=2\int_{0}^{1}\alpha A_{U}\left(\alpha\right)d\alpha, \tag{6}$$

$$K_{4}\left(A\right)=-2\int_{0}^{1}\alpha A_{U}\left(\alpha\right)d\alpha+2\int_{0}^{1}A_{U}\left(\alpha\right)d\alpha, \tag{7}$$

$$K_{5}\left(A\right)=pA_{L}\left(0\right)+qA_{L}\left(1\right), \tag{8}$$

$$K_{6}\left(A\right)=pA_{U}\left(0\right)+qA_{U}\left(1\right). \tag{9}$$

اکنون می خواهیم نقاطی که شرایط(KKT) را برآورده می کند، بیابیم. برای این منظور، دو حالت را در نظر می گیریم:

حالت اول: فرض می کنیم $\mu > 0$ باشد که نتیجه می شود $t_{2}-t_{3}=0$. این فرض باعث می شود که شرایط (KKT) به صورت زیر درآید،

$$\frac{2}{3}t_{1}+\frac{1}{3}t_{2}+p\lambda_{1}=K_{1}\left(A\right),$$

$$\frac{1}{3}t_{1}+\frac{2}{3}t_{2}+q\lambda_{1}+\mu=K_{2}\left(A\right),$$

$$\frac{2}{3}t_{3}+\frac{1}{3}t_{4}+q\lambda_{2}-\mu=K_{3}\left(A\right),$$

$$\frac{1}{3}t_{3}+\frac{2}{3}t_{4}+p\lambda_{2}=K_{4}\left(A\right), \tag{KKTC1}$$

$$pt_1 + qt_2 = K_5(A),$$

$$pt_4 + qt_3 = K_6(A).$$

حل سیستم خطی معادلات $(KKTC1)$به جز برای $p = 0$ به صورت زیر بدست می آید:

$$t_1(A) = \frac{3}{4}\frac{q^2}{Q}K_1(A)\,\frac{3}{4}\frac{\mathrm{pq}}{Q}K_2(A) - \frac{3}{4}\frac{\mathrm{pq}}{Q}K_3(A) + \frac{3}{4}\frac{q^2}{Q}K_4(A) \qquad (10)$$
$$+ \frac{1}{4}\frac{1}{p}\frac{2q^2 - 3pq + 4p^2}{Q}K_5(A) - \frac{1}{4}\frac{p}{q}\frac{2q-p}{Q}K_6(A),$$

$$t_2(A) = t_3(A) = -\frac{3}{4}\frac{\mathrm{pq}}{Q}K_1(A) + \frac{3}{4}\frac{p^2}{Q}K_2(A) + \frac{3}{4}\frac{p^2}{Q}K_3(A) \qquad (11)$$
$$- \frac{3}{4}\frac{\mathrm{pq}}{Q}K_4(A) + \frac{1}{4}\frac{2q-p}{Q}K_5(A) + \frac{1}{4}\frac{2q-p}{Q}K_6(A),$$

$$t_4(A) = \frac{3}{4}\frac{q^2}{Q}K_1(A) - \frac{3}{4}\frac{\mathrm{pq}}{Q}K_2(A) - \frac{3}{4}\frac{\mathrm{pq}}{Q}K_3(A) + \frac{3}{4}\frac{q^2}{Q}K_4(A) \qquad (12)$$
$$- \frac{1}{4}\frac{q}{p}\frac{2q-p}{Q}K_5(A) + \frac{1}{4}\frac{1}{p}\frac{2q^2 - 3pq + 4p^2}{Q}K_6(A),$$

$$\lambda_1(A) = \frac{1}{4}\frac{1}{p}\frac{2q^2 - 3pq + 4p^2}{Q}K_1(A) + \frac{1}{4}\frac{2q-p}{Q}K_2(A) + \frac{1}{4}\frac{2q-p}{Q}K_3(A)$$
$$- \frac{1}{4}\frac{q}{p}\frac{2q-p}{Q}K_4(A) - \frac{1}{12}\frac{1}{p^2}\frac{4q^2 - 4pq + 7p^2}{Q}K_5(A)$$
$$+ \frac{1}{12}\frac{1}{p^2}\frac{4q^2 - 4pq + p^2}{Q}K_6(A),$$

$$\lambda_2(A) = -\frac{1}{4}\frac{q}{p}\frac{2q-p}{Q}K_1(A) + \frac{1}{4}\frac{2q-p}{Q}K_2(A) + \frac{1}{4}\frac{2q-p}{Q}K_3(A)$$
$$+ \frac{1}{4}\frac{1}{p}\frac{2q^2 - 3pq + 4p^2}{Q}K_4(A) + \frac{1}{12}\frac{1}{p^2}\frac{4q^2 - 4pq + p^2}{Q}K_5(A)$$
$$- \frac{1}{12}\frac{1}{p^2}\frac{4q^2 - 4pq + 7p^2}{Q}K_6(A),$$

$$\mu(A) = -\frac{1}{2}\frac{q}{p}K_1(A) + \frac{1}{2}K_2(A) - \frac{1}{2}K_3(A) + \frac{1}{2}\frac{q}{p}K_4(A) \qquad (13)$$
$$+ \frac{1}{6}\frac{2q-p}{p^2}K_5(A) - \frac{1}{6}\frac{2q-p}{p^2}K_6(A),$$

که $Q = p^2 - pq + q^2$ است.

نکته۳-۱- با در نظر گرفتن موارد زیر، به راحتی می توان تایید کرد که $Q > 0$ است، $p^3 + q^3 = (p+q)\left(p^2 - pq + q^2\right)$ که $0 \le p, q \le 1$ و $p + q = 1$ باشند.

در (۱۳) مشاهده می شود $\mu > ۰$ است اگر و فقط اگر،

$$-\frac{۱}{۲}\frac{q}{p}K_۱(A)+\frac{۱}{۲}K_۲(A)-\frac{۱}{۲}K_۳(A)+\frac{۱}{۲}\frac{q}{p}K_۴(A)>\frac{۱}{۶}\frac{۲q-p}{p^۲}\left(K_۵(A)-K_۶(A)\right),$$

و با بازگشت به تعریف K_i که در $(۱۰)-(۱۲)$ ارائه شده است، خواهیم داشت،

$$\int_۰^۱(q-\alpha)\left(A_U(\alpha)-A_L(\alpha)\right)d\alpha>\frac{۱}{۶}\frac{۲q-p}{p^۲}\left(p\left|\mathrm{supp}(A)\right|+q\left|\mathrm{core}(A)\right|\right).\ (۱۴)$$

به طور خلاصه، اگر نابرابری (۱۴) برآورده شود، $T(A)=(t_۱(A),t_۲(A),t_۳(A),t_۴(A))$ همان تعریف شده در$(۱۰)-(۱۲)$ است.

حالت دوم: $\mu=۰$ را در نظر می گیریم این فرض باعث می شود که شرایط (KKT) به صورت زیر درآید،

$$\begin{aligned}
&\frac{۲}{۳}t_۱+\frac{۱}{۳}t_۲+p\lambda_۱=K_۱(A),\\
&\frac{۱}{۳}t_۱+\frac{۲}{۳}t_۲+q\lambda_۱+\mu=K_۲(A),\\
&\frac{۲}{۳}t_۳+\frac{۱}{۳}t_۴+q\lambda_۲=K_۳(A),\qquad (KKTC۲)\\
&\frac{۱}{۳}t_۳+\frac{۲}{۳}t_۴+p\lambda_۲=K_۴(A),\\
&pt_۱+qt_۲=K_۵(A),\\
&pt_۴+qt_۳=K_۶(A).
\end{aligned}$$

حل سیستم خطی معادلات $(KKTC2)$ به صورت زیر بدست می آید،

$$t_1(A) = \frac{3}{2}\frac{q^2}{Q}K_1(A) - \frac{3}{2}\frac{\mathrm{pq}}{Q}K_2(A) - \frac{1}{2}\frac{-2q+p}{Q}K_5(A), \tag{15}$$

$$t_2(A) = -\frac{3}{2}\frac{\mathrm{pq}}{Q}K_1(A) + \frac{3}{2}\frac{p^2}{Q}K_2(A) + \frac{1}{2}\frac{-p+2q}{Q}K_5(A), \tag{16}$$

$$t_3(A) = \frac{3}{2}\frac{p^2}{Q}K_3(A) - \frac{3}{2}\frac{\mathrm{pq}}{Q}K_4(A) - \frac{1}{2}\frac{-p+2q}{Q}K_6(A), \tag{17}$$

$$t_4(A) = -\frac{3}{2}\frac{\mathrm{pq}}{Q}K_3(A) + \frac{3}{2}\frac{q^2}{Q}K_4(A) - \frac{1}{2}\frac{-2p+q}{Q}K_6(A), \tag{18}$$

$$\lambda_1(A) = -\frac{1}{2}\frac{-2p+q}{Q}K_1(A) + \frac{1}{2}\frac{-p+2q}{Q}K_2(A) - \frac{1}{2}\frac{1}{Q}K_5(A),$$

$$\lambda_2(A) = \frac{1}{2}\frac{-p+2q}{Q}K_3(A) - \frac{1}{2}\frac{-2p+q}{Q}K_4(A) - \frac{1}{2}\frac{1}{Q}K_6(A),$$

در اینجا لازم است اشاره شود که اگر $\mathrm{p} = 0$ (و بنابراین $\mathrm{q} = 1$) باشد، آنگاه جواب $t^* = (t_1, t_2, t_3, t_4)$ که از (۱۵) – (۱۸) بدست آمده است با جواب عباسبندی و حجری[۴] با تابع وزن دار $f(\alpha) = 1$ مطابقت دارد.

ما ادعا میکنیم که نقطه ثابت $t^* = (t_1, t_2, t_3, t_4)$ که از (۱۵) – (۱۸) بدست آمده است مینیمم مساله (P) است که توسط لم زیر تایید می شود.

لم۳-۱- فرض کنید $T(A) = (t_1, t_2, t_3, t_4)$ عملگر تقریب پایای $p - SC$ باشد که $t_i\ (i = 1, \dots, 4)$ به ترتیب بدست آمده از (۱۰) – (۱۲) برای حالت اول و (۱۵) – (۱۸) برای حالت دوم باشد. آنگاه $T(A)$ مینیمم مساله (P) است.

اثبات: با بررسی مجدد مساله (P) و با استفاده از تابع لاگرانژ

$$L(t, \lambda, \mu) = f(t) + \lambda h(t) + \mu g(t)$$

مشاهده می شود ماتریس هسین به صورت زیر مشتق شده است،

$$H\left(= D^2 L\right) = \begin{bmatrix} H_1 & 0 \\ 0 & H_1 \end{bmatrix} \text{که} H_1 = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

علاوه بر این، ماتریس هسینH در نقطه $(t_۱, t_۲, t_۳, t_۴)$ مثبت است. از این رو شرط کافی مرتبه دوم برقرار است و $T\left(A\right)$ مساله (P) را به حداقل می رساند.

۴- ویژگی ها در این بخش، برای ارزیابی روش تقریب پیشنهادی، برخی معیارهای شناخته شده را بررسی کرده و نشان می دهیم که عملگر تقریب ما دارای برخی از ویژگی های مورد نظر ذکر شده در[۱۵] است.

قبل از ادامه، لم زیر را بیان می کنیم تا اثبات قضایای بعدی ساده تر شود.

لم۴-۱- فرض کنید $A\in F\left(R\right)$، یک عدد فازی است و $K_i\left(A\right)$ $(i=۱,۲,\ldots,۶)$ **معرفی** شده در (۱۵) – (۲۰) باشد آنگاه برای $i=۱,۲,\ldots,۶$ داریم،

$$K_i\left(A+z\right)=K_i\left(A\right)+z,\qquad \forall\ z\ \in R, \tag{۱۹}$$

$$K_i\left(\mathrm{kA}\right)=\mathrm{kK}_i\left(A\right),\qquad \forall\ k\ \in R, \tag{۲۰}$$

اثبات: اثبات از تجزیه و تحلیل مستقیم از انتگرال بدست میآید. برای هر $A\in F\left(R\right)$ و $z\in R$ ، مجموعه های α-*برش* $(A+z)_\alpha$ و $(\mathrm{kA})_\alpha$ *به ترتیب* $[A_L\left(\alpha\right)+z\ ,\ A_U\left(\alpha\right)+z]$ و$[\mathrm{kA}_L\left(\alpha\right)\ ,\ \mathrm{kA}_U\left(\alpha\right)]$ هستند. *آنگاه با توجه به* (۴) *داریم،*

$$\begin{aligned}K_۱\left(A+z\right)&=-۲\int_۰^۱\alpha\left(A_L\left(\alpha\right)+z\ \right)d\alpha+۲\int_۰^۱\left(A_L\left(\alpha\right)+z\ \right)d\alpha\\&=K_۱\left(A\right)--۲\int_۰^۱\alpha z d\alpha+۲\int_۰^۱ zd\alpha=K_۱\left(A\right)+z,\quad\forall\ z\ \in R,\\K_۱\left(\mathrm{kA}\right)&=-۲\int_۰^۱\alpha\left(\mathrm{kA}_L\left(\alpha\right)\ \right)d\alpha+۲\int_۰^۱\left(\mathrm{kA}_L\left(\alpha\right)\ \right)d\alpha\\&=\mathrm{kK}_۱\left(A\right),\forall\ k\ \in R,\end{aligned}$$

برای K_i $(i=۲,\ldots,۶)$ نیز محاسبات بطور مشابه انجام می شود و می توان خصوصیات نتایج (۱۹) و (۲۰) را تایید کرد. عملگر تقریب $T\left(A\right)$ در حالت اول مثلثی

و در حالت دوم ذوزنقه ای است. بنابراین، معیار همانی باید در قضیه بعدی ارزیابی شود.

قضیه۴-۱- (ویژگی همانی) اگر $A \in F^T(R)$ یک عدد فازی مثلثی در حالت اول باشد (یا یک عدد فازی ذوزنقه ای در حالت دوم)، آنگاه $T(A) = A$ است.

اثبات: حالت اول. فرض کنید $A = (a_1, a_2, a_3)$ یک عدد فازی مثلثی باشد. از این رو، $A_L(\alpha) = a_1 + (a_2 - a_1)\alpha$ و $A_U(\alpha) = a_3 - (a_3 - a_2)\alpha$ هستند. از (۴) – (۹) و بعد از چند محاسبه داریم،

$$\begin{aligned}
K_1(A) &= \frac{2}{3}a_1 + \frac{1}{3}a_2, \\
K_2(A) &= \frac{1}{3}a_1 + \frac{2}{3}a_2, \\
K_3(A) &= \frac{2}{3}a_2 + \frac{1}{3}a_3, \\
K_4(A) &= \frac{1}{3}a_2 + \frac{2}{3}a_3, \\
K_6(A) &= pa_3 + qa_2.
\end{aligned}$$

بنابراین، فرم (۱۰) را به صورت زیر بدست می آوریم،

$$\begin{aligned}
t_1(A) &= \frac{3}{4}\frac{q^2}{Q}\left(\frac{2}{3}a_1 + \frac{1}{3}a_2\right) - \frac{3}{4}\frac{\mathrm{pq}}{Q}\left(\frac{1}{3}a_1 + \frac{2}{3}a_2\right) - \frac{3}{4}\frac{\mathrm{pq}}{Q}\left(\frac{2}{3}a_2 + \frac{1}{3}a_3\right) \\
&+ \frac{3}{4}\frac{q^2}{Q}\left(\frac{1}{3}a_2 + \frac{2}{3}a_3\right) + \frac{1}{4}\frac{1}{p}\frac{2q^2 - 3pq + 4p^2}{Q}(pa_1 + qa_2) - \frac{1}{4}\frac{p}{q}\frac{2q - p}{Q}(pa_3 + qa_2), \\
&= \left(\frac{3}{4}\frac{q^2}{Q}\frac{2}{3} - \frac{3}{4}\frac{\mathrm{pq}}{Q}\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\frac{1}{p}\frac{2q^2 - 3pq + 4p^2}{Q}p\right)a_1 \\
&+ \left(\frac{3}{4}\frac{q^2}{Q}\frac{1}{3} - \frac{3}{4}\frac{\mathrm{pq}}{Q}\frac{2}{3} - \frac{3}{4}\frac{\mathrm{pq}}{Q}\frac{2}{3} + \frac{3}{4}\frac{q^2}{Q}\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\frac{1}{p}\frac{2q^2 - 3pq + 4p^2}{Q}q - \frac{1}{4}\frac{q}{p}\frac{2q - p}{Q}q\right)a_2 \\
&+ \left(-\frac{3}{4}\frac{\mathrm{pq}}{Q}\frac{1}{3} + \frac{3}{4}\frac{q^2}{Q}\frac{2}{3} - \frac{1}{4}\frac{q}{p}\frac{2q - p}{Q}p\right)a_3 \\
&= \frac{1}{4Q}\left(4\left(q^2 - pq + p^2\right)\right)a_1 + \frac{q}{4Q}\left(q - 2p - 2p + q + \frac{1}{p}\left(2q^2 - 3pq + 4p^2\right) - \frac{q}{p}(2q - p)\right)a_2 \\
&+ \frac{q}{4Q}\left(-p + 2q - \frac{1}{p}(2q - p)\right)a_3 \\
&= a_1.
\end{aligned}$$

با استفاده از روش مشابه خواهیم داشت،

$$t_۲\left(A\right)=a_۲,\qquad t_۳\left(A\right)=a_۳.$$

بنابراین $T\left(A\right)=\left(a_۱,a_۲,a_۳\right)=A$ است.

حالت دوم. فرض کنید $A=\left(a_۱,a_۲,a_۳,a_۴\right)$ یک عدد فازی ذوزنقه ای باشد. از این رو، $A_L\left(\alpha\right)=a_۱+\left(a_۲-a_۱\right)\alpha$ و $A_U\left(\alpha\right)=a_۴-\left(a_۴-a_۳\right)\alpha$ هستند. از (۴) − (۹) و بعد از چند محاسبه داریم،

$$\begin{aligned}
K_۱\left(A\right)=&\frac{۲}{۳}a_۱+\frac{۱}{۳}a_۲,\\
K_۲\left(A\right)=&\frac{۱}{۳}a_۱+\frac{۲}{۳}a_۲,\\
K_۳\left(A\right)=&\frac{۲}{۳}a_۳+\frac{۱}{۳}a_۴,\\
K_۴\left(A\right)=&\frac{۱}{۳}a_۳+\frac{۲}{۳}a_۴,\\
K_۵\left(A\right)=&pa_۱+qa_۲,\\
K_۶\left(A\right)=&pa_۳+qa_۲.
\end{aligned}$$

بنابراین، فرم (۱۵) را به صورت زیر بدست می آوریم،

$$\begin{aligned}
t_۱\left(A\right)&=\frac{۳}{۴}\frac{q^۲}{Q}\left(\frac{۲}{۳}a_۱+\frac{۱}{۳}a_۲\right)-\frac{۳}{۴}\frac{\mathrm{pq}}{Q}\left(\frac{۱}{۳}a_۱+\frac{۲}{۳}a_۲\right)-\frac{۱}{۲}\frac{-۲p-q}{Q}\left(pa_۱+qa_۲\right)\\
&=\left(\frac{q^۲}{Q}-\frac{۱}{۲}\frac{\mathrm{pq}}{Q}-\frac{۱}{۲}\frac{-۲p-q}{Q}p\right)a_۱+\left(\frac{۱}{۲}\frac{q^۲}{Q}-\frac{\mathrm{pq}}{Q}-\frac{۱}{۲}\frac{-۲p+q}{Q}q\right)a_۲\\
&=\left(\frac{۲q^۲-pq+۲p^۲-pq}{۲Q}\right)a_۱+\left(\frac{q^۲-۲pq+۲pq-q^۲}{۲Q}\right)a_۲=a_۱
\end{aligned}$$

با استفاده از روش مشابه خواهیم داشت،

$$t_۲\left(A\right)=a_۲,\qquad t_۳\left(A\right)=a_۳\ ,\qquad t_۴\left(A\right)=a_۴$$

بنابراین $A = T\left(A\right) = \left(a_۱, a_۲, a_۳, a_۴\right)$ است.

قضیه۴-۲-(ویژگی پایایی پشتیبان (یا هسته)) T یک عملگر تقریب پایای *P–SC*است که بازه پشتیبان (یا هسته) را ثابت نگه می دارد.

اثبات: اثبات بسیار واضح است، زیرا اگر $A = \left(\hat{a}_۱, \hat{a}_۲, \hat{a}_۳, \hat{a}_۴\right)_{l_A r_A}$ یک عدد فازی دلخواه باشد،

(i) فرض میکنیم $p = ۰$ (و بنابراین$q = ۱$) باشد، آنگاه $T\left(A\right) = \left(t_۱, \hat{a}_۲, \hat{a}_۳, t_۴\right)$ است. این نشان می دهد که،

$$\text{core}\left(T\left(A\right)\right) = T\left(A\right)_۰ = \left[\hat{a}_۲, \hat{a}_۳\right] = A_۰ = core\left(A\right),$$

(ii) فرض می کنیم $p = ۱$ (و بنابراین$q = ۰$) باشد، آنگاه$T\left(A\right) = \left(\hat{a}_۱, t_۲, t_۳, \hat{a}_۴\right)$ است. این نشان می دهد که،

$$\text{supp}\left(T\left(A\right)\right) = T\left(A\right)_۱ = \left[\hat{a}_۱, \hat{a}_۴\right] = A_۱ = supp\left(A\right) \quad .$$

قضیه۴-۳- (ویژگی پایایی انتقال) T یک عملگر تقریب پایای *P–SC* است که در انتقال ثابت میماند. یعنی برای هر $A \in F\left(R\right)$ داریم،

$$T\left(A + z\right) = T\left(A\right) + z, \qquad \forall\, z \in \mathbf{R}.$$

اثبات: از (۱۰) و لم ۴-۱ نتیجه می شود که،

$$\begin{aligned}
t_1(A+z) &= \frac{3}{4}\frac{q^2}{Q}K_1(A+z) - \frac{3}{4}\frac{\mathrm{pq}}{Q}K_2(A+z) - \frac{3}{4}\frac{\mathrm{pq}}{Q}K_3(A+z) + \frac{3}{4}\frac{q^2}{Q}K_4(A+z)\\
&+ \frac{1}{4}\frac{1}{p}\frac{2q^2-3pq+4p^2}{Q}K_5(A+z) - \frac{1}{4}\frac{p}{q}\frac{2q-p}{Q}K_6(A+z),\\
&= \frac{3}{4}\frac{q^2}{Q}\left(K_1(A)+z\right) - \frac{3}{4}\frac{\mathrm{pq}}{Q}\left(K_2(A)+z\right) - \frac{3}{4}\frac{\mathrm{pq}}{Q}\left(K_3(A)+z\right) + \frac{3}{4}\frac{q^2}{Q}\left(K_4(A)+z\right)\\
&+ \frac{1}{4}\frac{1}{p}\frac{2q^2-3pq+4p^2}{Q}\left(K_5(A)+z\right) - \frac{1}{4}\frac{p}{q}\frac{2q-p}{Q}\left(K_6(A)+z\right),\\
&= t_1(A) + \left(\frac{3}{4}\frac{q^2}{Q} - \frac{3}{4}\frac{\mathrm{pq}}{Q} - \frac{3}{4}\frac{\mathrm{pq}}{Q} + \frac{3}{4}\frac{q^2}{Q} + \frac{1}{4}\frac{1}{p}\frac{2q^2-3pq+4p^2}{Q}\frac{1}{4}\frac{p}{q}\frac{2q-p}{Q}\right)z\\
&= t_1(A) + \frac{1}{4Q}\left(6q^2-6pq-2q+4p\right)z\\
&= t_1(A) + \frac{1}{4Q}\left(4q^2-4pq+2q^2-2pq-2q+4p\right)z\\
&= t_1(A) + \frac{1}{4Q}\left(4q^2-4pq+2q(q-1)-2pq+4p\right)z\\
&= t_1(A) + \frac{1}{4Q}\left(4q^2-4pq-2pq-2pq+4p\right)z \text{ که در آن } (p=1-q)\ z\\
&= t_1(A) + \frac{1}{4Q}\left(4q^2-4pq-4p(q-1)\right)z\\
&= t_1(A) + \frac{1}{4Q}\left(4q^2-4pq+4p^2\right)z\\
&= t_1(A) + z.
\end{aligned}$$

در همین راستا، میتوان نشان داد که،

$$t_2(A+z) = t_2(A)+z, \qquad t_3(A+z) = t_3(A)+\mathrm{z}.$$

بنابراین، $T(A+z) = (t_1(A)+z, t_2(A)+z, t_3(A)+z) = T(A)+z$

است. همچنین از (۱۵) و لم۴-۱ خواهیم داشت

$$\begin{aligned}
t_۱(A+z) &= \frac{۳}{۲}\frac{q^۲}{Q}K_۱(A+z) - \frac{۳}{۲}\frac{\mathrm{pq}}{Q}K_۲(A+z) - \frac{۱}{۲}\frac{-۲q+p}{Q}K_۵(A+z), \\
&= \frac{۳}{۲}\frac{q^۲}{Q}(K_۱(A)+z) - \frac{۳}{۲}\frac{\mathrm{pq}}{Q}(K_۲(A)+z) - \frac{۱}{۲}\frac{-۲q+p}{Q}(K_۵(A)+z) \\
&= t_۱(A) + \left(\frac{۳}{۲}\frac{q^۲}{Q} - \frac{۳}{۲}\frac{\mathrm{pq}}{Q} - \frac{۱}{۲}\frac{-۲p-q}{Q}\right)z \\
&= t_۱(A) + \frac{۱}{۲Q}\left(-۳\mathrm{pq} + ۳p^۲ - p + ۲q\right)z \\
&= t_۱(A) + \frac{۱}{۲Q}\left(۲Q - ۲Q - ۳\mathrm{pq} + ۳p^۲ - p + ۲q\right)z \\
&= t_۱(A) + \frac{۱}{۲Q}\left(۲Q + p^۲ - \mathrm{pq} - p + ۲q - ۲q^۲\right)z \\
&= t_۱(A) + \frac{۱}{۲Q}\left(۲Q + p^۲ - \mathrm{pq} - p + ۲q(۱-q)\right)z \\
&= t_۱(A) + \frac{۱}{۲Q}\left(۲Q + p^۲ + \mathrm{pq} - p\right)z \\
&= t_۱(A) + \frac{۱}{۲Q}(۲Q + p(p+q) - p)z \\
&= t_۱(A) + z.
\end{aligned}$$

در همین راستا، می توان نشان داد که،

$$t_۲(A+z) = t_۲(A)+z, \quad t_۳(A+z) = t_۳(A)+z, \quad t_۴(A+z) = t_۴(A)+z$$

بنابراین،

$$(T(A+z) = (t_۱(A)+z, t_۲(A)+z, t_۳(A)+z, t_۴(A)+z) = T(A)+z$$

و اثبات کامل می شود.

قضیه۴-۴- (ویژگی پایایی مقیاس) T یک عملگر تقریب پایای $P\text{–}SC$ است که در آن مقیاس ثابت می ماند. یعنی برای هر $A \in F(R)$ داریم،

$$T(\mathbf{kz}) = kT(A), \qquad \forall\, k \in R - \{۰\}.$$

اثبات: از (۱۰) و لم ۴-۱ نتیجه می شود که،

$$\begin{aligned} t_1(\mathrm{kA}) &= \frac{3}{4}\frac{q^2}{Q}K_1(\mathrm{kA}) - \frac{3}{4}\frac{\mathrm{pq}}{Q}K_2(\mathrm{kA}) - \frac{3}{4}\frac{\mathrm{pq}}{Q}K_3(\mathrm{kA}) + \frac{3}{4}\frac{q^2}{Q}K_4(\mathrm{kA}) \\ &+ \frac{1}{4}\frac{1}{p}\frac{2q^2-3pq+4p^2}{Q}K_5(\mathrm{kA}) - \frac{1}{4}\frac{p}{q}\frac{2q-p}{Q}K_6(\mathrm{kA}) \\ &= \frac{3}{4}\frac{q^2}{Q}(\mathrm{K\,k}_1(A)) - \frac{3}{4}\frac{\mathrm{pq}}{Q}(\mathrm{K\,k}_2(A)) - \frac{3}{4}\frac{\mathrm{pq}}{Q}(\mathrm{K\,k}_3(A)) + \frac{3}{4}\frac{q^2}{Q}(\mathrm{K\,k}_4(A)) \\ &+ \frac{1}{4}\frac{1}{p}\frac{2q^2-3pq+4p^2}{Q}(\mathrm{K\,k}_5(A)) - \frac{1}{4}\frac{p}{q}\frac{2q-p}{Q}(\mathrm{K\,k}_6(A)) \\ &= kt_1(A). \end{aligned}$$

با انجام روش مشابه بالا داریم،

$$t_2(\mathrm{kA}) = \mathrm{kt}_2(A), \qquad t_3(\mathrm{kA}) = kt_3(A).$$

بنابراین،

$$T(\mathrm{kA}) = (kt_1(A),\ \mathrm{kt}_2(A), \mathrm{kt}_3(A)) = kT(A).$$

از (۱۵) و لم ۴-۱ نتیجه می شود که،

$$\begin{aligned} t_1(\mathrm{kA}) &= \frac{3}{2}\frac{q^2}{Q}K_1(\mathrm{kA}) - \frac{3}{2}\frac{\mathrm{pq}}{Q}K_2(\mathrm{kA}) - \frac{1}{2}\frac{-2q+p}{Q}K_5(\mathrm{kA}), \\ &= \frac{3}{2}\frac{q^2}{Q}(\mathrm{k}K_1(A)) - \frac{3}{2}\frac{\mathrm{pq}}{Q}(\mathrm{k}K_2(A)) - \frac{1}{2}\frac{-2q+p}{Q}(\mathrm{k}K_5(A)) \\ &= \mathrm{k}t_1(A). \end{aligned}$$

در همین راستا، می توان نشان داد که،

$$t_2(\mathrm{kA}) = \mathrm{kt}_2(A), \qquad t_3(\mathrm{kA}) = kt_3(A), \quad t_4(\mathrm{kA}) = \mathrm{kt}_4(A).$$

بنابراین،

$$T(\mathrm{kA}) = (kt_۱(A),\ \mathrm{kt}_۲(A), \mathrm{kt}_۳(A), \mathrm{kt}_۴(A)) = kT(A).$$

***نتیجه‌گیری۴-۱-* (ویژگی تقارن)** T یک عملگر تقریب پایای *P-SC*متقارن است. به عبارت دیگر ،

$$T(-A) = -T(A)$$

اثبات: با قرار دادن $k = -۱$ و با توجه به قضیه ۴-۴ اثبات بدیهی است.

۵- مثالهای عددی

در این بخش برای نشان دادن فرایند تقریب خود که در بخش۳ معرفی کردیم، دو مثال عددی ارائه شده توسط یه [۲۴]را، در نظر می گیریم.

مثال۵-۱- برای مقایسه روش ما با روش تقریب وزنی یه [۲۴]و عباسبندی و حجری[۴]، که در آن تابع وزندار $f(\alpha) = \alpha$ در نظر گرفته شده است، در اینجا A را با$\alpha-$ برش

$$A_\alpha = \left[-۱ + \sqrt{\alpha},\ ۱ - \alpha^۲\right]$$

در نظر می گیریم.
نتایج بدست آمده با روش یه و عباسبندی و حجری به ترتیب به شرح زیر است.

$$\mathrm{TY}(A) = (-۰/۶۲۸۵, ۰/\ ۰۲۸۵, ۰/۱۰۰۰, ۱/۳۰۰۰\ \ )$$

$$\mathrm{TA}(A) = (-۰/۶۲۸۵, ۰/۰۰۰۰, ۱/۲۵۰۰\ \ ).$$

مشاهده می شود که،

$$\int_۰^۱ (q-\alpha)(A_U(\alpha) - A_L(\alpha))\, d\alpha = q - \frac{۷}{۲۰},$$

$$\frac{۱}{۶}\frac{۲q-p}{p^۲}(p\,|\mathrm{supp}(A)| + q\,|\mathrm{core}(A)|) = q - \frac{۱}{۳}.$$

بدیهی است که شرط (۱۴) برآورده نمی شود، بنابراین $T\left(A\right)$ فقط به واسطه حالت دوم تعیین می شود.

با استفاده از روش ما و در نظر گرفتن ۱ ,… ,$p = ۰/۰,\ ۰/۱,\ ۰/۲$ تقریبهای $P - SC$ را بدست می آوریم که در جدول ۱ نشان داده ایم،

جدول ۱: *نتایج مثال ۵-۱*

p	$t_۱$	$t_۲$	$t_۳$	$t_۴$
۰/۰۰۰۰	− ۰/۷۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۱/۲۵۰۰
۰/۱۰۰۰	− ۰/۶۹۱۸	− ۰/۰۳۴۲	− ۰/۰۲۷۴	۱/۲۴۶۶
۰/۲۰۰۰	− ۰/۶۹۲۳	− ۰/۰۷۶۹	− ۰/۰۵۷۷	۱/۲۳۰۸
۰/۳۰۰۰	− ۰/۷۱۶۲	− ۰/۱۲۱۶	− ۰/۰۸۱۱	۱/۱۸۹۲
۰/۴۰۰۰	− ۰/۷۸۵۷	− ۰/۱۴۲۹	− ۰/۰۷۱۴	۱/۱۰۷۱
۰/۵۰۰۰	− ۰/۹۰۰۰	− ۱/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰
۰/۶۰۰۰	− ۱/۰۰۰۰	− ۰/۰۰۰۰	۰/۱۰۷۱	۰/۹۲۸۶
۰/۷۰۰۰	− ۰/۰۴۰۵	۰/۰۹۴۶	۰/۱۸۹۲	۰/۹۱۸۹
۰/۸۰۰۰	− ۰/۰۳۸۵	۰/۱۵۳۸	۰/۲۳۰۸	۰/۹۴۲۳
۰/۹۰۰۰	− ۰/۰۲۰۵	۰/۱۸۴۹	۰/۲۴۶۶	۰/۹۷۲۶
۱/۰۰۰۰	− ۱/۰۰۰۰	۰/۲۰۰۰	۰/۲۵۰۰	۱/۰۰۰۰

را بدست می آوریم که در جدول نشان داده ایم،

تفاوتی که بین نتیجه ما برای $p = ۰$ و نتیجه یه [۲۴] و عباسبندی و حجری[۴]، به دلیل تابع وزن دار(α) f است که در روش ما واحد (یکه) است در حالی که در روش یه و عباسبندی و حجری به عنوان $f\left(\alpha\right) = \alpha$ در نظر گرفته شده است.

مثال ۵-۲- $B \in F\left(R\right)$ با α− برش $B_\alpha = [-۱ + \sqrt{\alpha}, ۰\ ]$ را در نظرمی گیریم. نتایج بدست آمده از یه و عباسبندی و حجری به ترتیب به صورت زیر است،

$$\mathrm{TY}\left(B\right) = \left(-۰/۶۳۵۷, ۰/\ ۰۰۷۱, ۰/\ ۰۰۷۱\right)$$

$$\mathrm{TA}\left(B\right) = \left(-۰/۶۲۸۵, ۰/۰۰۰۰, ۰/۰۰۰۰\ \right).$$

مشاهده می شود که،

$$\int_۰^۱ \left(q-\alpha\right)\left(B_U\left(\alpha\right) - B_L\left(\alpha\right)\right)d\alpha = \frac{۱}{۳}q - \frac{۱}{۱۰},$$

$$\frac{۱}{۶}\frac{۲q-p}{p^{۲}}\left(p\left|\mathrm{supp}\left(B\right)\right|+q\left|\mathrm{core}\left(B\right)\right|\right)=\frac{۱}{۲}q-\frac{۱}{۶}.$$

از این رو شرط(۱۴) فقط برای $q<\frac{۶}{۱۵}$ (یا برای $۰\leq p\leq ۰/۶$) برقرار است. این بدان معنی است که $T\left(B\right)$ باید طبق حالت دوم برای $۰\leq p\leq ۰/۶$ و طبق حالت اول برای $p>۰$ تعیین شود. تقریبهای ***P-SC*** بدست آمده ازB که در جدول۲ مشخص شده است،

جدول ۲: *نتایج مثال ۵-۲*

p	$t_۱$	$t_۲$	$t_۳$	$t_۴$
۰/۰۰۰۰	− ۰/۷۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰
۰/۱۰۰۰	− ۰/۶۹۱۸	− ۰/۰۳۴۲	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰
۰/۲۰۰۰	− ۰/۶۹۲۳	− ۰/۰۷۶۹	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰
۰/۳۰۰۰	− ۰/۷۱۶۲	− ۰/۱۲۱۶	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰
۰/۴۰۰۰	− ۰/۷۸۵۷	− ۰/۱۴۲۹	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰
۰/۵۰۰۰	− ۰/۹۰۰۰	− ۱/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰
۰/۶۰۰۰	− ۱/۰۰۰۰	− ۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰
۰/۷۰۰۰	*	*	*	*
۰/۸۰۰۰	*	*	*	*
۰/۹۰۰۰	*	*	*	*
۱/۰۰۰۰	*	*	*	*

۶-*نتیجه گیری*

هدف ما در این مقاله پیشنهاد روش جدیدی برای تقریب یک عدد فازی با ذوزنقه ای بود بطوری که ترکیب محدب بازه پشتیبان و هسته بدون تغییر باقی بماند. یکی از ویژگی های جذاب عملگر پیشنهادی درگرایش ذاتی آن برای تولید دنباله ای از اعداد فازی تقریبی است که ترکیب محدب از بازه های پشتیبان و هسته را حفظ می کند. همچنین ایده تقریب ذوزنقه ای اعداد فازی بر اساس حفظ بازه ***P-SC***آنها به ما این اطمینان را می دهد که تقریب به دست آمده، گسترش آن تقریب هایی است که فقط بازه پشتیبان یا فقط بازه هسته را حفظ می کنند.

مراجع

[1] S. Abbasbandy, M. Amirfakhrian, The nearest approximation of a fuzzy quantity in parametric form, Appl. Math. Comput., 172, (2006), 624-632.

[2] S. Abbasbandy, B. Asady, The nearest trapezodial fuzzy number to a fuzzy quantity, Appl. Math. Comput., 156, (2004), 381-386.

[3] S. Abbasbandy, E. Ahmady, N. Ahmady, Triangular approximations of fuzzy numbers using weighted valuations, Soft Comput., 14, (2010),71-79.

[4] S. Abbasbandy, T. Hajjari, Weighted trapezoidal approximationpreserving core of a fuzzy number, Comput. Math. Appl., 59, (2010),3066-3077.

[5] T. Allahviranloo, M. Adabitabar Firozja, Note on Trapezodial approximation of fuzzy numbers, Fuzzy Sets Syst., 158, (2007), 755-756.

[6] A. Ban, Approximation of fuzzy numbers by trapezoidal fuzzy numbers preserving the expected interval, Fuzzy Sets Syst., 159, (2008), 1327-1344

[7] M. S. Bazaraa, J. J. Jarvis, Linear programming and network flows, First Edition, Wiley, 1977.

[8] Y. Ch. Cano, H. R. Flores, F. Gomide, A new type of approximation for fuzzy intervals, Fuzzy Sets Syst., 159, (2008), 1376-1383.

[9] S. Chanas, On the interval approximation of a fuzzy number, Fuzzy Sets Syst., 122, (2001), 353-356.

[10] M. Delgado, M. A. Vila, W. Voxman, On a canonical representation of fuzzy numbers, Fuzzy Sets Syst., 93, (1998), 125-135.

[11] D. Dubois, H. Prade, Fuzzy sets and systems:theory and applications, Academic press, 1980.

[12] P. Grzegorzewski, Metrics and orders in space of fuzzy numbers, Fuzzy Sets Syst., 97, (1998), 83-94.

[13] P. Grzegorzewski, Nearest interval approximation of a fuzzy number, Fuzzy Sets Syst., 130, (2002), 321-330.

[14] P. Grzegorzewski, Approximation of a fuzzy number preserving entropylike non-spcifity, Oper. Res. Decis., 4, (2003), 49-59.

[15] P. Grzegorzewski, E. Mrowka , Trapezoidal approximations of fuzzy numbers, Fuzzy Sets Syst., 153, (2005), 115-135.

[16] P. Grzegorzewski, E. Mrowka, Trapezoidal approximations of fuzzy numbers-revisited, Fuzzy Sets Syst., 158, (2007), 757-768.

[17] M. Jimenez, J.A. Rivas, Fuzzy number approximation, Internat. J. Uncertain. Fuzziness and Knowledge-Based Syst., 6, (1998), 68-78.

[18] M. Ma, A. Kandel, M. Friedman, A new approach for defuzzification, Fuzzy Sets Syst., 111, (2000), 351-356.

[19] M. Ma, A. Kandel, M. Friedman, Correction to A new approach for defuzzification, Fuzzy Sets and Syst., 128, (2002), 133-134.

[20] E. N. Nasibov, S. Peker, On the nearest parametric approximation of a fuzzy number, Fuzzy Sets and Syst., 159, (2008), 1365-1375.

[21] W. Van Leekwijck, E. E. Kerre, Defuzzification: criteria and classification, Fuzzy Sets and Syst., 108, (1999), 159-178.

[22] E. Roventa, T. Spircu, Averaging procedures in defuzzification processes, Fuzzy Sets Syst., 136, (2003), 375-385.

[23] C.-T. Yeh, A note on trapezoidal approximations of fuzzy numbers, Fuzzy Sets and Syst., 158, (2007), 747-754.

[24] C.-T. Yeh, Weighted trapezoidal and triangular approximation of fuzzy numbers, Fuzzy Sets and Syst., 160, (2009), 3059-3079.

[25] H. J. Zimmermann, Fuzzy set theory and applications, Kluwer, Dorrecht,1985.