

شاخص‌های کارایی یک متغیره و چندمتغیره در محیط فازی

بهرام صادقپور گیلده و زینب عباسی گنجی

گروه آموزشی آمار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۸/۱۴

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۴/۲۱

چکیده

شاخص‌های کارایی فرایند معیارهای عددی هستند که میزان مطابقت محصولات تولیدی یک فرایند با مشخصات در نظر گرفته شده توسط مشتریان یا تولیدکنندگان را نشان می‌دهند. اگر کیفیت محصولات فقط به یک متغیره بستگی داشته باشد، شاخص‌های یک متغیره و در غیر این صورت، شاخص‌های چندمتغیره مورد استفاده قرار می‌گیرند. هنگامی که مقادیر مربوط به متغیره‌ها یا حدود مشخصات فازی باشند، شاخص‌های کارایی فازی به کار برده می‌شوند. در این مقاله، چند شاخص کارایی فازی یک متغیره و چندمتغیره معرفی و با استفاده از مثال‌های کاربردی، عملکرد آن‌ها نشان داده می‌شود.

۱ سرآغاز

یک فرایند ترکیبی منحصر به فرد از ابزارها، مواد، روش‌ها و افرادی است که برای تولید محصولات قابل اندازه‌گیری به کار گرفته می‌شوند؛ مثل خط تولید قطعات ماشین. همه فرایندها دارای تغییرپذیری آماری هستند که بایستی با استفاده از روش‌های آماری مورد بررسی قرار گیرند. انتظار می‌رود که خروجی یک فرایند مطابق با خواسته‌های مشتریان، مشخصات فنی یا تحمل مهندسی باشد.

عبارات و کلمات کلیدی: شاخص کارایی، اعداد فازی، بازه تلورانس، توزیع نرمال چندمتغیره

Email(s): abbasiganji@mail.um.ac.ir.

۱۴۰۰ انجمن سیستم‌های فازی ایران

Mathematics Subject Classification (2010): 62A86

قدرت یک فرایند در تولید محصولات با کیفیت بالا با استفاده از کارت‌های کنترل و شاخص‌های کارایی ارزیابی می‌شود. کارت‌های کنترل ابزارهایی هستند که از خروجی‌های قابل اندازه‌گیری فرایند استفاده می‌کنند تا جایی که اطمینان حاصل شود فرایند پایدار است و بتوان از میانگین و تغییرپذیری برآورده شده استفاده کرد. کنترل فرایند آماری روش‌هایی را معرفی می‌کند که به درستی، فرایندهای پایدار (تحت کنترل)، فرایندهایی که در حال تغییر هستند و فرایندهایی که تغییرپذیری‌شان در حال زیاد شدن است، تمایز داده شود. شاخص‌های کارایی فرایند فقط برای فرایندهایی قابل به‌کارگیری هستند که پایدار (تحت کنترل آماری) باشند. این شاخص‌ها اعدادی هستند که نشان می‌دهند چه میزان از انتظارات مشتریان و مهندسان برآورده می‌شود.

در فرایندهایی که کیفیت محصولات مورد بررسی به یک مشخصه مربوط باشد، از شاخص‌های کارایی یک‌متغیره استفاده می‌شود و در فرایندهایی که کیفیت به دو یا چند مشخصه بستگی داشته باشد، شاخص‌های کارایی چندمتغیره به‌کار برده می‌شود. در این مقاله، هر دو نوع شاخص برای فرایندهایی که مشخصات مورد نظر از توزیع نرمال پیروی می‌کنند، مورد بررسی قرار می‌گیرند.

۲ شاخص‌های کارایی یک‌متغیره

فرض کنید مشخصه مورد بررسی یک محصول را با متغیر X نشان دهیم که از توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2 پیروی می‌کند. بازه تلورانس برای X شامل حد پائین مشخصه ^۱ (LSL)، حد بالای مشخصه ^۲ (USL) و مقدار هدف ^۳ (T) که نقطه‌ای بین حدود بالا و پائین تلورانس است، می‌باشد. تلورانس فرآیند متقارن است هرگاه مقدار هدف در وسط بازه تلورانس قرار داشته باشد یعنی $T = M = \frac{LSL+USL}{۲}$. در این حالت مقدار $T - LSL$ و $USL - T$ یکسان است که آن را با D نشان می‌دهیم. اگر چه تلورانس متقارن در بسیاری از فرایندها مورد استفاده قرار می‌گیرد، اما موارد زیادی وجود دارد که T در وسط بازه تلورانس قرار نمی‌گیرد. در این حالت، تلورانس

^۱ Lower specification limit

^۲ Upper specification limit

^۳ Target

نامتقارن نامیده می‌شود. در اینصورت فاصله T از حدود پائین و بالای مشخصه متفاوت است و با $D_u = USL - T$ و $D_l = T - LSL$ نشان داده می‌شود. در این جا برخی شاخص‌های کارایی فرایند را ارائه می‌کنیم. اولین شاخص کارایی فرایند، C_p است که توسط ژوران در سال ۱۹۷۴ به صورت زیر معرفی شد:

$$C_p = \frac{USL - LSL}{6\sigma}. \quad (1)$$

پس از آن، شاخص‌های کارایی مختلفی معرفی شدند که بهتر از شاخص‌های قبل، کارایی فرایند را اندازه‌گیری می‌کردند. ونمن^۴ (۱۹۹۵) خانواده شاخص‌های کارایی $C_p(u, v)$ را به صورت رابطه زیر معرفی کرده است.

$$C_p(u, v) = \frac{d - u | \mu - M |}{3\sqrt{\sigma^2 + v(\mu - T)^2}}, \quad u, v \geq 0. \quad (2)$$

ملاحظه ۱.۰۲. با در نظر گرفتن مقادیر ۰ و ۱ برای u و v ، خواهیم داشت:

$$C_p(0, 0) = C_p, \quad C_p(1, 0) = C_{pk}, \quad C_p(0, 1) = C_{pm}, \quad C_p(1, 1) = C_{pmk}.$$

برای فرایندهای دارای تلورانس نامتقارن، شاخص‌های کارایی فوق در بیان کارایی فرایند نارسا هستند. اولین برخورد در مواجهه با چنین فرایندهایی، جایگذاری تلورانس واقعی نامتقارن با تلورانس متقارن $(T - d^*, T + d^*)$ و معرفی خانواده شاخص‌های کارایی $C_p^*(u, v)$ مطابق با تعریف زیر بوده که در آن $d^* = \min\{D_l, D_u\}$ است.

$$C_p^*(u, v) = \frac{d^* - u | \mu - T |}{3\sqrt{\sigma^2 + v(\mu - T)^2}}, \quad u, v \geq 0. \quad (3)$$

ملاحظه ۲.۰۲. با در نظر گرفتن مقادیر ۰ و ۱ برای u و v ، شاخص‌های $C_p^*(0, 0) = C_p^*$ ، $C_p^*(1, 1) = C_{pmk}^*$ و $C_p^*(0, 1) = C_{pm}^*$ ، $C_p^*(1, 0) = C_{pk}^*$ حاصل می‌شود.

⁴Vannman

در این روش، تلورانس واقعی با تلورانس کوچکتر جایگزین می‌شود که در برخی فرآیندها منجر به کم برآورد شدن کارایی می‌شود. روش دیگر در مواجهه با فرایندهای دارای تلورانس نامتقارن این است که تلورانس واقعی را با $(T - d', T + d')$ جایگذاری کنیم که در آن $d' = (D_l + D_u)/2$ و از خانواده شاخص‌های کارایی $C'_p(u, v)$ استفاده نمائیم.

$$C'_p(u, v) = \frac{d' - u \mid \mu - T \mid}{\sqrt[3]{\sigma^2 + v(\mu - T)^2}}, \quad u, v \geq 0. \quad (4)$$

ملاحظه ۳.۲. با قرار دادن مقادیر ۰ و ۱ برای u و v ، شاخص‌های $C'_p(0, 0) = C'_p$ ، $C'_p(1, 1) = C'_{pmk}$ و $C'_p(0, 1) = C'_{pm}$ ، $C'_p(1, 0) = C'_{pk}$ به دست می‌آید.

خانواده شاخص‌های کارایی $C'_p(u, v)$ در برخی فرآیندها منجر به بیش برآوردی کارایی می‌شود و در برخی به کم برآوردی می‌انجامد (بستگی به مکان میانگین نسبت به مقدار هدف دارد).

ملاحظه ۴.۲. اگر تلورانس فرآیند متقارن باشد یعنی $D_l = D_u$ ، آنگاه خواهیم داشت:

$$C_p^*(u, v) = C'_p(u, v) = C_p(u, v).$$

چن و پیرن^۵ (۲۰۰۱) نشان دادند که برای انحراف معیار ثابت، ماکسیمم مقدار شاخص‌های فوق در نقطه $\mu = T$ رخ نمی‌دهد بلکه در نقطه‌ای بین مقدار هدف و وسط بازه تلورانس رخ می‌دهد. آن‌ها خانواده شاخص‌های $C''_p(u, v)$ را معرفی کردند که مشکل ذکر شده را برطرف می‌کند.

$$C''_p(u, v) = \frac{d^* - uF^*}{\sqrt[3]{\sigma^2 + vF^2}}, \quad (5)$$

که در آن

$$F = \max \left\{ \frac{d(\mu - T)}{D_u}, \frac{d(T - \mu)}{D_l} \right\},$$

⁵Chen and Pearn

و

$$F^* = \max \left\{ \frac{d^*(\mu - T)}{D_u}, \frac{d^*(T - \mu)}{D_l} \right\},$$

$$.u, v \geq 0$$

ملاحظه ۵.۲. با در نظر گرفتن مقادیر ۰ و ۱ برای u و v خواهیم داشت:

$$C_p''(0, 0) = C_p'', \quad C_p''(1, 0) = C_{pk}'', \quad C_p''(0, 1) = C_{pm}'', \quad C_p''(1, 1) = C_{pmk}''.$$

با استفاده از این شاخص، بیشترین مقدار کارایی فرآیند در حالت $\mu = T$ رخ می‌دهد. همچنین، عامل‌های $\frac{d^*}{D_u}$ و $\frac{-d^*}{D_l}$ سبب می‌شوند که دو فرآیند A و B با $\mu_A > T$ و $\mu_B < T$ به قسمی که $(\mu_A - T)/D_u = (T - \mu_B)/D_l$ ، یک مقدار کارایی بر اساس این شاخص داشته باشند و اگر میانگین فرآیند بر حدود مشخصات منطبق باشد یعنی $\mu = LSL$ یا $\mu = USL$ ، در این صورت $C_{pk}'' = C_{pmk}'' = 0$.

مشکل عمده که با شاخص‌های C_{pk}'' ، C_{pm}'' و C_{pmk}'' (در خانواده شاخص‌های $C_p''(u, v)$) وجود دارد، این است که انحراف فرآیند از مقدار هدف بدون در نظر گرفتن جهت انحراف ارزیابی می‌شود. به عنوان مثال، فرض کنید دو فرآیند A و B حدود مشخصات فنی یکسان داشته باشند و مقدار هدف به حد بالای مشخصه فنی نزدیک‌تر باشد به عبارت دیگر $D_u < D_l$. همچنین، فرض کنید انحراف معیار هر دو فرآیند برابر σ باشد در حالی که میانگین فرآیند A بر حد مشخصه فنی بالا منطبق است به عبارتی دیگر $\mu_A = USL$ و میانگین فرآیند B بر حد مشخصه فنی پائین قرار دارد یعنی $\mu_B = LSL$. واضح است که درصد اقلام نامنطبق مورد انتظار برای هر دو فرآیند یکسان است در حالی که میانگین فرآیند A در مقایسه با میانگین فرآیند B به مقدار هدف نزدیک‌تر است. بنابراین، کارایی فرآیند A بایستی بیشتر از کارایی فرآیند B باشد. به عبارتی دیگر، اگر کارایی فرآیند A صفر باشد، کارایی فرآیند B بایستی عددی منفی باشد. در حالی که مقدار کارایی هر دو فرآیند بر اساس C_{pk}'' و C_{pmk}'' برابر با صفر و بر اساس شاخص C_{pm}'' ، یکسان و عددی بزرگتر از صفر می‌باشد.

عباسی گنجی و صادقپور گیلده^۶ (۲۰۱۶) خانواده شاخص‌های کارایی $C_p'''(u, v)$ را

⁶Abbasi Ganji and Sadeqpour Gildeh

معرفی کردند که ایرادهای مذکور را برطرف کرده و بهتر از شاخص‌های دیگر عمل کند. تعریف آن به صورت زیر است:

$$C_p'''(u, v) = \frac{d^* - uA^*}{\sqrt[3]{\sigma^2 + vA^2}}, \quad (6)$$

می‌باشد که در آن

$$A^* = \frac{(\mu - T)^2}{D_u} I\{\mu - T\} + \frac{(T - \mu)^2}{D_l} I\{T - \mu\}, \quad (7)$$

و

$$A = \frac{d(\mu - T)}{D_u} I\{\mu - T\} + \frac{d(T - \mu)}{D_l} I\{T - \mu\}, \quad (8)$$

مقدار $I\{x\}$ برای مقادیر $x \geq 0$ برابر با ۱ و در غیر این صورت، برابر با ۰ است.

بر اساس شاخص فوق، کارایی فرآیند هنگامی که میانگین از مقدار هدف به سمت حد مشخصه‌ی نزدیک‌تر انحراف پیدا می‌کند نسبت به حالتی که میانگین به حد مشخصه دورتر از مقدار هدف نزدیک می‌شود، سریع‌تر کاهش پیدا می‌کند.

لازم به ذکر است که این شاخص تحت تأثیر نسبت اقلام نامنطبق و همچنین، انحراف میانگین فرآیند از مقدار هدف می‌باشد و این ویژگی، یک مزیت نسبت به شاخص‌های قبل می‌باشد.

ملاحظه ۶.۲. با در نظر گرفتن مقادیر ۰ و ۱ برای u و v خواهیم داشت:

$$C_p'''(0, 0) = C_p''', \quad C_p'''(1, 0) = C_{pk}''', \quad C_p'''(0, 1) = C_{pm}''', \quad C_p'''(1, 1) = C_{pmk}'''$$

در این مقاله، بر اساس این خانواده شاخص‌های کارایی، برای فرایندهایی که حدود مشخصات فازی دارند، شاخص‌های کارایی فازی معرفی می‌کنیم. برای اطلاعات بیشتر، رجوع شود به عباسی گنجی (۱۳۹۵) و عباسی گنجی و صادق‌پورگیلده (۲۰۱۷).

۳ شاخص‌های کارایی چندمتغیره

اغلب اوقات لازم است کارایی فرآیندی که کیفیت محصولات آن به چندین متغیر وابسته مربوط است، ارزیابی شود. در این موارد، شاخص‌های کارایی چند متغیره به کار گرفته می‌شود. تحقیقات بر شاخص‌های کارایی چند متغیره از اواخر دهه ۱۹۸۰ شروع شده است. در اینجا دو شاخص کارایی را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

فرض کنید کیفیت محصولات تولیدی فرآیندی به p مشخصه وابسته X_1, X_2, \dots, X_p به قسمی که $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_p)'$ دارای توزیع نرمال p متغیره به صورت $N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ است، بستگی داشته باشد که در آن $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p)'$ بردار میانگین و $\boldsymbol{\Sigma}$ ماتریس واریانس-کوواریانس \mathbf{X} به صورت زیر است:

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1p} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{p1} & \sigma_{p2} & \dots & \sigma_{pp} \end{pmatrix}.$$

در اکثر فرآیندها $\boldsymbol{\mu}$ و $\boldsymbol{\Sigma}$ نامعلوم هستند. بنابراین، بایستی بر اساس داده‌های جمع‌آوری شده از فرآیند در حالت تحت کنترل، برآورد شوند. فرض کنید $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$ نمونه‌ای تصادفی از \mathbf{X} باشد. بردار میانگین نمونه‌ای $\bar{\mathbf{X}} = (\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_p)'$ است که درایه i ام آن، میانگین مشخصه i در نمونه است و ماتریس واریانس-کوواریانس نمونه‌ای برابر است با:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1p} \\ s_{21} & s_{22} & \dots & s_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{p1} & s_{p2} & \dots & s_{pp} \end{pmatrix},$$

که در آن s_{ij} کوواریانس نمونه‌ای بین مشخصه i و مشخصه j است (برای $(i, j = 1, 2, \dots, p)$).

علاوه بر این، فرض کنید $[LSL_i, USL_i]$ بازه تلورانس برای مشخصه i ام (X_i) باشد. در حالت دو متغیره (دو بعدی)، ناحیه تلورانس به صورت مستطیل، در حالت سه متغیره (سه بعدی)، مکعب مستطیل و در ابعاد بیشتر، ابر مکعب مستطیل است. برای حدود تلورانس پیچیده‌تر، ناحیه تلورانس نیز پیچیده‌تر خواهد بود. به عنوان مثال، ناحیه تلورانس ممکن است به صورت یک هرم یا قیف باشد.

۱.۳ شاخص کارایی چندمتغیره

تام^۷ و همکاران (۱۹۹۳) شاخص کارایی چند متغیره MC_{pm} را به صورت نسبت دو حجم معرفی کردند.

$$MC_{pm} = \frac{vol. (R_1)}{vol. (R_2)}, \quad (9)$$

که در آن، $vol.$ نشان‌دهنده حجم است. R_1 ناحیه تلورانس اصلاح‌شده و عبارت از بزرگترین بیضی (برای فرآیند دو متغیره) یا بیضی‌گون (برای فرآیند سه متغیره یا بیشتر) به مرکزیت بردار هدف است که کاملاً داخل ناحیه تلورانس واقعی فرآیند قرار می‌گیرد. R_2 ناحیه مقیاسی شده (با میانگین مربع خطا) از فرآیند است که ۹۹٫۷۳ درصد آن را می‌پوشاند. در واقع، R_2 یک ناحیه بیضی‌گون از فرم درجه دوم به صورت زیر است که در آن $\chi^2_{p,0.0027}$ چندک بالایی توزیع کای-دو با p درجه آزادی می‌باشد:

$$(\mathbf{X} - \mathbf{T})' \Sigma^{-1} (\mathbf{X} - \mathbf{T}) \leq \chi^2_{p,0.0027}.$$

شاخص کارایی چندمتغیره MC_{pm} طبق رابطه زیر تعریف شده است:

$$MC_{pm} = \frac{vol. (R_1)}{vol. (R_2)} \times \frac{1}{D} = \psi_p \times D^{-1}, \quad (10)$$

به قسمی که R_2 ناحیه‌ای است بیضی‌گون به مرکزیت بردار میانگین که ۹۹٫۷۳٪ فرآیند

⁷Taam

را در بر می‌گیرد و $D = [1 + (\mu - T)' \Sigma^{-1} (\mu - T)]^{1/2}$. عامل ψ_p در رابطه (۱۰) تغییرپذیری فرآیند را در ارتباط با ناحیه تلورانس اصلاح شده نشان می‌دهد و D انحراف بردار میانگین فرآیند از بردار هدف هدف (T) را منعکس می‌کند.

بر اساس نمونه تصادفی جمع‌آوری شده، برآورد شاخص MC_{pm} به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\widehat{MC}_{pm} = \frac{\widehat{MC}_p}{\widehat{D}}, \quad (11)$$

که در آن

$$\widehat{MC}_p = \frac{\text{حجم ناحیه تلورانس اصلاح شده}}{|S|^{1/2} (\pi \chi_{p, \alpha}^2)^{p/2} [\Gamma(p/2 + 1)]^{-1}}, \quad (12)$$

و

$$\widehat{D} = [1 + \frac{n}{n-1} (\bar{X} - T)' S^{-1} (\bar{X} - T)]^{1/2}. \quad (13)$$

فرآیند کارا خواهد بود اگر \widehat{MC}_{pm} بزرگ‌تر از ۱ باشد. در مقاله حاضر، برای فرایندهایی که حدود مشخصات فازی هستند، شاخص \widehat{MC}_{pm} را در محیط فازی ارائه می‌کنیم.

۲.۳ بردارهای کارایی چندمتغیره

شهریاری^۸ و همکاران (۱۹۹۵) بردار کارایی چند متغیره $MPCV = [C_{pM}, PV, LI]$ را ارائه کردند که مؤلفه‌های آن به صورت روابط زیر است:

مؤلفه اول:

$$C_{pM} = \left[\frac{\prod_{i=1}^p (USL_i - LSL_i)}{\prod_{i=1}^p (UPL_i - LPL_i)} \right]^{1/p}, \quad (14)$$

⁸Shahriari

به قسمی که

$$\begin{aligned} UPL_i &= \mu_i + \sqrt{\frac{\chi_{p,\alpha}^2 |\Sigma_i^{-1}|}{|\Sigma^{-1}|}}, \\ LPL_i &= \mu_i - \sqrt{\frac{\chi_{p,\alpha}^2 |\Sigma_i^{-1}|}{|\Sigma^{-1}|}}, \end{aligned} \quad (15)$$

و $\chi_{p,\alpha}^2$ صدک α ام بالایی توزیع کای-دو با p درجه آزادی است و $det(\Sigma_i^{-1})$ دترمینان ماتریس Σ_i^{-1} است (Σ_i ماتریسی است که از حذف سطر و ستون i ام ماتریس Σ به دست می‌آید).

مؤلفه دوم:

$$PV = P(F_{p,n-p} > \frac{n-p}{p(n-1)} t^2), \quad (16)$$

که در آن

$$t^2 = n(\bar{X} - T)'S^{-1}(\bar{X} - T), \quad (17)$$

و $F_{p,n-p}$ متغیر تصادفی است که از توزیع فیشر با p و $n-p$ درجه آزادی پیروی می‌کند.

مؤلفه سوم: مقدار LI برابر با ۱ است هرگاه ناحیه اصلاح شده فرآیند کاملاً در داخل ناحیه تلورانس قرار گیرد و در غیراین صورت، مقدار آن برابر با ۰ است.

در بردار کارایی معرفی‌شده، وابستگی بین متغیرها در نظر نمی‌شود. شهریار و عبدالله زاده^۹ (۲۰۰۹) مؤلفه اول این بردار را اصلاح کرده، بردار کارایی $NMPCV = [NMC_{pM}, PV, LI]$ را پیشنهاد کردند. آن‌ها برای محاسبه مؤلفه اول، ناحیه تلورانس را اصلاح کردند به این طریق که بزرگ‌ترین بیضی‌گون که مرکز آن بردار هدف و محورهای آن موازی با محورهای بیضی‌گون فرآیند است و کاملاً در داخل ناحیه

^۹Abdollahzadeh

تلورانس واقعی قرار می‌گیرد، به عنوان ناحیه تلورانس اصلاح شده در نظر گرفته شود.

$$NMC_{pM} = \frac{c}{\sqrt{\chi_{p,0.9973}^2}}, \quad (18)$$

به قسمی که

$$c = \min \left\{ \min \left\{ \frac{USL_i - T_i}{\sigma_i}, \frac{T_i - LSL_i}{\sigma_i} \right\}; i = 1, 2, \dots, p \right\}. \quad (19)$$

در این مقاله، بر اساس بردار کارایی ارائه شده توسط شهریاری و عبداللهزاده (۲۰۰۹) در فرایندهایی که حدود مشخصات متغیرها فازی باشند، بردار کارایی فازی معرفی می‌شود. برای مطالعه بیشتر، رجوع شود به عباسی گنجی (۱۳۹۵) و عباسی گنجی و صادقیور گیلده (۲۰۱۶).

۴ برخی مفاهیم فازی

منطق سنتی (دقیق) شامل دو بخش مجزا می‌باشد: بله و خیر. در این منطق، یک عبارت یا صحیح است یا غلط، بین این دو مقداری ندارد. دقت به این معنا است که ساختارها و پارامترهای یک مدل، به طور دقیق و قطعی شناخته شده‌اند و هیچ شبهه و تردیدی در مورد مقدار آن یا موارد مربوط به آن وجود ندارد.

اما در دنیای واقعی، مواردی وجود دارد که ما نمی‌توانیم پارامترها را به طور دقیق تقسیم‌بندی کنیم. به عبارت دیگر، این پارامترها با متغیرهای زبانی بیان می‌شوند. نظریه فازی توسط پروفیسور زاده در سال ۱۹۶۵ معرفی شد تا اطلاعات و داده‌هایی که عدم قطعیت غیرآماری دارند، به بیان دیگر، ناشی از تصادف نیستند را توصیف کنند.

هر توصیف زبانی به یک تابع عضویت مربوط می‌شود که یک مجموعه فازی را تشکیل می‌دهد. در واقع، توابع عضویت به هر جزء از مجموعه مرجع، یک عدد حقیقی در بازه [۰, ۱] نسبت می‌دهند. این عدد، درجه عضو بودن آن جزء به یک مجموعه فازی را نشان می‌دهد. هر چه این مقدار به یک نزدیکتر باشد، نشان‌دهنده درجه عضویت بالاتر است. همچنین، یک جزء می‌تواند تا درجه‌ای در عضویت یک مجموعه فازی و تا درجه‌ای

متعلق به مجموعه فازی دیگر باشد. در این بخش، برخی تعاریف مورد نیاز این مقاله را ارائه می‌کنیم.

تعریف ۱.۴ (مجموعه فازی). فرض کنید E یک مجموعه ناتهی باشد. یک مجموعه فازی \tilde{A} در E با تابع عضویت آن تعیین می‌شود یعنی $\mu_{\tilde{A}}: E \rightarrow [0, 1]$. $\mu_{\tilde{A}}(e)$ درجه عضویت e در مجموعه فازی \tilde{A} برای هر $e \in E$ تعریف می‌شود. این تابع با \tilde{A} نیز نشان داده می‌شود. به عبارت دیگر $\tilde{A}: E \rightarrow [0, 1]$.

تعریف ۲.۴ (تکیه‌گاه). فرض کنید \tilde{A} یک مجموعه فازی از E باشد. تکیه‌گاه \tilde{A} را با $supp(\tilde{A})$ نشان داده، اعضای آن همه e هایی هستند که درجه عضویت آن‌ها بزرگتر از صفر است. به بیان دیگر

$$supp(\tilde{A}) = \{e \in E \mid \tilde{A}(e) > 0\}.$$

تعریف ۳.۴ (مجموعه فازی نرمال). مجموعه فازی \tilde{A} از مجموعه E نرمال نامیده می‌شود اگر e ای در آن وجود داشته باشد که درجه عضویت آن یک باشد یعنی $\tilde{A}(e) = 1$. در غیر این صورت، \tilde{A} غیر نرمال خواهد بود.

تعریف ۴.۴ (آلفا برش). مجموعه α -برش از \tilde{A} یک مجموعه غیر فازی است که آن را با \tilde{A}_α نشان می‌دهیم و تعریف ریاضی آن به صورت زیر است:

$$\tilde{A}_\alpha = \{e \in E \mid \tilde{A}(e) \geq \alpha\}.$$

تعریف ۵.۴ (کمیت فازی ذوزنقه‌ای). مجموعه فازی \tilde{A} کمیت فازی ذوزنقه‌ای نامیده می‌شود و آن را با $T_r(a, b, c, d)$ نشان می‌دهند هر گاه تابع عضویت آن به صورت زیر باشد:

$$\tilde{A}(e) = \begin{cases} \frac{e-a}{b-a}; & a \leq e < b, \\ 1; & b \leq e < c, \\ \frac{d-e}{d-c}; & c \leq e < d, \\ 0; & \text{در غیر این صورت.} \end{cases}$$

تعریف ۶.۴ (عدد فازی مثلثی). مجموعه فازی \tilde{A} عدد فازی مثلثی نامیده می‌شود و آن را با $T(a, b, c)$ نمایش می‌دهند هر گاه تابع عضویت آن برابر باشد با:

$$\tilde{A}(e) = \begin{cases} \frac{e-a}{b-a}; & a \leq e < b, \\ \frac{c-e}{c-b}; & b \leq e < c, \\ 0; & \text{در غیر این صورت.} \end{cases}$$

تعریف ۷.۴ (عملگر بر روی اعداد فازی). فرض کنید \tilde{A} و \tilde{B} دو عدد فازی و $R : R \times R \rightarrow R$ یک عملگر دوتایی بر اعداد حقیقی باشد. اگر تعمیم عملگر $*$ را بر اعداد فازی به صورت \otimes نشان دهیم، $\tilde{A} \otimes \tilde{B}$ یک مجموعه فازی با تابع عضویت زیر است:

$$(\tilde{A} \otimes \tilde{B})(z) = \sup_{z=x*y} \min[\tilde{A}(x), \tilde{B}(y)]$$

بنابراین، چهار عمل اصلی بر روی اعداد فازی به صورت زیر است:

$$(\tilde{A} \oplus \tilde{B})(z) = \sup_{z=x+y} \min[\tilde{A}(x), \tilde{B}(y)]$$

$$(\tilde{A} \ominus \tilde{B})(z) = \sup_{z=x-y} \min[\tilde{A}(x), \tilde{B}(y)]$$

$$(\tilde{A} \otimes \tilde{B})(z) = \sup_{z=x*y} \min[\tilde{A}(x), \tilde{B}(y)]$$

$$(\tilde{A} \oslash \tilde{B})(z) = \sup_{z=x/y} \min[\tilde{A}(x), \tilde{B}(y)]$$

۱.۴ تابع رتبه‌بندی

عدد فازی \tilde{A} بزرگتر از عدد فازی \tilde{B} یا برابر با آن است و می‌نویسیم $\tilde{A} \geq_R \tilde{B}$ اگر و فقط اگر $0 \leq C(\tilde{A} \geq \tilde{B})$ یا به طور معادل $0 \leq C(\tilde{B} \geq \tilde{A})$. به طور مشابه، عدد فازی \tilde{A} بزرگتر از عدد فازی \tilde{B} است و می‌نویسیم $\tilde{A} >_R \tilde{B}$ اگر و فقط اگر $0 < C(\tilde{A} \geq \tilde{B})$ یا

به طور معادل $C(\tilde{B} \geq \tilde{A}) < 0$ که در آن

$$C(\tilde{A} \geq \tilde{B}) = R(\tilde{A}) - R(\tilde{B}),$$

و

$$R(\tilde{A}) = \frac{1}{4} \int_0^1 (\tilde{A}_l(\alpha) + \tilde{A}_r(\alpha)) d\alpha.$$

این روش ترتیب، توسط فورتمپس و رابنس^{۱۰} (۱۹۹۶) ارائه شده است.

برای عدد فازی مثلثی $\tilde{A} = T(a, b, c)$ داریم $R(\tilde{A}) = (a + 2b + c)/4$ و برای

کمیت فازی دوزنقه‌ای $\tilde{A} = T_r(a, b, c, d)$ خواهیم داشت $R(\tilde{A}) = (a + b + c + d)/4$.

۲.۴ واریانس فازی

فرض کنید X یک متغیر تصادفی باشد که از توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2

پیروی می‌کند $(N(\mu, \sigma^2))$. نمونه‌ای تصادفی به اندازه n به صورت X_1, X_2, \dots, X_n

جمع‌آوری می‌کنیم. واریانس نمونه‌ای S^2 برآورد نقطه‌ای برای واریانس است. اگر مقادیر

نمونه تصادفی طبق x_1, x_2, \dots, x_n باشد، آنگاه $s^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 / (n - 1)$ که

در آن $\bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i / n$ است، مقدار برآورد نقطه‌ای برای σ^2 می‌باشد.

مجموعه‌های α -برش برآوردگر فازی ناریب واریانس به صورت زیر می‌باشد:

$$\tilde{\sigma}^2(\alpha) = \begin{cases} [\sigma_l^2(0.01), \sigma_r^2(0.01)] & 0 \leq \alpha \leq 0.01, \\ [\sigma_l^2(\alpha), \sigma_r^2(\alpha)] & 0.01 \leq \alpha \leq 1. \end{cases} \quad (20)$$

به قسمی که

$$\begin{aligned} \sigma_l^2(\alpha) &= \frac{(n-1)s^2}{(1-\alpha)\chi_{(n-1), 0.05}^2 + \alpha(n-1)}, \\ \sigma_r^2(\alpha) &= \frac{(n-1)s^2}{(1-\alpha)\chi_{(n-1), 0.95}^2 + \alpha(n-1)}. \end{aligned} \quad (21)$$

¹⁰Fortemps and Roubens

با روی هم قرار دادن این برش‌ها، عدد فازی مثلثی شکل $\tilde{\sigma}^2$ به دست می‌آید.

۳.۴ میانگین فازی

مجموعه‌های α -برش برآوردگر فازی نااریب میانگین عبارت‌اند از:

$$\tilde{\mu}(\alpha) = \begin{cases} [\mu_l(\alpha), \mu_r(\alpha)] & 0 \leq \alpha \leq 1, \\ [\mu_l(\alpha), \mu_r(\alpha)] & 0 \leq \alpha \leq 1. \end{cases} \quad (22)$$

که در آن

$$\begin{aligned} \mu_l(\alpha) &= \min \left(\bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma_i(\alpha)}{\sqrt{n}} \right), \quad i = \{l, r\} \\ \mu_r(\alpha) &= \max \left(\bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma_i(\alpha)}{\sqrt{n}} \right), \quad i = \{l, r\} \end{aligned} \quad (23)$$

و $\sigma_l(\alpha)$ و $\sigma_r(\alpha)$ به ترتیب جذر برش‌های چپ و راست بازه $\tilde{\sigma}^2(\alpha)$ می‌باشد.

۵ شاخص‌های کارایی یک‌متغیره فازی برای فرایندهای با تلورانس نامتقارن

هنگامی که حدود تلورانس و مقدار هدف اعداد دقیق نیستند، نمی‌توان از شاخص‌های کارایی سنتی (کلاسیک) استفاده کرد. در این شرایط منطق فازی به کار گرفته شده، کارایی فرآیند توسط شاخص کارایی فازی^{۱۱} ارزیابی می‌شود. در این صورت، اطلاعات بیشتری نسبت به شاخص کارایی کلاسیک در بر خواهد داشت. در این بخش، در مواردی که حدود مشخصات و مقدار هدف اعداد دقیق نباشند، دو شاخص \tilde{C}_{pk}''' و \tilde{C}_{pmk}''' را پیشنهاد می‌کنیم.

فرض کنید فرآیندی از توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2 پیروی کند و مقدار هدف و حدود مشخصات پایین و بالای فنی به ترتیب برابر با \tilde{T} ، \tilde{LSL} و \tilde{USL} باشند.

^{۱۱} Fuzzy capability index

۱.۵ حدود مشخصات و مقدار هدف فازی

اگر حدود مشخصات فنی و مقدار هدف، اعداد فازی مثلثی به ترتیب به صورت $\widetilde{USL} = T(u_1, u_2, u_3)$ ، $\widetilde{LSL} = T(l_1, l_2, l_3)$ و $\widetilde{T} = (t_1, t_2, t_3)$ باشند، بازه‌های α -برش این اعداد فازی به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \widetilde{USL}(\alpha) &= [U_l(\alpha), U_r(\alpha)] = [u_1 + (u_2 - u_1)\alpha, u_3 - (u_3 - u_2)\alpha], \\ \widetilde{LSL}(\alpha) &= [L_l(\alpha), L_r(\alpha)] = [l_1 + (l_2 - l_1)\alpha, l_3 - (l_3 - l_2)\alpha], \\ \widetilde{T}(\alpha) &= [T_l(\alpha), T_r(\alpha)] = [t_1 + (t_2 - t_1)\alpha, t_3 - (t_3 - t_2)\alpha]. \end{aligned} \quad (24)$$

در حالتی که حدود مشخصات و مقدار هدف، کمیت فازی ذوزنقه‌ای به صورت $\widetilde{USL} = T_r(u_1, u_2, u_3, u_4)$ ، $\widetilde{LSL} = T_r(l_1, l_2, l_3, l_4)$ و $\widetilde{T} = T_r(t_1, t_2, t_3, t_4)$ باشند، بازه‌های α -برش عبارت‌اند از:

$$\begin{aligned} \widetilde{USL}(\alpha) &= [U_l(\alpha), U_r(\alpha)] = [u_1 + (u_2 - u_1)\alpha, u_4 - (u_4 - u_3)\alpha], \\ \widetilde{LSL}(\alpha) &= [L_l(\alpha), L_r(\alpha)] = [l_1 + (l_2 - l_1)\alpha, l_4 - (l_4 - l_3)\alpha], \\ \widetilde{T}(\alpha) &= [T_l(\alpha), T_r(\alpha)] = [t_1 + (t_2 - t_1)\alpha, t_4 - (t_4 - t_3)\alpha]. \end{aligned} \quad (25)$$

۲.۵ شاخص کارایی فازی \widetilde{C}_{pk}'''

شاخص کارایی فازی \widetilde{C}_{pk}''' به صورت تعریف می‌شود:

$$\widetilde{C}_{pk}''' = \frac{\widetilde{d}^* \ominus \widetilde{A}^*}{3\widetilde{\sigma}}, \quad (26)$$

به قسمی که

$$\widetilde{A}^* = \begin{cases} \frac{(\widetilde{\mu} \ominus \widetilde{T}) \otimes (\widetilde{\mu} \ominus \widetilde{T})}{\widetilde{USL} \ominus \widetilde{T}}; & \max\{\widetilde{\mu}, \widetilde{T}\} = \widetilde{\mu}, \\ \frac{(\widetilde{T} \ominus \widetilde{\mu}) \otimes (\widetilde{T} \ominus \widetilde{\mu})}{\widetilde{T} \ominus \widetilde{LSL}}; & \max\{\widetilde{\mu}, \widetilde{T}\} = \widetilde{T}, \end{cases} \quad (27)$$

$$\tilde{d} = (\widetilde{USL} \ominus \widetilde{LSL})/۲$$

مجموعه‌های α -برش \tilde{A}^* عبارت‌اند از:

$$\tilde{A}^*(\alpha) = (A_l^*(\alpha), A_r^*(\alpha)), \quad (۲۸)$$

که در آن

$$A_l^*(\alpha) = \begin{cases} \frac{(\mu_l(\alpha) - T_r(\alpha))^{\uparrow}}{U_r(\alpha) - T_l(\alpha)}; & \max\{\tilde{\mu}, \tilde{T}\} = \tilde{\mu}, \\ \frac{(T_l(\alpha) - \mu_r(\alpha))^{\uparrow}}{T_r(\alpha) - L_l(\alpha)}; & \max\{\tilde{\mu}, \tilde{T}\} = \tilde{T}, \end{cases} \quad (۲۹)$$

و

$$A_r^*(\alpha) = \begin{cases} \frac{(\mu_r(\alpha) - T_l(\alpha))^{\uparrow}}{U_l(\alpha) - T_r(\alpha)}; & \max\{\tilde{\mu}, \tilde{T}\} = \tilde{\mu}, \\ \frac{(T_r(\alpha) - \mu_l(\alpha))^{\uparrow}}{T_l(\alpha) - L_r(\alpha)}; & \max\{\tilde{\mu}, \tilde{T}\} = \tilde{T}. \end{cases} \quad (۳۰)$$

بر اساس $\tilde{C}_{pk}''' = (\tilde{d}^* \ominus \tilde{A}^*)/۳\tilde{\sigma}$ و $\tilde{d}^*(\alpha) = (d_l^*(\alpha), d_r^*(\alpha))$ و $\tilde{A}^*(\alpha) = (A_l^*(\alpha), A_r^*(\alpha))$ مجموعه‌های α -برش عدد (کمیت) فازی \tilde{C}_{pk}''' به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\tilde{C}_{pk}'''(\alpha) = \left(\frac{d_l^*(\alpha) - A_r^*(\alpha)}{۳\sqrt{\sigma_r^{\uparrow}(\alpha)}}, \frac{d_r^*(\alpha) - A_l^*(\alpha)}{۳\sqrt{\sigma_l^{\uparrow}(\alpha)}} \right); \quad 0 \leq \alpha \leq 1. \quad (۳۱)$$

با روی هم قرار دادن این مجموعه‌ها، کمیت (عدد) فازی \tilde{C}_{pk}''' حاصل می‌شود.

۳.۵ شاخص کارایی فازی \tilde{C}_{pmk}'''

این شاخص به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tilde{C}_{pmk}''' = \frac{\tilde{d}^* \ominus \tilde{A}^*}{\sqrt[3]{\tilde{\sigma}^2 \oplus \tilde{A}^2}}, \quad (32)$$

به قسمی که

$$\tilde{A} = \begin{cases} \frac{\tilde{d} \otimes (\tilde{\mu} \ominus \tilde{T})}{U_{SL} \ominus \tilde{T}}; & \max\{\tilde{\mu}, \tilde{T}\} = \tilde{\mu}, \\ \frac{\tilde{d} \otimes (\tilde{T} \ominus \tilde{\mu})}{\tilde{T} \ominus L_{SL}}; & \max\{\tilde{\mu}, \tilde{T}\} = \tilde{T}. \end{cases} \quad (33)$$

مجموعه‌های α -برش \tilde{A} عبارت‌اند از:

$$\tilde{A}(\alpha) = (A_l(\alpha), A_r(\alpha)), \quad (34)$$

که در آن

$$A_l(\alpha) = \begin{cases} \frac{d_l(\alpha)(\mu_l(\alpha) - T_r(\alpha))}{U_r(\alpha) - T_l(\alpha)}; & \max\{\tilde{\mu}, \tilde{T}\} = \tilde{\mu}, \\ \frac{d_l(\alpha)(T_l(\alpha) - \mu_r(\alpha))}{T_r(\alpha) - L_l(\alpha)}; & \max\{\tilde{\mu}, \tilde{T}\} = \tilde{T}, \end{cases} \quad (35)$$

و

$$A_r(\alpha) = \begin{cases} \frac{d_r(\alpha)(\mu_r(\alpha) - T_l(\alpha))}{U_l(\alpha) - T_r(\alpha)}; & \max\{\tilde{\mu}, \tilde{T}\} = \tilde{\mu}, \\ \frac{d_r(\alpha)(T_r(\alpha) - \mu_l(\alpha))}{T_l(\alpha) - L_r(\alpha)}; & \max\{\tilde{\mu}, \tilde{T}\} = \tilde{T}. \end{cases} \quad (36)$$

در نتیجه، مجموعه‌های α -برش شاخص کارایی فازی به صورت رابطه زیر به دست

می‌آید.

$$\tilde{C}_{pmk}'''(\alpha) = \left(\frac{d_l^*(\alpha) - A_r^*(\alpha)}{\sqrt[3]{\sigma_r^2(\alpha) + A_r^2(\alpha)}}, \frac{d_r^*(\alpha) - A_l^*(\alpha)}{\sqrt[3]{\sigma_l^2(\alpha) + A_l^2(\alpha)}} \right); \quad 0 \leq \alpha \leq 1. \quad (37)$$

با روی هم قرار دادن این بازه‌های α -برش، کمیت (عدد) فازی \tilde{C}_{pmk}''' حاصل می‌شود.

۴.۵ مثال کاربردی

در این زیربخش، شاخص‌های معرفی شده را بر روی مجموعه داده‌های استفاده شده توسط کایا و قهرمان^{۱۲} (۲۰۱۱) به کار گرفته، کارایی فرآیند را محاسبه می‌کنیم. داده‌های مورد نظر مربوط به یک فرآیند پیستون در منطقه صنعتی کنیا در ترکیه می‌باشد. تولیدات اصلی آن، روکش پیستون و رینگ پیستون است. در کاربرد، پیستون موتور ولوو مارین انتخاب می‌شود. مشخصه‌های قابل اندازه‌گیری پیستون، قطر پیستون، ارتفاع فشرده سازی، عمق کاسه، طول کلی، قطر محفظه احتراق، قطر سوزن و طول سوزن است. در اینجا مشخصه‌های قطر پیستون، قطر سوزن، طول سوزن و ارتفاع فشرده سازی مورد بررسی قرار می‌گیرند. داده‌ها در جدول ۱ آورده شده‌اند.

قطر پیستون حدود مشخصات فنی و مقدار هدف، اعداد فازی مثالی هستند. نمونه تصادفی به اندازه ۲۰۰ جمع‌آوری شده، واریانس و میانگین نمونه‌ای به ترتیب برابر با ۰/۰۰۰۰۰۹ و ۱۳۰/۱۸۰ محاسبه شده است. بنابراین، با استفاده از روابط مربوطه واریانس و میانگین فازی به دست می‌آید. شکل ۱ و ۲ نمودارهای توابع عضویت این اعداد فازی را نشان می‌دهد.

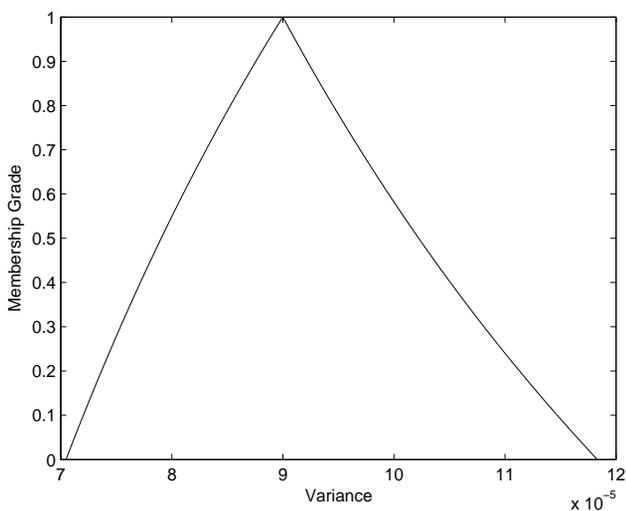
برای محاسبه شاخص کارایی فازی، ابتدا بایستی تعیین کنیم که میانگین فازی بزرگ‌تر از مقدار هدف فازی است یا خیر. با استفاده از تابع رتبه‌بندی و بازه‌های α -برش میانگین فازی، $R(\tilde{\mu}) = 130/180$ و به طور مشابه $R(\tilde{T}) = 130/180$ به دست می‌آید، در نتیجه $\tilde{\mu} =_R \tilde{T}$. با استفاده از شاخص \tilde{C}_{pk}''' ، کارایی این فرآیند تقریباً ۰/۹۸۱۶ به دست می‌آید. بر اساس شاخص \tilde{C}_{pmk}''' نیز مقدار کارایی فرآیند تقریباً ۰/۹۸۱۶

¹²Kaya and Kahraman

جدول ۱: داده‌های اندازه‌گیری شده فرآیند پیستون

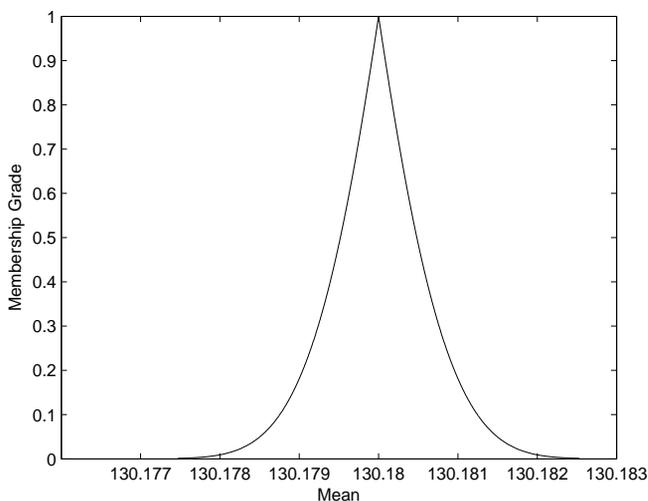
طول سوزن	قطر پیستون	
تقریباً بین ۱۱۴/۰۵۱ و ۱۱۴/۰۵۰	تقریباً ۱۳۰/۲۰۸	\widetilde{USL}
تقریباً بین ۱۱۳/۹۵۱ و ۱۱۳/۹۵۰	تقریباً ۱۳۰/۱۵۰	\widetilde{LSL}
تقریباً بین ۱۱۴/۰۲۱ و ۱۱۴/۰۲۰	تقریباً ۱۳۰/۱۸۰	\widetilde{T}
۱۵۰	۲۰۰	حجم نمونه
۱۱۴/۰۱۰	۱۳۰/۱۸۰	میانگین نمونه
۰/۰۰۰۰۰۷۷	۰/۰۰۰۰۰۹	واریانس نمونه
قطر سوزن	ارتفاع فشرده سازی	
تقریباً ۵۵/۰۱۵	تقریباً ۱۱۴/۲۲۶	\widetilde{USL}
تقریباً ۵۴/۹۸۵	تقریباً ۱۱۴/۱۷۴	\widetilde{LSL}
تقریباً ۵۵/۰۱۰	تقریباً ۱۱۴/۲۲۰	\widetilde{T}
۱۵۰	۲۰۰	حجم نمونه
۵۵/۰۰۱	۱۱۴/۲۰۰	میانگین نمونه
۰/۰۰۰۰۰۱۱	۰/۰۰۰۰۰۷۱	واریانس نمونه

حاصل می‌شود. نمودارهای توابع عضویت این دو شاخص در شکل‌های ۳ و ۴ نشان داده شده است.

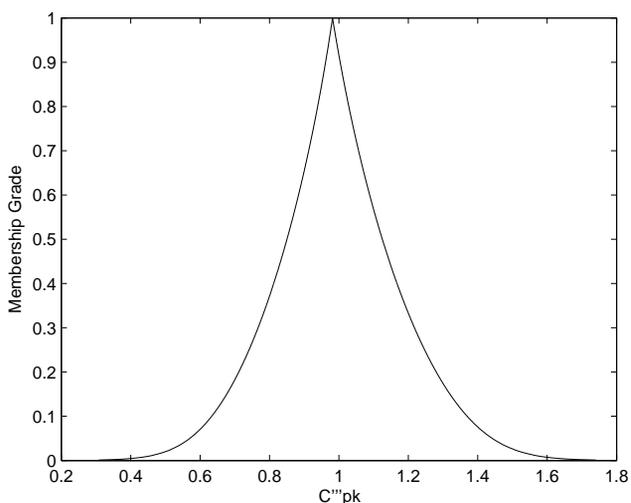


شکل ۱: نمودار تابع عضویت واریانس فازی (مربوط به قطر پیستون)

طول سوزن حدود مشخصات فنی و مقدار هدف کمیت‌های فازی دوزنقه‌ای هستند.

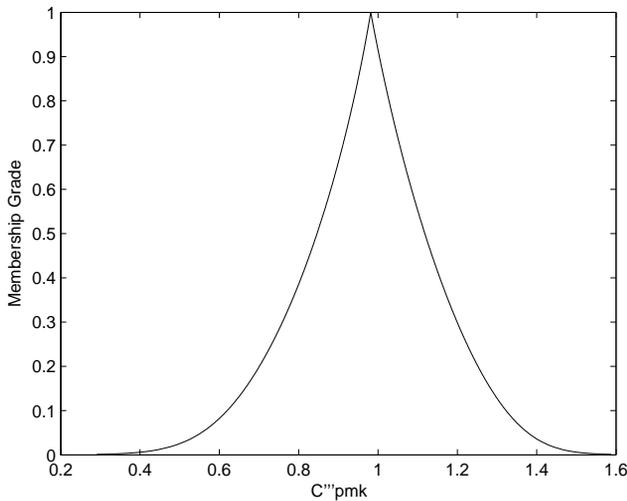


شکل ۲: نمودار تابع عضویت میانگین فازی (مربوط به قطر پیستون)



شکل ۳: نمودار تابع عضویت \tilde{C}_{pk}^{III} (مربوط به قطر پیستون)

نمونه تصادفی 150 تایی جمع‌آوری شده، مقادیر واریانس و میانگین نمونه‌ای به ترتیب برابر با 0.000077 و 114.10 به دست آمده است. نمودارهای توابع عضویت واریانس فازی و میانگین فازی مطابق با شکل‌های ۵ و ۶ می‌باشد.



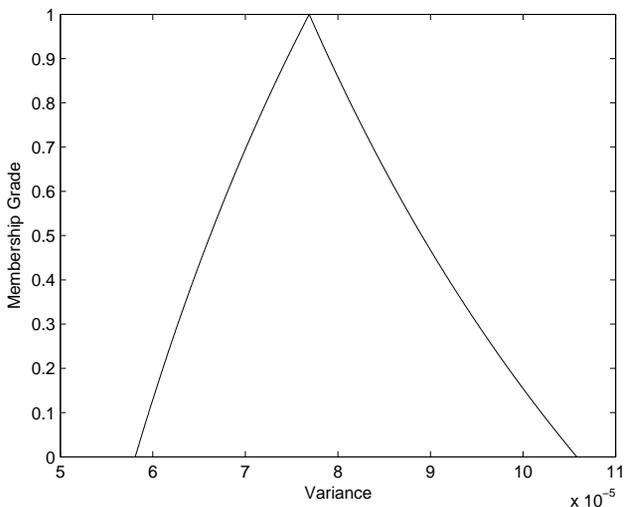
شکل ۴: نمودار تابع عضویت (مربوط به قطر پیستون) \tilde{C}'''_{pmk}

بر اساس تابع رتبه‌بندی، خواهیم داشت $R(\tilde{\mu}) = 114,01$ و $R(\tilde{T}) = 114,0205$. واضح است که $R(\tilde{\mu}) < R(\tilde{T})$ ، در نتیجه $\tilde{\mu} <_R \tilde{T}$ به بیان دیگر $\tilde{\mu} < \tilde{T}$. کارایی فرآیند بر اساس \tilde{C}'''_{pk} ، تقریباً بین $1,0357$ و $1,1248$ و بر اساس \tilde{C}'''_{pmk} ، تقریباً بین $0,7629$ و $0,8805$ حاصل شده است. شکل‌های ۷ و ۸ نمودارهای توابع عضویت این کمیت‌های فازی را نشان می‌دهد.

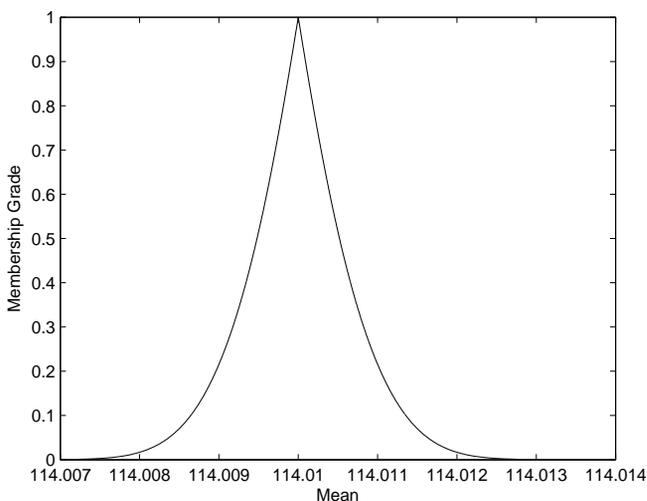
ارتفاع فشرده‌سازی حدود مشخصات فنی و مقدار هدف اعداد فازی مثلثی هستند. نمونه تصادفی به اندازه ۲۰۰ جمع‌آوری کرده، مقدار واریانس و میانگین نمونه‌ای به ترتیب برابر با $0,000071$ و $114,200$ حاصل شده است. شکل‌های ۹ و ۱۰ نمودارهای توابع عضویت واریانس فازی و میانگین فازی را نشان می‌دهد.

با استفاده از تابع رتبه‌بندی داریم $R(\tilde{\mu}) = 114,200$ و $R(\tilde{T}) = 114,220$. بنابراین، $R(\tilde{\mu}) < R(\tilde{T})$ و در نتیجه $\tilde{\mu} <_R \tilde{T}$. پس $\tilde{\mu} < \tilde{T}$ در نتیجه، کارایی فرآیند بر اساس شاخص \tilde{C}'''_{pk} ، تقریباً $-0,1066$ و بر اساس \tilde{C}'''_{pmk} ، تقریباً $-0,0097$ با نمودارهای توابع عضویت نشان داده شده در شکل‌های ۱۱ و ۱۲ حاصل می‌شود.

قطر سوزن حدود مشخصات فنی و مقدار هدف اعداد فازی مثلثی هستند. بر

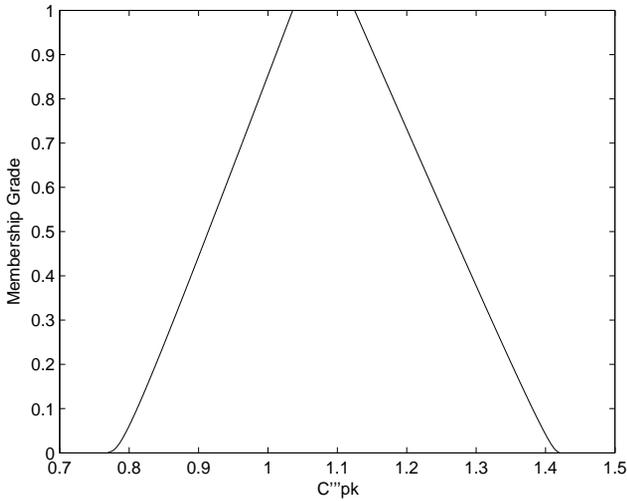


شکل ۵: نمودار تابع عضویت واریانس فازی (مربوط به طول سوزن)

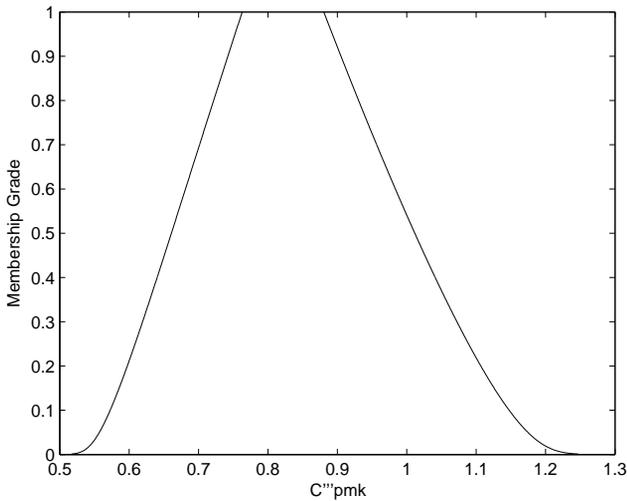


شکل ۶: نمودار تابع عضویت میانگین فازی (مربوط به طول سوزن)

اساس نمونه تصادفی جمع‌آوری شده به اندازه 150 واریانس نمونه‌ای برابر با 0.00011 و میانگین نمونه‌ای برابر با 55.001 به دست آمده است. بنابراین، واریانس فازی و میانگین فازی با نمودارهای توابع عضویت آورده شده در شکل‌های 13 و 14 حاصل می‌شود. با استفاده از تابع رتبه‌بندی $R(\tilde{\mu}) = 55.001$ و $R(\tilde{T}) = 55.010$ حاصل می‌شود.

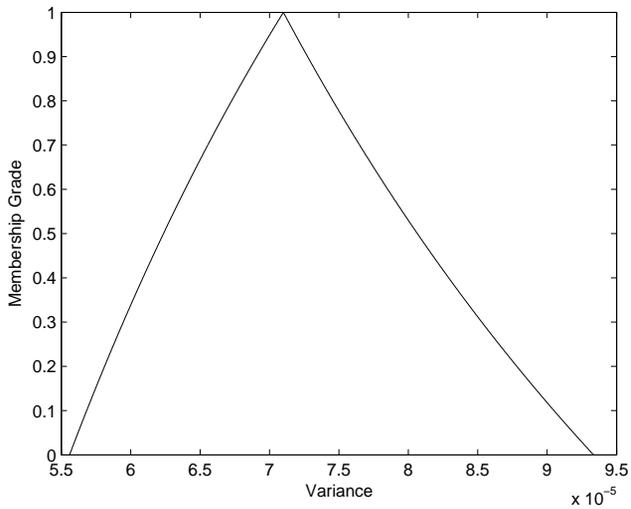


شکل ۷: نمودار تابع عضویت (مربوط به طول سوزن) \tilde{C}'''_{pk}

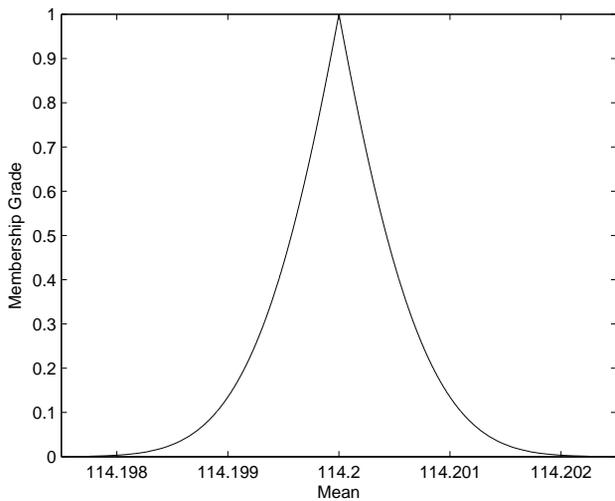


شکل ۸: نمودار تابع عضویت (مربوط به طول سوزن) \tilde{C}'''_{pmk}

بنابراین $R(\tilde{\mu}) < R(\tilde{T})$ ، پس $\tilde{\mu} <_R \tilde{T}$ و در نتیجه $\max\{\tilde{\mu}, \tilde{T}\} = \tilde{T}$. شاخص \tilde{C}'''_{pk} مقدار تقریباً ۰٫۱۷۶۹ و شاخص \tilde{C}'''_{pmk} مقدار تقریباً ۰٫۱۰۱ را به کارایی فرآیند نسبت می‌دهد. نمودارهای توابع عضویت این اعداد فازی در شکل‌های ۱۵ و ۱۶ آورده شده



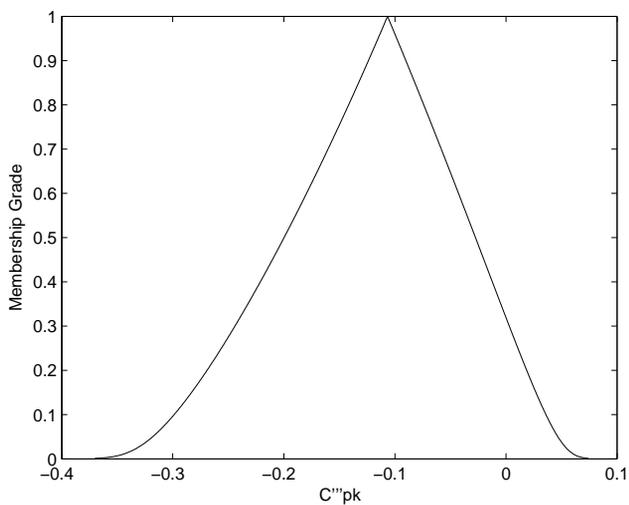
شکل ۹: نمودار تابع عضویت واریانس فازی (مربوط به ارتفاع فشرده‌سازی)



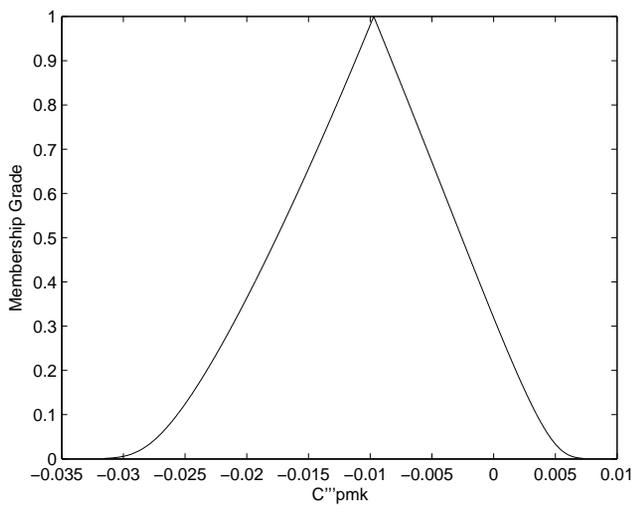
شکل ۱۰: نمودار تابع عضویت میانگین فازی (مربوط به ارتفاع فشرده‌سازی)

است.

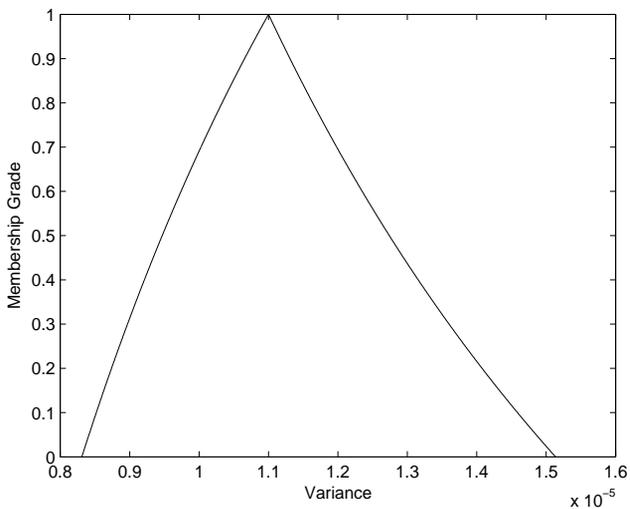
جدول ۲ مقادیر کارایی فرآیند برای هر چهار مشخصه مورد بحث، بر اساس شاخص‌های معرفی‌شده را نشان می‌دهد.



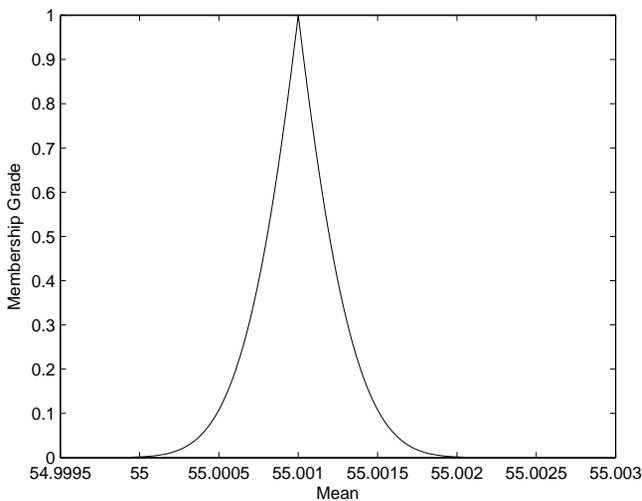
شکل ۱۱: نمودار تابع عضویت (مربوط به ارتفاع فشرده‌سازی) \tilde{C}'''_{pk}



شکل ۱۲: نمودار تابع عضویت (مربوط به ارتفاع فشرده‌سازی) \tilde{C}''''_{pmk}



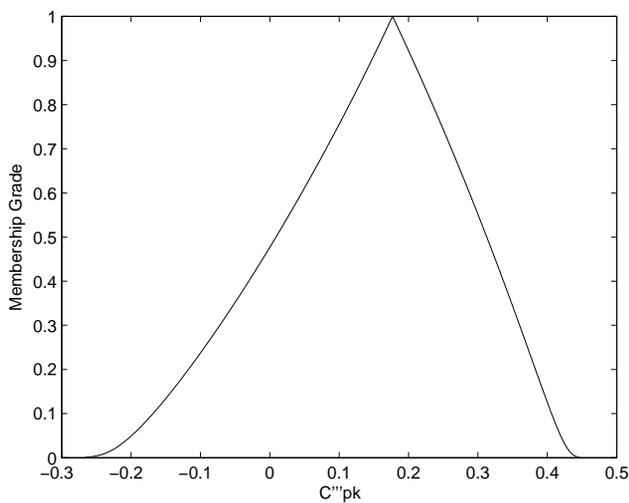
شکل ۱۳: نمودار تابع عضویت واریانس فازی (مربوط به قطر سوزن)



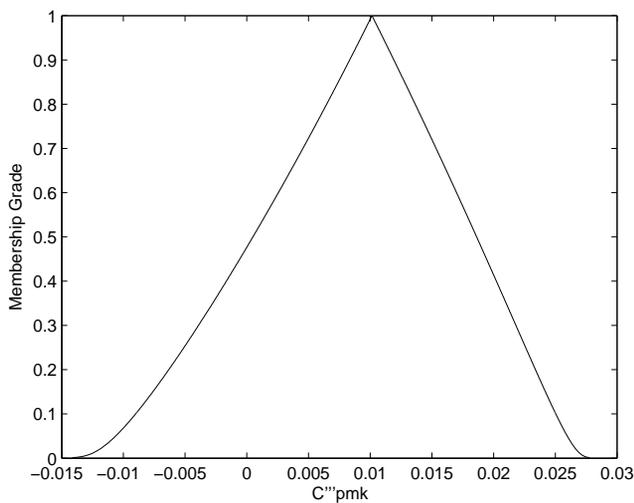
شکل ۱۴: نمودار تابع عضویت میانگین فازی (مربوط به قطر سوزن)

۶ شاخص‌های کارایی چندمتغیره فازی

فرض کنید حدود مشخصات فنی و مقدار هدف هر مشخصه فازی باشد. در این بخش، یک شاخص کارایی چندمتغیره فازی و یک بردار کارایی چندمتغیره فازی را معرفی



شکل ۱۵: نمودار تابع عضویت (مربوط به قطر سوزن) \tilde{C}'''_{pk}



شکل ۱۶: نمودار تابع عضویت (مربوط به قطر سوزن) \tilde{C}'''_{pmk}

می‌کنیم.

جدول ۲: مقادیر شاخص‌های کارایی فازی برای مشخصات مورد بحث

طول سوزن	قطر پیستون	
تقریباً بین ۱/۰۳۵۷ و ۱/۱۲۴۸	تقریباً ۰/۹۸۱۶	\tilde{C}_{pk}'''
تقریباً بین ۰/۷۶۲۹ و ۰/۸۸۰۵	تقریباً ۰/۹۸۱۶	\tilde{C}_{pmk}'''
قطر سوزن	ارتفاع فشرده‌سازی	
تقریباً ۰/۱۷۶۹	تقریباً ۰/۱۰۶۶-	\tilde{C}_{pk}'''
تقریباً ۰/۱۰۱	تقریباً ۰/۰۰۹۷-	\tilde{C}_{pmk}'''

۱.۶ شاخص کارایی چندمتغیره فازی

شاخص کارایی فازی \widetilde{MC}_{pm} به صورت زیر است:

$$\widetilde{MC}_{pm} = \frac{\widetilde{MC}_p}{\widetilde{D}}. \quad (38)$$

برای به دست آوردن \widetilde{MC}_{pm} ، ابتدا مجموعه‌های α -برش آن را به دست می‌آوریم. سپس، با روی هم قرار دادن این مجموعه‌ها، کمیت (عدد) فازی \widetilde{MC}_{pm} حاصل می‌شود. بر اساس نمونه تصادفی جمع‌آوری شده از فرایند، برآورد شاخص کارایی فازی فوق عبارت است از:

$$\widetilde{MC}_{pm}(\alpha) = [\widetilde{MC}_{pml}(\alpha), \widetilde{MC}_{pmr}(\alpha)] = \left[\frac{\widehat{MC}_{pl}(\alpha)}{\widehat{D}_r(\alpha)}, \frac{\widehat{MC}_{pr}(\alpha)}{\widehat{D}_l(\alpha)} \right]. \quad (39)$$

به قسمی که

$$\begin{aligned} \widehat{MC}_{pl}(\alpha) &= \frac{\alpha\text{-برش چپ حجم بیضی‌گون با شعاع‌های فازی ناحیه تلورانس اصلاح شده فرآیند}}{\text{حجم } 99.73\% \text{ ناحیه فرآیند}}, \\ \widehat{MC}_{pr}(\alpha) &= \frac{\alpha\text{-برش راست چپ حجم بیضی‌گون با شعاع‌های فازی ناحیه تلورانس اصلاح شده فرآیند}}{\text{حجم } 99.73\% \text{ ناحیه فرآیند}}. \end{aligned}$$

شعاع‌های فازی بیضی‌گون ناحیه تلورانس اصلاح شده فرآیند را طبق رابطه زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\tilde{r}_i = \min\{\widetilde{USL}_i \ominus \tilde{T}_i, \tilde{T}_i \ominus \widetilde{LSL}_i\}, \quad i = 1, 2, \dots, p. \quad (40)$$

برای به دست آوردن \tilde{r}_i ، از تابع رتبه‌بندی مذکور استفاده می‌کنیم. در نتیجه، می‌توانیم حجم بیضی‌گون را محاسبه کنیم.

ملاحظه ۱.۰۶. برای فرآیندی با دو مشخصه، ناحیه تلورانس اصلاح شده یک بیضی است و \widetilde{MC}_p بر اساس $vol.(\tilde{R}_1) = \pi \otimes \tilde{r}_1 \otimes \tilde{r}_2$ ، که \tilde{r}_1 و \tilde{r}_2 شعاع‌های بیضی هستند، به دست می‌آید.

بازه‌های α -برش عامل فوق را به دست می‌آوریم. از آنجا که $\tilde{r}_1(\alpha) = [r_{1l}(\alpha), r_{1r}(\alpha)]$ و $\tilde{r}_2(\alpha) = [r_{2l}(\alpha), r_{2r}(\alpha)]$ خواهیم داشت:

$$vol.(\tilde{R}_1)(\alpha) = [\pi r_{1l}(\alpha)r_{2l}(\alpha), \pi r_{1r}(\alpha)r_{2r}(\alpha)].$$

بنابراین، بازه‌های α -برش \widetilde{MC}_p عبارت‌اند از:

$$\widetilde{MC}_p(\alpha) = [MC_{pl}(\alpha), MC_{pr}(\alpha)] = \left[\frac{r_{1l}(\alpha)r_{2l}(\alpha)}{|\mathbf{S}|^{1/2} \chi_{1, \rho, \infty}^2}, \frac{r_{1r}(\alpha)r_{2r}(\alpha)}{|\mathbf{S}|^{1/2} \chi_{1, \rho, \infty}^2} \right].$$

مجموعه‌های α -برش کمیت (عدد) فازی \tilde{D} برابرند با:

$$\tilde{D}(\alpha) = [\hat{D}_l(\alpha), \hat{D}_r(\alpha)], \tag{41}$$

که در آن

$$\hat{D}_l(\alpha) = \min \left\{ \left[1 + \frac{n}{n-1} \begin{pmatrix} \bar{X}_1 - t_1 \\ \bar{X}_2 - t_2 \\ \vdots \\ \bar{X}_p - t_p \end{pmatrix}' \mathbf{S}^{-1} \begin{pmatrix} \bar{X}_1 - t_1 \\ \bar{X}_2 - t_2 \\ \vdots \\ \bar{X}_p - t_p \end{pmatrix} \right]^{1/2}; \right. \\ \left. t_i \in T_{ij}(\alpha), \quad i = \{1, 2, \dots, p\}, \quad j = \{l, r\} \right\}, \tag{42}$$

$$\widehat{D}_r(\alpha) = \max \left\{ \left[1 + \frac{n}{n-1} \begin{pmatrix} \bar{X}_1 - t_1 \\ \bar{X}_2 - t_2 \\ \vdots \\ \bar{X}_p - t_p \end{pmatrix}' \mathbf{S}^{-1} \begin{pmatrix} \bar{X}_1 - t_1 \\ \bar{X}_2 - t_2 \\ \vdots \\ \bar{X}_p - t_p \end{pmatrix} \right]^{1/2}; \right. \\ \left. t_i \in T_{ij}(\alpha), \quad i = \{1, 2, \dots, p\}, \quad j = \{l, r\} \right\}. \quad (43)$$

قاعده تصمیم: برای تصمیم گیری در مورد کارا بودن فرآیند، بایستی شاخص \widehat{MC}_{pm} را با عدد فازی ۱ مقایسه کنیم و این کار را با استفاده از تابع رتبه بندی مذکور انجام می دهیم. به این طریق که می نیم این شاخص و عدد فازی ۱ را تعیین می کنیم. اگر عدد فازی ۱ می نیمم باشد، آن گاه نتیجه می گیریم که فرآیند کارا است. در غیر این صورت، فرآیند ناکارا می باشد.

۲.۶ بردار کارایی چندمتغیره فازی

بردار کارایی فازی برابر با $[N\widehat{MC}_{pm}, \widehat{PV}, LI]$ است که مؤلفه های آن به صورت زیر می باشند:
مؤلفه اول:

$$\widehat{NMC}_{pm} = \frac{\tilde{c}}{\sqrt{\chi_{p,0.0027}^2}}, \quad (44)$$

به قسمی که

$$\tilde{c} = \min \left\{ \min \left\{ \frac{\widehat{USL}_i \ominus \tilde{T}_i}{\sqrt{\sigma_{ii}}}, \frac{\tilde{T}_i \ominus \widehat{LSL}_i}{\sqrt{\sigma_{ii}}} \right\}; \quad i = 1, 2, \dots, p \right\}. \quad (45)$$

بر اساس نمونه تصادفی جمع‌آوری شده، این شاخص را با استفاده از رابطه زیر برآورد می‌کنیم:

$$\widetilde{NMC}_{pm} = \frac{\widetilde{c}'}{\sqrt{\chi_{p,0.90}^2}}, \quad (46)$$

که در آن

$$\widetilde{c}' = \min \left\{ \min \left\{ \frac{\widetilde{USL}_i \ominus \widetilde{T}_i}{\sqrt{s_{ii}}}, \frac{\widetilde{T}_i \ominus \widetilde{LSL}_i}{\sqrt{s_{ii}}} \right\}; \quad i = 1, 2, \dots, p \right\}. \quad (47)$$

برای یافتن \widetilde{c}' ، ابتدا بازه‌های α -برش هر عامل در رابطه فوق را به روش زیر به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \frac{\widetilde{USL}_i \ominus \widetilde{T}_i}{\sqrt{s_{ii}}}(\alpha) &= \left(\frac{u_l(\alpha) - t_r(\alpha)}{\sqrt{s_{ii}}}, \frac{u_r(\alpha) - t_l(\alpha)}{\sqrt{s_{ii}}} \right), \\ \frac{\widetilde{T}_i \ominus \widetilde{LSL}_i}{\sqrt{s_{ii}}}(\alpha) &= \left(\frac{t_l(\alpha) - l_r(\alpha)}{\sqrt{s_{ii}}}, \frac{t_r(\alpha) - l_l(\alpha)}{\sqrt{s_{ii}}} \right). \end{aligned} \quad (48)$$

سپس، از تابع رتبه‌بندی استفاده کرده، کمیت (عدد) فازی \widetilde{c}' را با استفاده از بازه‌های α -برش آن به دست آورده و در نتیجه، \widetilde{NMC}_{pm} حاصل می‌شود.

مؤلفه دوم: p -مقدار فازی است که بازه‌های α -برش آن را با روابط زیر به دست می‌آوریم:

$$PV_l(\alpha) = \min \left\{ P_r \left(F_{p,n-p} > \frac{n(n-p)}{p(n-1)} \begin{pmatrix} \bar{X}_1 - t_1 \\ \bar{X}_r - t_r \\ \vdots \\ \bar{X}_p - t_p \end{pmatrix}' \mathbf{S}^{-1} \begin{pmatrix} \bar{X}_1 - t_1 \\ \bar{X}_r - t_r \\ \vdots \\ \bar{X}_p - t_p \end{pmatrix} \right); \right. \\ \left. t_i \in T_{ij}(\alpha), i = \{1, 2, \dots, p\}, j = \{l, r\} \right\}, \quad (49)$$

$$PV_r(\alpha) = \max \left\{ P_r \left(F_{p,n-p} > \frac{n(n-p)}{p(n-1)} \begin{pmatrix} \bar{X}_1 - t_1 \\ \bar{X}_r - t_r \\ \vdots \\ \bar{X}_p - t_p \end{pmatrix}' \mathbf{S}^{-1} \begin{pmatrix} \bar{X}_1 - t_1 \\ \bar{X}_r - t_r \\ \vdots \\ \bar{X}_p - t_p \end{pmatrix} \right); \right. \\ \left. t_i \in T_{ij}(\alpha), i = \{1, 2, \dots, p\}, j = \{l, r\} \right\}. \quad (50)$$

ملاحظه ۲.۶. معادلات فوق چندین جواب به دست می‌دهد، اما جوابی را انتخاب می‌کنیم که به ازای هر $\alpha, \beta \in [0, 1]$ به قسمی که $\alpha < \beta$ باشد، در شرط زیر صدق کند:

$$PV_l(\alpha) \leq PV_l(\beta) \leq PV_l(1) = PV_r(1) \leq PV_r(\beta) \leq PV_r(\alpha) \quad (51)$$

بنابراین، می‌توانیم p -مقدار فازی را با استفاده از بازه‌های α -برش آن به دست بیاوریم.

مؤلفه سوم: برای به دست آوردن سومین مؤلفه، حدود مشخصات و مقدار هدف را غیرفازی کرده، سپس، بر اساس هندسه بیضی‌گون‌های تلورانس و فرآیند مقدار این مؤلفه را تعیین می‌کنیم. برای غیرفازی کردن از تابع رتبه‌بندی R استفاده می‌کنیم. قاعده تصمیم: فرآیند کارا خواهد بود اگر تغییرپذیری فرآیند کمتر از تغییرپذیری تلورانس باشد و بردار میانگین فرآیند از بردار هدف دور نباشد و مقدار مؤلفه سوم، برابر با یک باشد.

برای تصمیم‌گیری در مورد مؤلفه اول، بایستی شاخص \widetilde{NMC}_{pm} را با عدد فازی ۱ با به کار گرفتن تابع رتبه‌بندی، مقایسه کنیم. می‌نیم این شاخص و عدد فازی ۱ را به دست می‌آوریم. اگر می‌نیم، عدد فازی ۱ حاصل شود، آنگاه نتیجه می‌گیریم که تغییرپذیری فرآیند کمتر از تغییرپذیری تلورانس است.

برای تصمیم‌گیری در مورد مؤلفه دوم، ابتدا درجه‌ای از عدم قطعیت مثل γ (عددی بین ۰ و ۱) تعیین می‌کنیم. بنابراین یکی از حالات زیر برقرار می‌باشد:

- اگر $PV_l(\gamma) > 0.05$ باشد، آنگاه بردار میانگین فرآیند از بردار هدف دور نیست.
- اگر $PV_r(\gamma) < 0.05$ باشد، آنگاه بردار میانگین فرآیند از بردار هدف دور است.

- اگر $PV_l(\gamma) \leq 0.05 \leq PV_r(\gamma)$ ، آن‌گاه نمی‌توان تصمیم‌گیری کرد و نیاز به انتخاب نمونه بیشتر و انجام مراحل فوق تا رسیدن به یک تصمیم است.

۳.۶ مثال‌های کاربردی

در این زیربخش، شاخص‌های پیشنهاد شده را در دو مثال به کار می‌گیریم. مثال اول به فرآیندی مربوط می‌شود که حدود مشخصات و مقدار هدف، اعداد فازی مثلثی هستند و در فرآیند دوم، این عوامل کمیت‌های فازی دوزنقه‌ای هستند.

فرآیند چاپ فیلم عکاسی در این مثال، کارایی فرآیند دو متغیره مربوط به چاپ فیلم عکاسی که توسط جکسون^{۱۳} (۱۹۵۶) مطالعه شده است را با استفاده از شاخص‌های جدید معرفی شده محاسبه می‌کنیم. در فرآیند چاپ فیلم عکاسی، دو مؤلفه لون (E) و هیدروگینون (H) مورد کنترل قرار می‌گیرند. فرض کنید حدود مشخصات و مقدار هدف، اعداد فازی مثلثی مطابق جدول ۳ باشند. نمونه‌ای به اندازه ۷۵ (بردارها با درآیه‌های

جدول ۳: مقادیر \widetilde{USL} ، \widetilde{LSL} و \widetilde{T} برای فرآیند چاپ فیلم عکاسی

هیدروگینون	لون	
$T(499, 500, 501)$	$T(294, 295, 296)$	\widetilde{USL}
$T(439, 440, 441)$	$T(234, 235, 236)$	\widetilde{LSL}
$T(469, 470, 471)$	$T(264, 265, 266)$	\widetilde{T}

غیرفازی) جمع‌آوری شده، بردار میانگین نمونه‌ای و ماتریس واریانس-کوواریانس نمونه‌ای به صورت زیر به دست آمده است:

$$\bar{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} 264.32 \\ 471.48 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 102.65 & 68.87 \\ 68.87 & 107.96 \end{pmatrix}.$$

مقدار شاخص \widetilde{MC}_p تقریباً ۰.۸۵۵۶ و بنابراین، شاخص \widetilde{MC}_{pm} مقدار تقریباً ۰.۹۲۵۵ را می‌پذیرد. در واقع $\widetilde{MC}_{pm} = T(0.4741, 0.9255, 1.0861)$. شکل ۱۷

¹³Jackson

نمودار تابع عضویت این شاخص را نشان می‌دهد.

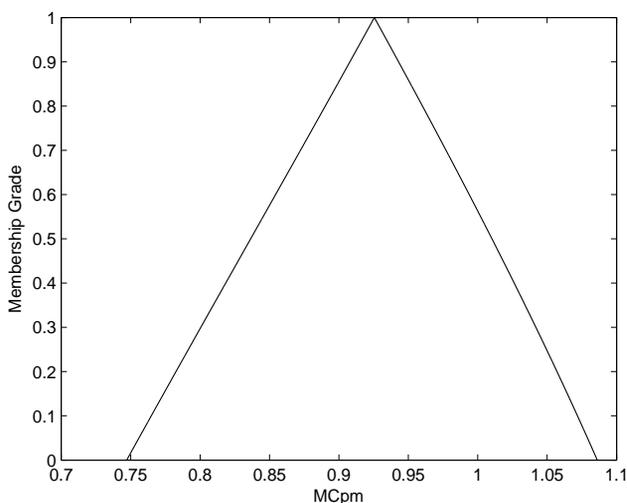
تصمیم‌گیری: بر اساس تابع رتبه‌بندی، $R(\widetilde{MC}_{pm}) = 0.82105$. بنابراین $\widetilde{MC}_{pm} < R$ نتیجه می‌شود که فرآیند ناکارا است.

به علاوه $\tilde{c} = T(28/\sqrt{10796}, 30/\sqrt{10796}, 32/\sqrt{10796})$ به دست می‌آید. در این صورت، مؤلفه اول بردار کارایی فازی، تقریباً 0.8395 حاصل می‌شود به صورت:

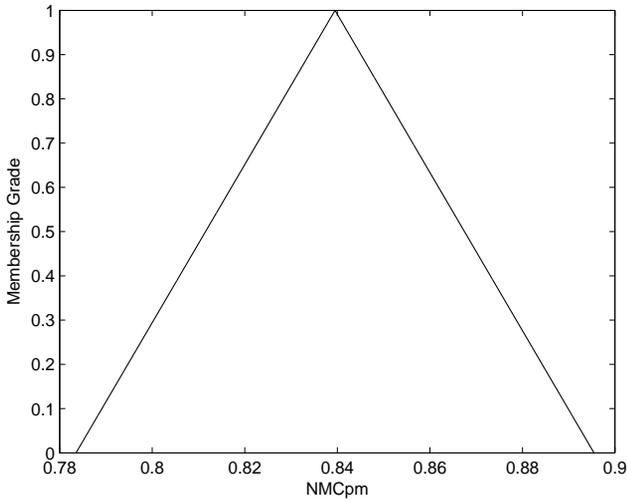
$$\widetilde{NMC}_{pm} = T(0.784, 0.8395, 0.895).$$

نمودار تابع عضویت این شاخص در شکل ۱۸ نشان داده شده است.

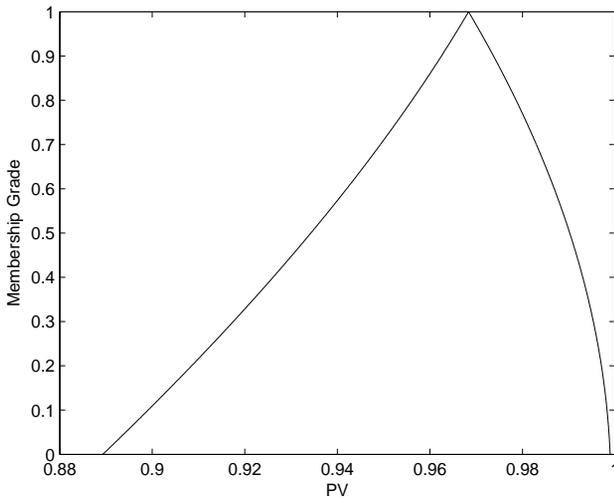
مقدار PV تقریباً 0.9684 به دست می‌آید. بر اساس بازه‌های α -برش تابع عضویت p -مقدار فازی، همان‌گونه که در شکل ۱۹ نشان داده شده است، حاصل می‌شود. برای غیرفازی کردن حدود مشخصات و مقدار هدف دو مشخصه، از تابع رتبه‌بندی استفاده شده است. شکل ۲۰ حدود مشخصات، مقدار هدف دقیق (غیرفازی) و ناحیه‌ای که 99.73% فرآیند را می‌پوشاند، نشان می‌دهد. به وضوح دیده می‌شود ناحیه‌ای که 99.73% فرآیند را پوشش می‌دهد، کاملاً در داخل ناحیه تلورانس قرار نداشته و در نتیجه $LI = 0$ حاصل می‌شود.



شکل ۱۷: نمودار تابع عضویت (مربوط به فرآیند چاپ فیلم عکاسی) \widetilde{MC}_{pm}

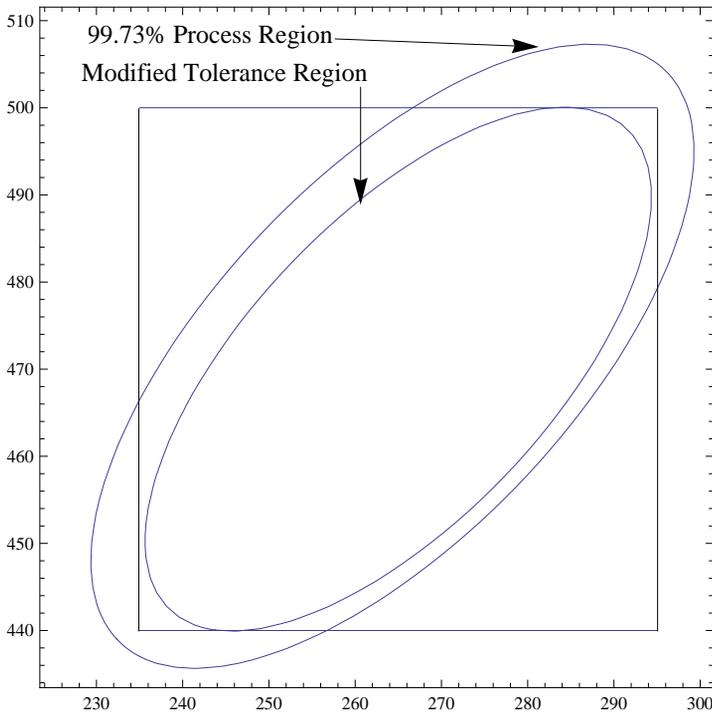


شکل ۱۸: نمودار تابع عضویت (مربوط به فرایند چاپ فیلم عکاسی) \widetilde{NMC}_{pm}



شکل ۱۹: نمودار تابع عضویت (مربوط به فرایند چاپ فیلم عکاسی) \widetilde{PV}

تصمیم‌گیری: در ارتباط با مؤلفه اول، داریم: $R(\widetilde{NMC}_{pm}) = 0.8395$ ، سپس $\widetilde{NMC}_{pm} <_R$ در ارتباط با مؤلفه دوم، درجه عدم قطعیت (ابهام) را 0.75 در نظر می‌گیریم. بنابراین، $\widetilde{PV}(0.75) = [0.8528, 0.8809]$ ، واضح است که



شکل ۲۰: هندسه ناحیه تلورانس اصلاح شده و بیضی فرایند (مربوط به فرایند چاپ فیلم عکاسی)

از طرفی، مقدار مؤلفه سوم برابر صفر است. بنابراین، فرآیند ناکارا است و تغییرپذیری غیرمجاز سبب آن شده است.

فرایند تولید مواد اولیه در فرآیند تولید یک نوع مواد اولیه، دو مشخصه سختی برینل (BH) و استحکام کششی (TS) مورد بررسی قرار می‌گیرند. حدود مشخصات فنی و مقدار هدف، کمیت‌های فازی دوزنقه‌ای هستند که در جدول ۴ آورده شده است.

جدول ۴: مقادیر USL ، LSL و \tilde{T} برای فرایند تولید مواد اولیه

قدرت کشش	سختی برینل	
$T_r(۷۲, ۷۲۳, ۷۴۳, ۷۴۶)$	$T_r(۲۴۰, ۲۴۰۳, ۲۴۲۳, ۲۴۲۶)$	\overline{USL}
$T_r(۳۱, ۳۱۷, ۳۳۷, ۳۴)$	$T_r(۱۱۱, ۱۱۱۷, ۱۱۳۷, ۱۱۴)$	\overline{LSL}
$T_r(۵۲, ۵۲۵, ۵۳۵, ۵۴)$	$T_r(۱۷۶, ۱۷۶۵, ۱۷۷۵, ۱۷۸)$	\tilde{T}

داده‌ها شامل ۲۵ مشاهده می‌باشد. بردار میانگین نمونه‌ای برابر با $\bar{X} = [177.2, 52.32]'$ و ماتریس واریانس-کوواریانس نمونه‌ای به صورت زیر به دست آمد:

$$S = \begin{pmatrix} 337.8 & 58.3308 \\ 58.3308 & 33.6247 \end{pmatrix}.$$

برآورد \widehat{MC}_p ، کمیت فازی ذوزنقه‌ای تقریباً بین ۱۵۶۳۱ و ۱۸۹۹۲ و بنابراین، برآورد \widehat{MC}_{pm} برابر با تقریباً بین ۱۴۸۶۷ و ۱۸۸۷۴ حاصل می‌شود و نمودار توابع عضویت آن در شکل ۲۱ نشان داده شده است.

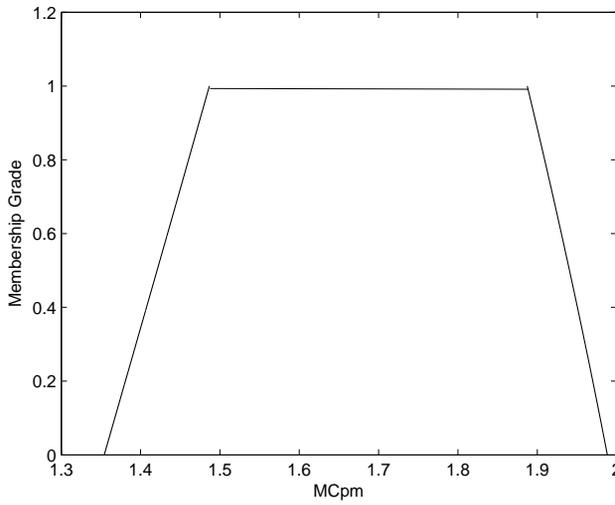
تصمیم‌گیری: از آنجا که مقدار \widehat{MC}_{pm} از \bar{A} بزرگ‌تر است، نتیجه می‌شود که فرآیند کارا است.

علاوه بر این، برآورد \tilde{c} کمیت فازی ذوزنقه‌ای و اولین مؤلفه بردار کارایی چند متغیره فازی برابر با تقریباً بین ۰.۹۹۳۵ و ۱.۰۴۰۹ حاصل می‌شود. نمودار تابع عضویت این مؤلفه در شکل ۲۲ آورده شده است.

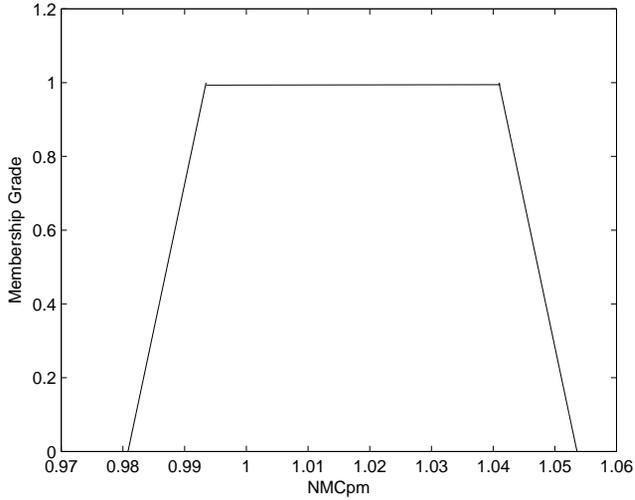
مقدار \widehat{PV} تقریباً بین ۰.۸۵۳۰ و ۰.۹۹۴۳ حاصل می‌شود. شکل ۲۳ نمودار تابع عضویت p -مقدار فازی را نشان می‌دهد.

در شکل ۲۴ دیده می‌شود که ناحیه‌ای که ۹۹.۷۳٪ فرآیند را پوشش می‌دهد، به طور جزئی خارج از ناحیه تلورانس قرار می‌گیرد. بنابراین، مؤلفه سوم عبارت است از $LI = 0$.

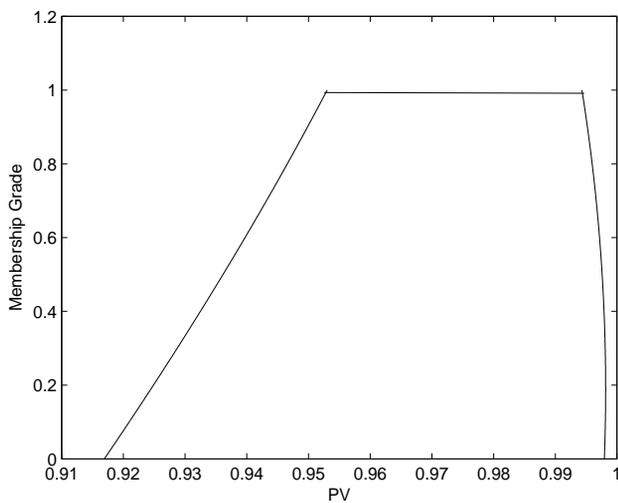
تصمیم‌گیری: از آنجا که $R(\widehat{NMC}_{pm}) = 1.0172$ بزرگ‌تر از ۱ است، خواهیم داشت $\widehat{NMC}_{pm} > R$. برای تصمیم‌گیری در ارتباط با مؤلفه دوم، درجه عدم قطعیت را ۰.۷۵ در نظر می‌گیریم. در این صورت، $\widehat{PV}(0.75) = [0.8949, 0.8963]$. واضح است که $PV_l(0.75) > 0.5$. در نتیجه بردار میانگین از بردار هدف دور نیست. اما، با توجه به اینکه مقدار مؤلفه سوم صفر شده است، نتیجه می‌شود که فرآیند به دلیل تغییرپذیری بیشتر از حد مجاز، ناکارا است.



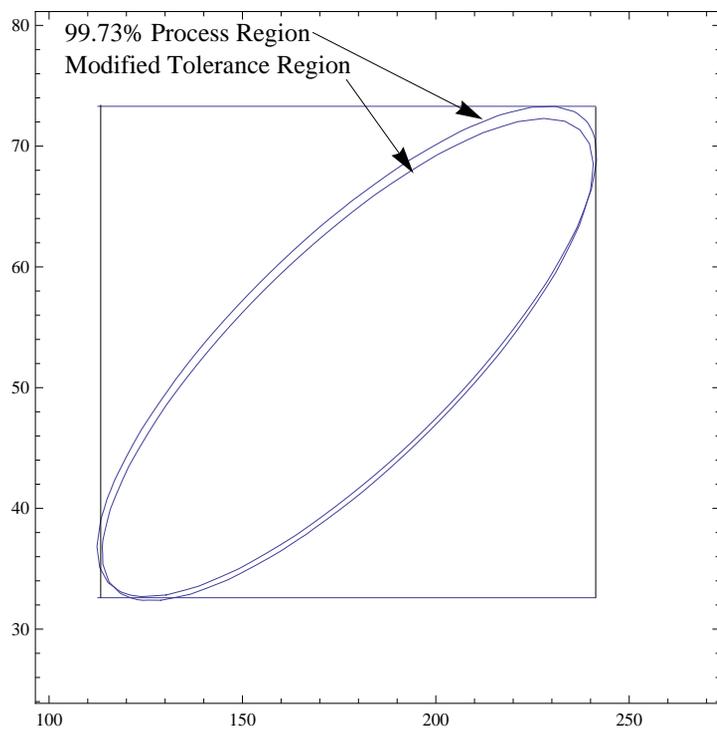
شکل ۲۱: نمودار تابع عضویت (مربوط به فرایند تولید مواد اولیه) \widetilde{MC}_{pm}



شکل ۲۲: نمودار تابع عضویت (مربوط به فرایند تولید مواد اولیه) \widetilde{NMC}_{pm}



شکل ۲۳: نمودار تابع عضویت (مربوط به فرایند تولید مواد اولیه) PV



شکل ۲۴: هندسه ناحیه تلورانس اصلاح شده و بیضی فرایند (مربوط به فرایند تولید مواد اولیه)

۷ نتیجه‌گیری و کارهای آینده

در دنیای واقعی، بسیاری از اندازه‌گیری‌ها نادقیق هستند که با استفاده از اعداد/کمیت‌های فازی تعریف می‌شوند. در این مقاله، برای فریندهایی که کیفیت محصولات مورد بررسی به یک مشخصه بستگی دارد، دو شاخص کارایی یک‌متغیره فازی \tilde{C}_{pk}''' و \tilde{C}_{pmk}''' ارائه شده است. به علاوه، برای فرایندهایی که کیفیت محصولات مورد نظر به دو یا چند مشخصه مربوط است، شاخص کارایی چندمتغیره فازی \widetilde{MC}_{pm} و بردار کارایی چندمتغیره فازی $NMPCV$ معرفی شده است. برای نشان دادن طریقه استفاده و تفسیر شاخص‌های معرفی شده برای تصمیم‌گیری در خصوص میزان کارایی فرایند، مثال‌های کاربردی ارائه شده است.

تحقیقات آتی در ارتباط با معرفی بردار ناکارایی چندمتغیره در محیط فازی و هم‌چنین، معرفی شاخص‌های کارایی فازی برای پروفایل‌ها خواهد بود.

مراجع

- [۱] عباسی گنجی، ز. (۱۳۹۵) مباحثی بر شاخص‌های کارایی فرایند، رساله دکتری، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران.
- [2] Abbasi Ganji, Z., and Sadeghpour Gildeh, B. (2016) A class of process capability indices for asymmetric tolerances, *Quality Engineering*, 28 (4), 441-454.
- [3] Abbasi Ganji, Z., and Sadeghpour Gildeh, B. (2016) Fuzzy multivariate process capability vector, *Journal of Intelligent & Fuzzy systems*, 30, 1007-1017.
- [4] Abbasi Ganji, Z., and Sadeghpour Gildeh, B. (2017) A new fuzzy process capability index for asymmetric tolerance interval, *International Journal of Fuzzy Systems Applications*, 6 (3), 74-104.
- [5] Chen, K. S. and Pearn, W. L. (2001) Capability indices for process with asymmetric tolerances, *Journal of the Chinese Institute of Engineers*, 24 (5), 559-568.

- [6] Fortemps, P. and Roubens, M. (1996) Ranking and defuzzification methods based on area compensation, *Fuzzy Sets and Systems*, 82, 319-330.
- [7] Kaya, I., and Kahraman, C. (2011) Fuzzy process capability indices with asymmetric tolerances, *Expert Systems with Applications*, 38, 14882-14890.
- [8] Jackson, J. E. (1956) Quality control methods for two related variables, *Industrial Quality Control*, 12, 4-8.
- [9] Juran, J. M. (1974) *Juran's Quality Control Handbook*. New York: McGraw-Hill.
- [10] Shahriari, H. and Abdollahzadeh, M. (2009) A new multivariate process capability vector. *Quality Engineering*, 21 (3), 290-299.
- [11] Shahriari, H., Hubele, N. F. and Lawrence, F. P. (1995) A multivariate process capability vector. In: 4th *Industrial Engineering Research Conference*, 304-309.
- [12] Taam W. Subbaiah P. and Liddy J. W. (1993) A note on multivariate capability indices, *Journal of Applied Statistics*, 20, 339-351.
- [13] Vannman, K. (1995) A unified approach to capability indices, *Statistica Sinica*, 5, 805-820.
- [14] Zadeh, L. A. (1965) Fuzzy sets. *Information and Control*, 8, 338-353.