

گراف متناظر با ابرگروه‌واره فازی

رضا عامری* و زهرا ناظم عاشورا

دانشگاه تهران، دانشکده ریاضیات، آمار و علوم کامپیوتر، گروه ریاضی، تهران، ایران
دانشگاه پیام نور، دانشکده علوم، گروه ریاضی، تهران، ایران

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۳/۲۵

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۹/۲۴

نوع مقاله: علمی-پژوهشی

چکیده

فرض کنید $(S, \circ)$ یک ابرگروه (ابرگروه‌واره) فازی باشد. در این مقاله ما گراف فازی Γ_S را از طریق رابطه α و α^* که به ترتیب رابطه اساسی و بستر متعدی رابطه اساسی هستند، به ابرگروه (ابرگروه‌واره) فازی نظیر می‌کنیم. سپس با بررسی ویژگی‌های جبری ابرگروه فازی S و ویژگی‌های گرافی Γ_S ، رابطه‌ای بین این دو نظریه برقرار می‌کنیم. به این ترتیب ما چند ارتباط مهم بین دو ساختار مختلف پیدا می‌کنیم، همچنین با چند مثال، رابطه بین یک ابرگروه فازی و گراف‌های متناظر با آن را روشن می‌کنیم. پس از آن ضمن تعریف یک ابرعمل فازی متناظر با گراف فازی به بیان خصوصیت این ابرعمل فازی می‌پردازیم. در بخش آخر مقاله نیز کاربرد این گراف و ابرعمل فازی را در مدلسازی انتشار ویروس کرونا و پیشنهادی به صورت الگوریتم برای روند انتشار این ویروس بیان شده است.

۱ مقدمه

در سال ۱۹۳۴، مارتی ریاضیدان فرانسوی^۱ در هشتمین کنگره ریاضی کشورهای اسکندیناوی، برای نخستین بار مفهوم یک ابرگروه را، بعنوان تعمیمی از مفهوم یک گروه معرفی کرد و برخی از خواص آن را تشریح کرد و آن را در بخش‌های مختلفی از جبر همچون توابع جبری، توابع گویا و گروه‌های ناجابجایی بکار برد [۱۸]. بنابراین می‌توانیم سال ۱۹۳۴ را سال پیدایش نظریه ابرساختارهای جبری محسوب کنیم. این نظریه در ابتدا برای بررسی ارتباط بین گروه‌ها و کاربردهای مختلف آن در هندسه با استفاده از مفهوم ابرگروه‌ها به کار گرفته شد ولی بعدها تعمیم‌ها و گسترش‌های زیادی یافت و از نظر کاربرد هم مورد توجه قرار گرفت (برای اطلاعات بیشتر رجوع شود به [۱۰]). در ادامه روزنبرگ^۲ ابرگروه‌های وابسته به گراف‌ها و رابطه‌های دوتایی را معرفی و مورد مطالعه قرار داد [۲۰]، همچنین کوسکاس^۳ ریاضیدان فرانسوی رابطه اساسی روی یک ابرگروه را معرفی کرد، به‌طوری‌که فضای خارج قسمتی یک ابرگروه نسبت به این رابطه یک گروه بوده و این رابطه با این خاصیت کوچکترین رابطه هم‌ارزی است. در ایران نیز محققین بسیاری همچون بیژن دواز [۱۲] و رضا عامری [۱] طی این سالها در نظریه ابرساختارهای جبری تحقیق کرده و در بسط و توسعه آن نقش چشمگیری ایفا نموده اند (برای جزئیات بیشتر رجوع شود به [۲، ۱۴]). از سوی دیگر نظریه مجموعه‌های فازی توسط عسکرزاده استاد ایرانی تبار دانشگاه برکلی در سال ۱۹۶۵ ارائه شد [۲۵]. این نظریه، برخی ریاضیدانان را بر آن داشت تا رابطه این نظریه را با سایر بخش‌های علوم ریاضیات و مهندسی مورد بررسی قرار دهند. نخستین مقاله در زمینه ریاضیات فازی در مقاله‌ای توسط روزنفلد^۴ در سال ۱۹۷۱ ارائه گردید، که در آن به معرفی گراف فازی پرداخته است [۲۱]. پس از معرفی ابرساختار جبری ارتباط دو مفهوم گراف‌ها و ابرگروه‌ها مورد توجه محققین بسیاری قرار گرفت، به عنوان مثال کرسینی^۵، رابطه بین ابرگروه‌ها و ابرگراف‌ها را با تعریف ابرعمل وابسته به ابرگراف نشان داد [۹]، در

^۱ Marty^۲ Rosenberg^۳ Koskas^۴ Rosenfeld^۵ Corsini

ایران نیز می‌توان به محققی از جمله رضا عامری [۲] و بیژن دواز [۱۳] اشاره کرد. در سال‌های اخیر پیوندی بین نظریه ابرساختارهای جبری و نظریه فازی ایجاد شده است، تا مفهوم جدیدی بنام نظریه ابرساختارهای فازی متولد شود (به عنوان نمونه رجوع شود به [۲۲، ۱۷، ۱۳]). در اینجا هدف ما آن است که به یک ابرساختار فازی $(H, \circ)$ به کمک رابطه اساسی فازی روی آن، یک گراف را وابسته نماییم و در ادامه خواص جبری این ابرگروه فازی و خواص گراف وابسته به آن را مورد مطالعه قرار دهیم. بخصوص از روی خواص گرافی مانند همبندی، خاصیت جبری متناظر آن در ابرگروه را بدست آوریم. در ادامه، در بخش دیگر مقاله با داشتن گراف فازی، ابرعمل فازی وابسته به گراف فازی را تعریف می‌کنیم و به بررسی چند خصوصیت از این ابرعمل فازی می‌پردازیم. در نهایت با توجه به همه‌گیری ویروس کرونا، ابرعمل فازی متناظر با انتشار و انتقال این ویروس و چگونگی انتشار آن را به کمک ابرساختار فازی بیان می‌کنیم. در آخر نیز پیشنهادی در قالب الگوریتم برای نشان دادن چگونگی همه‌گیری ویروس کووید ۱۹ را بیان کرده‌ایم.

۲ پیشنهادها

در این بخش، تعاریف و قضایایی را که در این مقاله استفاده خواهد شد، یادآوری می‌کنیم.

تعریف ۱.۲. [۸] فرض کنید H یک مجموعه ناتهی و $P^*(H)$ مجموعه تمام زیرمجموعه‌های ناتهی H باشد، هر تابع $\circ : H \times H \rightarrow P^*(H)$ را یک ابرعمل روی H می‌نامیم. اگر $\circ$ یک ابرعمل روی H باشد، به $(H, \circ)$ یک ابرگروه‌واره می‌گوییم. ابرگروه‌واره $(H, \circ)$ نیم ابرگروه نامیده می‌شود هرگاه برای هر $x, y, z \in H$ اصل شرکت‌پذیری یعنی $x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$ برقرار باشد. نیم ابرگروه $(H, \circ)$ ابرگروه نامیده می‌شود هرگاه برای هر $a \in H$ ، داشته باشیم $a \circ H = H \circ a = H$ (اصل تکثیر یا مولد).

مثال ۲.۲. [۸] اگر H یک مجموعه ناتهی باشد، و برای تمام $x, y \in H$ ، داشته باشیم $x \circ y = H$ ، آن‌گاه $(H, \circ)$ ابرگروه تام^۶ نامیده می‌شود.

تعریف ۳.۲. [۸] فرض کنید $(H, \circ)$ یک ابرگروه‌واره باشد، عضو $e \in H$ را عضو همانی یا یکانی می‌نامیم اگر به ازای هر $a \in H$ ، داشته باشیم:

$$a \in a \circ e \cap e \circ a.$$

تعریف ۴.۲. فرض کنید $(H, \circ)$ یک ابرگروه‌واره باشد. رابطه β_n روی H را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$a\beta_nb \iff \exists n \in \mathbb{N}^*, \exists (x_1, x_2, \dots, x_n) \in H^n : a, b \in \prod_{i=1}^n x_i$$

چون در تعریف رابطه β ، U را مجموعه تمام حاصل ضرب‌های متناهی عناصر H فرض کردیم، رابطه β را می‌توان به صورت $\beta = \cup \beta_n$ بیان کرد، به طوری که $\beta_1 = \{(x, x) : x \in H\}$ و برای هر $n \geq 2$ ، و هر $x, y \in H$ ، داشته باشیم:

$$x\beta y \iff \exists (a_1, a_2, \dots, a_n) \in H^n : \{x, y\} \subseteq \prod_{i=1}^n a_i.$$

رابطه β انعکاسی و متقارن است، اما در حالت کلی متعدی نیست. بستار متعدی رابطه β را با β^* نشان می‌دهیم.

قضیه ۵.۲. [۸] اگر $(H, \circ)$ ابرگروه باشد، آنگاه $\beta^* = \beta$.

تعریف ۶.۲. [۸] نیم ابرگروه $(H, \circ)$ را m -کامل می‌گوییم، اگر برای هر $x_1, x_2, \dots, x_n$ داشته باشیم $\prod_{i=1}^m x_i = \beta(\prod_{i=1}^m x_i)$.

قضیه ۷.۲. [۸] اگر $(H, \circ)$ ، m -کامل باشد، آنگاه برای هر $x \in H$ داریم $\beta_m = \beta^*$.

قضیه ۸.۲. [۸] اگر $(H, \circ)$ نیم ابرگروه m -کامل باشد، و $K = H/\beta^*$ ، آنگاه:

$$\beta_n = \beta^* \iff K = K \cdot K.$$

تعریف ۹.۲. [۱۹] یک مجموعه فازی از یک مجموعه ناتهی S یک نگاشت $\mu : S \rightarrow [0, 1]$ است که در آن بازه اعداد حقیقی بین ۰ و ۱ است. نگاشت μ به هر عضو x از S یک درجه عضویت $\mu(x)$ ، که $0 \leq \mu \leq 1$ ، را نسبت می‌دهد. تمام زیرمجموعه‌های فازی از S را با $F(S)$ نمایش می‌دهیم و آن را مجموعه توانی فازی از S می‌نامیم.

تعریف ۱۰.۲. [۱۹] مجموعه نقاطی از S که برای آن‌ها $\mu(x) > 0$ می‌باشد، تکیه‌گاه S نامیده می‌شود و با نماد $supp(\mu)$ نشان داده می‌شود. از این‌رو

$$supp(\mu) = \{x \in S | \mu(x) > 0\}$$

تعریف ۱۱.۲. [۱۹] فرض کنید T و S دو مجموعه باشند، همچنین μ و ν به ترتیب زیرمجموعه‌های فازی از S و T باشند. یک رابطه فازی ρ از زیرمجموعه فازی μ به زیرمجموعه فازی ν ، یک زیرمجموعه فازی از $S \times T$ است به طوری که برای هر $x \in S, y \in T$ ، رابطه $\rho(x, y) \leq \mu(x) \wedge \nu(y)$ برقرار باشد. به این معنی که در رابطه فازی ρ درجه عضویت هر زوج مرتب، از درجه عضویت هر مؤلفه اش بزرگتر نیست.

تعریف ۱۲.۲. [۱۹] فرض کنید $\rho : S \times T \rightarrow [0, 1]$ یک رابطه فازی از زیرمجموعه فازی μ از S به یک زیرمجموعه فازی ν از T باشد و $\varpi : T \times U \rightarrow [0, 1]$ یک رابطه فازی از یک زیرمجموعه فازی ν از T به یک زیرمجموعه فازی ξ از U باشد. در این صورت ترکیب آنها یعنی $\rho \circ \varpi : S \times U \rightarrow [0, 1]$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\forall x \in S, z \in U, \rho \circ \varpi(x, z) = \bigvee \{\rho(x, y) \wedge \varpi(y, z) | y \in T\},$$

$\rho \circ \varpi$ را ترکیب ρ با ϖ می‌نامیم. نماد ρ^2 را برای نمایش ترکیب $\rho \circ \rho$ و نماد ρ^k را برای نمایش ترکیب $\rho \circ \rho^{k-1}$ برای هر عدد $k > 1$ ، بکار می‌بریم. همچنین ρ^∞ را برای هر x و y عضو S ، به صورت $\rho^\infty = \bigvee \{\rho^k(x, y) | k = 1, 2, \dots\}$ تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱۳.۲. [۱۹] فرض کنید μ و ν دو زیرمجموعه فازی از S باشند، در این صورت:

$$(۱) \quad \forall x \in S, (\mu \cup \nu)(x) = \mu(x) \vee \nu(x)$$

$$(۲) \quad \forall x \in S, (\mu \cap \nu)(x) = \mu(x) \wedge \nu(x).$$

تعریف ۱۴.۲. [۲۲] فرض کنید S یک مجموعه ناتهی، و $F(S)$ مجموعه همه زیرمجموعه‌های فازی S می‌باشد. ابرعمل فازی $\circ$ روی مجموعه S ، نگاشتی به صورت:

$$\circ : S \times S \rightarrow F(S) \\ (a, b) \mapsto a \circ b$$

می‌باشد. مجموعه S به همراه این ابرعمل $\circ$ یک ابرگروه‌واره فازی نامیده می‌شود و آن را با $(S, \circ)$ نشان می‌دهند.

تعریف ۱۵.۲. [۲۲] ابرگروه‌واره فازی $(S, \circ)$ نیم ابرگروه فازی نامیده می‌شود اگر برای هر $a, b, c \in S$ ، رابطه $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ برقرار باشد، به‌طوری‌که برای هر زیرمجموعه فازی μ از S و $r \in S$ داشته باشیم:

$$(a \circ \mu)(r) = \begin{cases} \bigvee_{t \in S} ((a \circ t)(r) \wedge \mu(t)) & \mu \neq \circ \\ \circ, & \mu = \circ \end{cases}$$

و

$$(\mu \circ a)(r) = \begin{cases} \bigvee_{t \in S} (\mu(t) \wedge (t \circ a)(r)) & \mu \neq \circ \\ \circ, & \mu = \circ \end{cases}.$$

تعریف ۱۶.۲. [۲۲] فرض کنید μ و ν دو زیرمجموعه فازی از ابرگروه‌واره فازی $(S, \circ)$ باشد. در این صورت $\mu \circ \nu$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(\mu \circ \nu)(t) = \bigvee_{p, q \in S} (\mu(p) \wedge (p \circ q)(t) \wedge \nu(q)), \quad \forall t \in S.$$

تعریف ۱۷.۲. [۲۲] نیم ابرگروه فازی $(S, \circ)$ را ابرگروه فازی می‌گوییم اگر برای هر x عضو S ، داشته باشیم $x \circ S = S \circ x = \chi_S$ ، به‌طوری‌که χ_S تابع مشخصه S است.

مثال ۱۸.۲. [۲۲] فرض کنید که ابر عمل فازی $\circ$ روی مجموعه S برای هر a, b به صورت $a \circ b = \chi_{\{a, b\}}$ تعریف شده باشد، به‌طوری‌که $\chi_{\{a, b\}}$ تابع مشخصه مجموعه $\{a, b\}$ می‌باشد. در این صورت $(S, \circ)$ یک ابرگروه فازی می‌باشد.

اثبات. برای هر $a, b, c \in S$ داریم:

$$\begin{aligned} ((a \circ b) \circ c)(t) &= (\chi_{\{a, b\}} \circ c)(t) = \bigvee_{r \in S} (\chi_{\{a, b\}}(r) \wedge (r \circ c)(t)) \\ &= \begin{cases} (r \circ c)(t) & r \in \{a, b\} \\ \circ & r \notin \{a, b\} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \chi_{\{r, c\}}(t) & r \in \{a, b\} \\ \circ & r \notin \{a, b\} \end{cases} \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} 1 & t \in \{a, b, c\} \\ \circ & t \notin \{a, b, c\} \end{cases}$$

به روش مشابه می‌توان نشان داد که :

$$(a \circ (b \circ c))(t) = \begin{cases} 1 & t \in \{a, b, c\} \\ \circ & t \notin \{a, b, c\} \end{cases}$$

در نتیجه $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$. همچنین برای هر $t \in S$

$$(S \circ a)(t) = \bigvee_{x \in S} (x \circ a)(t) = \bigvee_{x \in S} \chi_{\{x, a\}}(t) = 1 = \chi_S(t)$$

بنابراین برای هر $a \in S$ داریم $S \circ a = \chi_S$. به روش مشابه می‌توان

$\square$ $a \circ S = \chi_S$ را نشان داد. در نتیجه $(S, \circ)$ ابرگروه فازی می‌باشد.

تعریف ۱۹.۲. [۳] فرض کنید $(S, *)$ و $(T, \circ)$ دو نیم ابرگروه فازی باشند. نگاشت

$\phi = S \rightarrow T$ را همریختی فازی گوئیم، اگر برای هر $a, b \in S$ داشته باشیم:

$$\phi(a * b) \leq \phi(a) \circ \phi(b).$$

همچنین اگر برای هر $a, b \in S$ رابطه $\phi(a * b) = \phi(a) \circ \phi(b)$ برقرار باشد، دراین صورت ϕ ، همریختی خوب فازی^۷ است.

تعریف ۲۰.۲. [۳] فرض کنید $(S, \circ)$ یک نیم ابرگروه فازی باشد. دراین صورت رابطه α

روی S را به صورت $\alpha = \bigcup_{n \geq 1} \alpha_n$ تعریف می‌کنیم، که در آن $\alpha_1 = \{(x, x) | x \in S\}$ و برای هر $n > 1$ و $(a, b) \in S^2$ داریم:

$$a \alpha_n b \iff \exists x_1, \dots, x_n \in S (n \in \mathbb{N}) : (x_1 \circ \dots \circ x_n)(a) > \circ \& (x_1 \circ \dots \circ x_n)(b) > \circ.$$

بدیهی است که α متقارن و بازتابی نیز است. اگر α^* را به عنوان بستر متعدی α در نظر

بگیریم، α^* یک رابطه هم‌ارزی روی S می‌باشد.

Fuzzy good homomorphism^۷

قضیه ۲۱.۲. [۱۱] رابطه α^* کوچک‌ترین رابطه هم‌ارزی روی ابرگروه فازی $(S, \circ)$ می‌باشد به طوری که $S^* = S/\alpha^*$ یک گروه است.

قضیه ۲۲.۲. [۳] رابطه α^* ، رابطه اساسی در نیم ابرگروه فازی $(S, \circ)$ است.

تعریف ۲۳.۲. [۱۱] فرض کنید $\phi: S \rightarrow S/\alpha^*$ یک نگاشت باشد، در این صورت قلب^۸ S را با نماد ω_S نشان می‌دهیم و به صورت $\omega_S = \phi^{-1}(1_{S/\alpha^*})$ تعریف می‌شود.

تعریف ۲۴.۲. [۱۱] ابرگروه فازی $(S, \circ)$ را ۱-ابرگروه فازی می‌نامیم اگر ω_S تک عضوی باشد.

قضیه ۲۵.۲. اگر $(S, \circ)$ یک ۱-ابرگروه فازی باشد و $\omega_S = \{e\}$ ، آنگاه رده‌های α^* به صورت $e \circ a$ می‌باشد، که $a \in H$.

تعریف ۲۶.۲. [۵] یک گراف، شامل یک مجموعه ی ناتهی از رئوس (گره) و یک مجموعه از یال‌هاست. یک گراف را با نماد $G = (V, E)$ نشان می‌دهند، که در آن V ، نماد مجموعه‌ای ناتهی از رئوس و E نماد مجموعه‌ای از یال‌هاست. یالی که ابتدا و انتهای آن یکسان باشد، طوقه نامیده می‌شود، و گرافی که فاقد طوقه باشد، گراف ساده نامیده می‌شود. اگر رأس x به رأس y در یک گراف به وسیله یک یال به هم وصل شده باشد می‌گوییم مجاورند^۹ (xey) . یک گراف با n رأس، که در آن هر رأس با دیگر رأس‌های گراف مجاور باشد، گراف کامل گفته می‌شود و آن را با K_n نشان می‌دهند. مجموعه همه رأس‌های مجاور x را با $N(x)$ نشان می‌دهیم و تعداد آن‌ها را درجه x می‌نامیم و با $\deg(x)$ نشان می‌دهیم. اگر درجه همه رأس‌های گراف با هم برابر باشد، آن گراف منظم نامیده می‌شود و چنان‌چه درجه همه رأس‌ها برابر با k باشد، آن را k -منظم می‌نامیم.

تعریف ۲۷.۲. [۵] یک مسیر از رأس x به رأس y در یک گراف، دنباله ای از رئوس متمایز گراف است که از x شروع و به y ختم می‌شوند و آن را با P نشان می‌دهیم. اگر بین دو رأس مانند x و y از یک گراف مسیر باشد، می‌گوییم متصل^{۱۰} هستند. مسیری که ابتدا و انتهای آن یکسان باشد دور یا چرخه نامیده می‌شود. هرگاه در گراف $G = (V, E)$

Heart^۸
Adjacent^۹
connect^{۱۰}

بین هر دو رأس متمایز آن مسیری وجود داشته باشد، آن را همبند می‌گویند. بزرگ‌ترین زیرگراف همبند G را یک مؤلفه همبندی G می‌نامیم. به گراف همبندی که فاقد دور است درخت می‌گویند.

تعریف ۲۸.۲. [۵] اگر $G = (V, E)$ یک گراف باشد، $G_1 = (V_1, E_1)$ را یک زیرگراف G می‌نامیم هرگاه $V_1 \subseteq V$ و $E_1 \subseteq E$ ، همچنین رأس‌های واقع بر هر یال عضو E_1 متعلق به V_1 باشند.

تعریف ۲۹.۲. [۵] هرگاه رأس‌های گراف G را بتوان به دو بخش (مجموعه) ناتهی و اشتراک تهی تقسیم کرد، به‌طوری‌که هیچ یالی بین دو رأس یک بخش یکسان، وجود نداشته باشد، در این صورت گراف G را گراف دوبخشی می‌نامند. اگر تعداد رأس‌های دو بخش V_1 و V_2 ، m و n باشد، آن‌گاه این گراف دوبخشی را با $G_{m,n}$ نشان می‌دهند.

تعریف ۳۰.۲. [۵] یک مسیر بسته در یک گراف که از هر یال یک بار، می‌گذرد را مدار اویلری می‌گویند و گرافی که چنین مسیری داشته باشد، گراف اویلری نامیده می‌شود.

قضیه ۳۱.۲. [۵] گراف متناهی بدون رأس تنها، اویلری است، اگر و تنها اگر همبند باشد و درجه همه رئوس آن فرد باشد.

تعریف ۳۲.۲. [۱۹] یک گراف فازی سه تایی مرتب $G = (V, \mu, \rho)$ است، به‌طوری‌که در آن، V یک مجموعه متناهی ناتهی، و μ و ρ دو تابع فازی به صورت $\mu: V \rightarrow [0, 1]$ و $\rho: V \times V \rightarrow [0, 1]$ هستند به‌طوری‌که برای هر $x, y \in V$ ، رابطه $\rho(x, y) \leq \mu(x) \wedge \mu(y)$ برقرار باشد. μ را تابع عضویت مجموعه رئوس فازی و ρ را تابع عضویت مجموعه یال‌های فازی گراف G می‌نامیم.

تعریف ۳۳.۲. [۱۹] در گراف فازی $G = (V, \mu, \rho)$ یک مسیر P ، دنباله‌ای از رئوس مجزای $x_0, x_1, \dots, x_n$ (به جز x_0 و x_n) است به‌طوری‌که $\rho(x_{i-1}, x_i) > 0$ ($1 \leq i \leq n$). در اینجا $n \geq 1$ را طول مسیر P می‌نامند. قوت مسیر P را برابر با $\rho^\infty(x, y) = \bigwedge_{i=1}^n \rho(x_{i-1}, x_i)$ تعریف می‌کنیم به عبارت دیگر، قوت یک مسیر درجه عضویت ضعیف ترین یال آن مسیر می‌باشد.

۳ گراف متناظر با ابرگروه‌واره فازی

تعریف ۱.۳. فرض کنید $(S, \circ)$ یک ابرگروه فازی باشد. ما از طریق رابطه α گراف $\Gamma_S = (S, E)$ را به S نظیر می‌کنیم، به‌طوری‌که رئوس آن اعضای S باشند، و

$$xEy \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} : x\alpha_n y.$$

بدیهی است که برای $n = 1$ داریم $x\alpha_1 x$ یعنی xEx یک طوقه است، و از این رو گراف Γ_S ساده نیست، اما برای $n \geq 2$ با x خودش مجاور نیست. بدیهی است که اگر ابرگروه‌واره فازی S متناهی باشد، آن‌گاه Γ_S نیز متناهی خواهد بود.

لم ۲.۳. فرض کنید $(S, \circ)$ یک ابرگروه‌واره فازی باشد. در این صورت در گراف Γ_S ، رأس x به رأس y متصل می‌شود (مسیری از x به y وجود دارد) اگر و تنها اگر $x\alpha^* y$.

اثبات. فرض کنید x و y متصل هستند، و ρ مسیری از x به y است، در این صورت دنباله رئوس $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ وجود دارند، به‌طوری‌که $x_1 = x$ و $x_{n+1} = y$ پس بنا به تعریف حاصل ضرب‌های (ترکیب‌های) متناهی $u_1, \dots, u_m$ از عناصر وجود دارد، به‌طوری‌که برای هر $i = 1, \dots, m$ ، چون رئوس x_i و x_{i+1} در این مسیر مجاورند، داریم $u_i(x_i) > \circ$ و $u_i(x_{i+1}) > \circ$ که بنا به تعریف α^* ، معادل با $x\alpha^* y$ می‌باشد.

برعکس، فرض کنید $x\alpha^* y$ ، در این صورت بنا به تعریف، حاصل ضرب‌های متناهی $u_1, \dots, u_m$ وجود دارند به‌طوری‌که:

$$x\alpha_n y \Leftrightarrow \exists x_1, \dots, x_n \in S (n \in \mathbb{N}) : (x_1 \circ \dots \circ x_n)(x) > \circ \ \& \ (x_1 \circ \dots \circ x_n)(y) > \circ,$$

در واقع این به معنی وجود مسیری بین رئوس x و y می‌باشد، بنابراین $\square$ متصل هستند.

مثال ۳.۳. فرض کنید $S = \{a, b, c, d\}$ باشد. ابرعمل فازی $\circ$ روی S را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

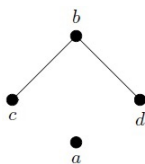
$$(a \circ a)(b) = (a \circ a)(c) = \circ, (a \circ b)(b) = (a \circ c)(b) = (a \circ d)(b) = (b \circ a)(b) = (b \circ b)(b) = (b \circ c)(b) = (b \circ d)(b) = (c \circ a)(b) = (c \circ b)(b) = (c \circ c)(b) =$$

$$\begin{aligned}(c \circ d)(b) &= (d \circ a)(b) = (d \circ b)(b) = (d \circ c)(b) = (d \circ d)(b) = \circ, \\(a \circ b)(d) &= (a \circ c)(d) = (a \circ d)(d) = (b \circ a)(d) = (b \circ b)(d) = (b \circ c)(d) = \\(b \circ d)(d) &= (c \circ a)(d) = (c \circ b)(d) = (c \circ c)(d) = (c \circ d)(d) = (d \circ a)(d) = \\(d \circ b)(d) &= (d \circ c)(d) = (d \circ d)(d) = \circ.\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}(a \circ b)(a) &= (a \circ c)(a) = (a \circ d)(a) = (b \circ a)(a) = (b \circ b)(a) = (b \circ c)(a) = \\(b \circ d)(a) &= (c \circ a)(a) = (c \circ b)(a) = (c \circ c)(a) = (c \circ d)(a) = (d \circ a)(a) = \\(d \circ b)(a) &= (d \circ c)(a) = (d \circ d)(a) = (a \circ b)(c) = (a \circ c)(c) = (a \circ d)(c) = \\(b \circ a)(c) &= (b \circ b)(c) = (b \circ c)(c) = (b \circ d)(c) = (c \circ a)(c) = (c \circ b)(c) = \\(c \circ c)(c) &= (c \circ d)(c) = (d \circ a)(c) = (d \circ b)(c) = (d \circ c)(c) = (d \circ d)(c) = \\(a \circ a)(a) &= (a \circ a)(d) = \circ\end{aligned}$$

با توجه به روابط بالا داریم $\alpha^* = \{(a, a), (b, b), (c, c), (b, c), (b, d), (c, d)\}$ ، و چون هیچ $x_1, x_2, \dots, x_n \in S$ وجود ندارند، به طوری که $(x_1 \circ \dots \circ x_n)(c) > \circ$ و $(x_1 \circ \dots \circ x_n)(d) > \circ$ پس $(c, d) \in \alpha^*$ ولی $(c, d) \notin \alpha$ ، بنابراین بین c و d مسیری وجود دارد که یال نیست. گراف متناظر با S در شکل ۱ رسم شده است (از طوقه‌ها بنا به تعریف رابطه α چشم پوشی شده است)



شکل ۱: گراف Γ_S که متناظر با S می‌باشد.

قضیه ۴.۳. فرض کنید $(S, \circ)$ یک ابرگروه فازی باشد. در این صورت گراف Γ_S همبند است، اگر و تنها اگر گروه اساسی S^* از S بدیهی^{۱۱} باشد.

اثبات. گراف Γ_S همبند است، اگر و تنها اگر هر $x, y \in S$ به هم متصل باشند، و بنا به لم ۲.۳، x متصل به y است، اگر و تنها اگر $x\alpha^*y$ ، و این

^{۱۱} Trivial

یعنی اینکه $\alpha^* = S \times S$ پس گروه اساسی S/α^* تنها یک رده دارد و بدیهی است. $\square$

قضیه ۵.۳. مؤلفه‌های همبندی گراف Γ_S دقیقاً اعضای گروه‌واره اساسی S/α^* یعنی رده‌های هم‌ارزی رابطه اساسی α^* می‌باشند.

اثبات. فرض کنید x و y رأس‌های Γ_S باشند، در این صورت بنا به **لم ۲.۳** متصل هستند اگر و تنها اگر $x\alpha^*y$ باشد. بنابراین برای هر عضو S مانند z هر جفت رأس در رده $\alpha^*(z)$ به هم متصل هستند. به علاوه چون α^* یک رابطه هم‌ارزی است، $\alpha^*(z)$ افزازهایی برای S هستند و در نتیجه مؤلفه‌های همبندی گراف Γ_S هستند و اثبات کامل می‌شود. $\square$

قضیه ۶.۳. فرض کنید $(S, \circ)$ یک ابرگروه‌واره فازی باشد. اگر Γ_S یک گراف کامل باشد، آنگاه α یک رابطه متعدی است.

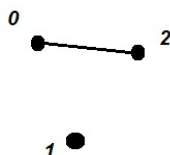
اثبات. فرض کنید $x\alpha y$ و $y\alpha z$ داریم، یعنی x با y و y با z رابطه α دارند، در این صورت برای تعدادی $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ ، رابطه‌های $x\alpha_{n_1}y$ و $y\alpha_{n_2}z$ برقرار است. از طرفی چون Γ_S کامل است یعنی بین x و z نیز یک یال وجود دارد (بنا بر xEz) و بنابراین برای تعدادی $n \in \mathbb{N}$ را داریم پس $x\alpha_n z$ می‌شود، یعنی α متعدی است. $\square$

ملاحظه ۷.۳. برعکس قضیه ۶.۳ صحیح نمی‌باشد زیرا اگر $S = \{0, 1, 2\}$ در نظر بگیریم و ابرعمل فازی $\circ$ روی S را به وسیله روابط زیر تعریف کنیم:

$$\begin{aligned} (0 \circ 0)(0) &= 1, (0 \circ 0)(1) = (0 \circ 0)(2) = 0, (0 \circ 1)(1) = 1, (0 \circ 1)(0) = \\ (0 \circ 1)(2) &= 0, (0 \circ 2)(2) = 1, (0 \circ 2)(0) = (0 \circ 2)(1) = 0, (1 \circ 0)(1) = \\ 1, (1 \circ 0)(0) &= (1 \circ 0)(2) = 0, (1 \circ 1)(2) = 1, (1 \circ 1)(0) = 1, (1 \circ 1)(1) = \\ 0, (1 \circ 2)(1) &= 1, (1 \circ 2)(0) = (1 \circ 2)(2) = 0, (2 \circ 0)(2) = 1, (2 \circ 0)(1) = \end{aligned}$$

$$(2 \circ 0)(0) = 0, (2 \circ 1)(2) = 1, (2 \circ 1)(1) = (2 \circ 1)(0) = 0, (2 \circ 2)(0) = 1, (2 \circ 2)(1) = (2 \circ 2)(2) = 0$$

بدیهی است که α متعدی است. همچنین $S/\alpha^* = \{\{0, 2\}, 1\}$ می باشد، این یعنی Γ_S دو مولفه همبندی $\{0, 2\}$ و $\{1\}$ دارد. همان طور که در شکل ۲ مشاهده می کنید، رأس ۱ و ۲ باهم مجاور نیستند بنابراین Γ_S کامل نیست.



شکل ۲: گراف متناظر با S .

لم ۸.۳. فرض کنید $(S, \circ)$ یک ابرگروه فازی و S_1 و S_2 زیرمجموعه های ناتهی S باشند. گراف دو بخشی Γ_S که متناظر با S می باشد را، با $\Gamma_S = (S_1, S_2, E)$ نشان می دهیم. حال اگر $x_i, y_i \in S_i$ ($i = 1, 2$)، آنگاه فقط یک عضو مانند $x \in S$ وجود دارد به طوری که $(x_i \circ y_i)(x) > 0$ (x در S_i قرار نداشته باشد).

اثبات. فرض کنید x, y دو عضو S باشند به طوری که $(x_i \circ y_i)(x) > 0$ و $(x_i \circ y_i)(y) > 0$ برقرار باشد، بنابراین xy و این یعنی اینکه x و y در S مجاور هستند، و این نتیجه با دو بخشی بودن گراف در تناقض است. $\square$

مثال ۹.۳. برای ابرگروه فازی کامل $(S, \circ)$ ، (در ۲.۲ معرفی شد)، می توان نتیجه گرفت که $S/\alpha^* = \{e\}$ و در واقع یعنی S^* بدیهی است. بنابراین Γ_S گراف کامل همبند است، به طوری که تنها یک مولفه همبندی دارد. با این حال گراف Γ_S چون $x \circ x = S$ پس ساده نیست. به علاوه چون مسیر $x_1 E x_2 \dots E x_n$ طولانی ترین مسیر است، پس قطر گراف Γ_S برابر است با $|S|$.

قضیه ۱۰.۳. اگر گراف Γ_S همبند باشد، آنگاه $S = \omega_S$.

اثبات. فرض کنید Γ_S همبند باشد، آنگاه بنا به قضیه ۴.۳، S/α^* بدیهی است یعنی دارای یک کلاس می‌باشد، و بنا به تعریف ω_S $S = \omega_S$ را نتیجه گرفت. $\square$

گزاره ۱۱.۳. فرض کنید $(S, \circ)$ یک ابرگروه‌واره فازی باشد. در این صورت درجه هر رأس x از گراف Γ_S معادل است با $|\alpha^*(x)|$ ، یعنی $\deg(x) = |\alpha^*(x)|$.

اثبات. می‌دانیم $\alpha^*(x)$ رده هم‌ارزی x با در نظر گرفتن رابطه هم‌ارزی α^* می‌باشد. بنا به لم ۲.۳ و اینکه S یک ابرگروه‌واره فازی است، تعداد یالهای متصل به رأس x معادل است با $|\alpha^*(x)|$. $\square$

نتیجه بعدی مستقیماً از گزاره ۱۱.۳ نتیجه گرفته شده است.

نتیجه ۱۲.۳. فرض کنید $(S, \circ)$ یک ابرگروه فازی باشد، به طوری که برای هر $x \in S$ داشته باشیم $|\alpha^*(x)| = k$. آنگاه Γ_S یک گراف k -منظم می‌باشد.

مثال ۱۳.۳. فرض کنید $S = \{a, b, c, d\}$ باشد. ابرعمل فازی $\circ$ روی S را ابرعمل تعریف شده در مثال ۳.۳ در نظر می‌گیریم، همان‌طور که ملاحظه شد، داریم $S/\alpha^* = \{\{a\}, \{b, c, d\}\}$ پس $\alpha^* = \{(a, a), (b, b), (c, c), (b, c), (b, d), (c, d)\}$ بنابراین دو مؤلفه همبندی $\{a\}$ و $\{b, c, d\}$ را داریم که در شکل ۱ مشاهده می‌شود.

قضیه ۱۴.۳. فرض کنید $(S, \circ)$ یک ابرگروه‌واره فازی باشد و $(K, \circ)$ یک زیرابگروه‌واره فازی S باشد. در این صورت Γ_K زیرگراف Γ_S می‌باشد.

اثبات. از آنجایی که K زیر ابرگروه‌واره فازی S است، رأس‌های Γ_K ، زیرمجموعه رأس‌های Γ_S است. از طرفی دیگر چون S و K ابرگروه‌واره فازی هستند، بنا به تعریف یال‌ها، یال‌های Γ_K نیز زیرمجموعه یال‌های Γ_S می‌باشد. بنابراین دو شرط زیرگراف بودن را دارد، پس Γ_K زیرگراف Γ_S می‌باشد. $\square$

نتیجه ۱۵.۳. فرض کنید Γ_{ω_S} گراف متناظر با قلب ابرگروه فازی $(S, \circ)$ یعنی ω_S باشد، در این صورت:

۱. Γ_{ω_S} زیرگراف Γ_S می باشد.

۲. Γ_{ω_S} یک مؤلفه همبندی گراف Γ_S می باشد.

اثبات.

۱. به راحتی از قضیه قبل نتیجه می شود.

۲. فرض کنید x و y دو رأس گراف Γ_{ω_S} باشند، در این صورت رابطه زیر را داریم:

$$\alpha^*(x) = \alpha^*(y) \Leftrightarrow x\alpha^*y \Leftrightarrow x\alpha y$$

بنابراین Γ_{ω_S} مؤلفه همبندی می باشد.

□

قضیه ۱۶.۳. فرض کنید $(S, \circ)$ یک ابرگروه فازی باشد، در این صورت Γ_S اویلری است اگر و تنها اگر برای هر x عضو S ، $|\alpha^*(x)|$ عددی فرد است.

اثبات. فرض کنید $(H, \circ)$ یک ابرگروه فازی باشد، در این صورت بنابه قضیه ۴.۳ Γ_S همبند است. از طرف دیگر چون درجه هر رأس x برابر با $|\alpha^*(x)|$ است، بنابه قضیه ۳۱.۲، Γ_S اویلری است اگر و تنها اگر برای هر x عضو S درجه رئوس فرد باشد، پس در نتیجه $|\alpha^*(x)|$ عددی فرد است.

□

قضیه ۱۷.۳. اگر $(S, \circ)$ شبه ابرگروه فازی کامل باشد، آنگاه Γ_S نمی تواند درخت باشد.

اثبات. فرض کنید $(S, \circ)$ شبه ابرگروه فازی کامل باشد. در این صورت بنا به قضیه ۱۰.۳ برای هر $x \in S$ ، داریم $\alpha^*(x) = \{x\}$ ، در نتیجه Γ_S شامل مسیرهای بسته است یعنی Γ_S درخت نیست.

□

قضیه ۱۸.۳. شبه ابرگروه فازی $(S, \circ)$ کامل است، اگر و تنها اگر گراف Γ_S گراف ساده باشد.

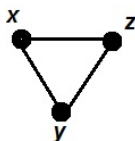
اثبات. فرض کنید x و y دو رأس در گراف Γ_S باشند، و e_1 و e_2 دو یال موازی بین x و y باشند، در این صورت اعضای مانند $x_1, x_2, \dots, x_n \in S$ ($n \in \mathbb{N}$) وجود دارند، به طوری که $\prod_{i=1}^n x_i(x) > \circ$ و $\prod_{i=1}^n x_i(y) > \circ$ ، همچنین اعضای مانند $x'_1, x'_2, \dots, x'_m \in S$ ($m \in \mathbb{N}$) وجود دارند، به طوری که $\prod_{i=1}^m x'_i(x) > \circ$ و $\prod_{i=1}^m x'_i(y) > \circ$ ، بنابراین چون $(S, \circ)$ کامل است، نتیجه میگیریم که $\prod_{i=1}^n x_i = \prod_{i=1}^m x'_i$.
برعکس، فرض کنید $\prod_{i=1}^m y_i(z) > \circ$ و $\prod_{i=1}^n x_i(z) > \circ$ را داشته باشیم. در این صورت $e_2 = \prod_{j=1}^m y_j$ و $e_1 = \prod_{i=1}^n x_i$ دو یال موازی از طریق رأس z هستند. از این رو چون گراف Γ_S ساده است، پس $\prod_{i=1}^n x_i = \prod_{j=1}^m y_j$ و در نتیجه S کامل است. $\square$

مثال ۱۹.۳. فرض کنید مجموعه $S = \{x, y, z\}$ را داریم. ابرعمل فازی $\circ$ را روی S به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} (x \circ x)(x) &= (x \circ x)(y) = (x \circ x)(z) = \circ, (x \circ y)(x) = (x \circ y)(y) = \\ (x \circ y)(z) &= \circ, (x \circ z)(x) = (x \circ z)(y) = (x \circ z)(z) = \circ, (y \circ x)(x) = \\ (y \circ x)(y) &= (y \circ x)(z) = \circ, (y \circ y)(x) = (y \circ y)(y) = \\ (y \circ y)(z) &= \circ, (y \circ z)(x) = (y \circ z)(y) = \circ, (y \circ z)(z) = \circ, (z \circ x)(x) = \\ (z \circ x)(y) &= (z \circ x)(z) = \circ, (z \circ y)(x) = (z \circ y)(z) = \circ, (z \circ y)(y) = \\ (z \circ y)(z) &= \circ, (z \circ z)(x) = (z \circ z)(y) = \circ, (z \circ z)(z) = \circ. \end{aligned}$$

در این صورت $S/\alpha^* = \{\{x, y, z\}\}$ ، بنابراین گراف متناظر با S گراف کامل همبند است. شکل ۳ گراف متناظر که کامل و همبند است با سه رأس را نشان میدهد.

تعریف ۲۰.۳. فرض کنید Γ_S^m گراف متناظر با ابرگروه فازی $(S, \circ)$ باشد، به طوری که برای همه $x, y \in S$ و $m \in \mathbb{N}$ داشته باشیم $x E_m y$ اگر و تنها اگر $x \alpha_m y$.



شکل ۳: گراف همبند Γ_S با سه رأس.

قضیه ۲۱.۳. $(S, \circ)$ ابرگروه فازی m -کامل است، اگر و تنها اگر $\Gamma_S^m = \Gamma_S$.

اثبات. فرض کنید برای هر $x, y \in S$ داریم $x\alpha y$ ، بنابراین $x\alpha^*y$ ، پس $m \in \mathbb{N}$ وجود دارد، به طوری که $x\alpha_m y$ چون $(S, \circ)$ ابرگروه فازی است و $S^* \cdot S^* = S^*$ ، پس بنابه قضیه ۸.۲، نتیجه میگیریم که $\alpha_m = \alpha^*$.

برعکس، از قضیه ۷.۲ مستقیم نتیجه می‌دهد. $\square$

قضیه ۲۲.۳. $(S, \circ)$ ، یک 1 -ابرگروه فازی است، اگر و تنها اگر Γ_S گراف ستاره‌ای باشد.

اثبات. فرض کنید Γ_S یک گراف ستاره‌ای باشد و رأس e به همه رأس های دیگر Γ_S متصل باشد. بنابه لم ۲.۳، به ازای همه $x \in S$ داریم $x\alpha^*e$. از آنجایی که S یک ابرگروه فازی است، پس برای هر $x \in S$ داریم $x\alpha e$ و در نتیجه S یک ابرگروه 1 -فازی است.

برعکس، بنا به قضیه ۲۵.۲ نتیجه میگیریم که رده‌های α^* به وسیله $e \circ a$ تولید می‌شوند به طوری که $a \in S$ ، در نتیجه تمامی رأس های Γ_S متصل به e هستند. بنابراین Γ_S یک گراف ستاره‌ای است. $\square$

قضیه ۲۳.۳. فرض کنید $(H, \circ)$ و $(S', *)$ دو ابرگروه فازی همریختی باشند. در این صورت Γ_S و $\Gamma_{S'}$ نیز همریختی هستند.

اثبات. چون S و S' همریختی هستند، پس $|S| = |S'|$ ، بنابراین $|\Gamma_S| = |\Gamma_{S'}|$. همچنین فرض کنید رأس x به رأس y متصل باشد، در این صورت داریم $x\alpha^*y$ ، پس اعضای $z_1, z_2, \dots, z_n$ متعلق به S وجود

دارند، به‌طوری‌که $\{x, y\} \subseteq \prod_{i=1}^n z_i$. بعلاوه اگر ϕ یک مورفیزم از S به S' باشد، آنگاه فرض کنیم $a' = \phi(a)$ ، $b' = \phi(b)$ و $z'_i = \phi(z_i)$ و چون ϕ هم‌ریختی است نتیجه می‌گیریم که $\phi(\prod_{i=1}^n z_i) = \prod_{i=1}^n \phi(z_i)$ ، در نتیجه $\phi(a) \phi(b) \phi(a)$ و بنابراین a' به b' متصل است. در نهایت نتیجه می‌گیریم که گراف‌های Γ_S و Γ'_S هم‌ریختی هستند. $\square$

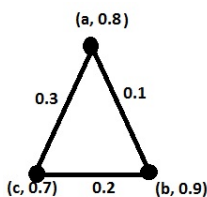
۴ ابرگروه‌واره فازی متناظر با گراف فازی

تعریف ۱.۴. فرض کنید $G = (V, \mu, \rho)$ یک گراف فازی باشد، اگر P یک مسیر از x به y در این گراف باشد، پس رأس‌های $x_1, x_2, \dots, x_n$ دنباله‌ای از رئوس در این مسیر می‌باشند به‌طوری‌که برای $0 < i < n - 1$ ، داریم $\rho(x_i, x_{i+1}) > 0$. ابرعمل فازی $\circ_G : G \times G \rightarrow F(G)$ را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$x \circ_G y = \vee \{ \wedge_{i=1}^n \rho(x_{i-1}, x_i) \} = \vee \{ \rho^\infty(x_{i-1}, x_i) \}$$

که در آن x_i و x_{i-1} رئوسی هستند که عضو مسیرهای x به y هستند. در این صورت $(G, \circ_G)$ یک ابرگروه‌واره فازی می‌باشد. بدیهی است که این ابرگروه‌واره یک نیم‌گروه فازی است زیرا خاصیت شرکت‌پذیری را دارد. همچنین دارای خاصیت جابجایی نیز می‌باشد.

مثال ۲.۴. فرض کنید گراف فازی (G, μ, ρ) داریم که در شکل ۴ نشان داده شده است:



شکل ۴: گراف فازی (G, μ, ρ) .

می‌خواهیم متناسب با این گراف، ابرعمل فازی $x \circ_G y = \vee \{\rho^\infty(x_{i-1}, x_i)\}$ را تعریف می‌کنیم و ابرگروه فازی متناظر با آن را بدست می‌آوریم. در ابتدا روابط زیر را بنابه تعریف اولیه ابرعمل فازی $\circ_G$ محاسبه می‌کنیم:

$$a \circ b = \{(a, (\circ.1 \vee (\circ.2 \wedge \circ.3))), (b, (\circ.1 \vee (\circ.2 \wedge \circ.3)))\} = \{(a, \circ.2), (b, \circ.2)\}$$

که این مجموعه را μ_1 در نظر می‌گیریم (می‌دانیم طبق تعریف خروجی ابرعمل فازی باید زیرمجموعه فازی باشد):

$$a \circ b = \{(a, \circ.2), (b, \circ.2)\} := \mu_1$$

$$a \circ c = \{(a, \circ.3 \vee \circ.1), (c, \circ.3 \vee \circ.1)\} = \{(a, \circ.1), (c, \circ.3)\} := \mu_2$$

$$a \circ a = \{(a, \circ.3)\} := \mu_3$$

$$b \circ c = \{(b, \circ.2 \vee \circ.1), (c, \circ.2 \vee \circ.1)\} = \{(b, \circ.2), (c, \circ.2)\} := \mu_4$$

$$b \circ b = \{(b, \circ.1)\} := \mu_5$$

$$c \circ c = \{(c, \circ.1)\} := \mu_6$$

پس ابرعمل فازی روی مجموعه $\{a, b, c\}$ در جدول ۱ نشان داده شده است:

جدول ۱: ابرعمل $\circ_G$ متناظر با گراف فازی G

$\circ_G$	a	b	c
a	μ_3	μ_1	μ_2
b	μ_1	μ_5	μ_4
c	μ_2	μ_4	μ_6

حال شرکت پذیری را بررسی ،

$$(a \circ_G b) \circ_G c = \{\mu_1(a) \wedge (a \circ_G c)\} \vee \{\mu_1(b) \wedge (b \circ_G c)\} \vee \{\mu(c) \wedge (c \circ_G c)\}$$

مقدار دقیق را برای نقطه a بدست می‌آوریم:

$$((a \circ_G b) \circ_G c)(a) = \{\mu_1(a) \wedge \mu_2(a)\} \vee \{\mu_1(b) \wedge \mu_4(a)\} \vee \{\mu(c) \wedge \mu_6(a)\} = (a, \circ.1)$$

و به همین ترتیب برای نقاط b و c نیز محاسبه می‌کنیم که داریم:

$$(a \circ_G b) \circ_G c = \{(a, \circ.1), (b, \circ.1), (c, \circ.1)\}$$

به روش مشابه $a \circ_G (b \circ_G c) = \{(a, \circ.1), (b, \circ.1), (c, \circ.1)\}$ را بدست می‌آوریم. همچنین طبق خواص $\vee$ و $\wedge$ اصل تکثیر نیز برقرار است پس $(G, \circ_G)$ ابرگروه فازی می‌باشد.

گزاره ۳.۴. فرض کنید $(G, \circ_G)$ یک ابرگروه‌وار فازی متناظر با گراف فازی G باشد؛ در این صورت برای هر $x, y, a, b \in H$ داریم $x \circ_G y \cap a \circ_G b = x \circ_G b \cap a \circ_G y$

اثبات. فرض کنید برای $x, y, a, b \in H$ داریم:

$$\begin{aligned} (x \circ_G y \cap a \circ_G b)(z) &= (x \circ_G y)(z) \wedge (a \circ_G b)(z) = (\sigma(x, z) \wedge \sigma(y, z)) \wedge (\sigma(a, z) \wedge \sigma(b, z)) \\ &= (\sigma(x, z) \wedge \sigma(y, z)) \wedge (\sigma(a, z) \wedge \sigma(b, z)) = x \circ_G b \cap a \circ_G y \end{aligned}$$

پس برای هر $x, y, a, b \in H$ می‌توان $x \circ_G y \cap a \circ_G b = x \circ_G b \cap a \circ_G y$ را نتیجه گرفت. $\square$

گزاره ۴.۴. فرض کنید $(G, \circ_G)$ یک ابرگروه‌وار فازی متناظر با گراف فازی G باشد؛ اگر x و y عضو H باشند و $x \circ_G y = \emptyset$ باشد، آن‌گاه:

$$1. x \circ_G H \cap H \circ_G y = \emptyset$$

$$2. \text{اگر } H = x \circ_G H \text{ باشد، آن‌گاه } H \circ_G y = \emptyset$$

$$3. \text{اگر } H = H \circ_G x \text{ باشد، آن‌گاه } y \circ_G H = \emptyset \text{ می‌باشد.}$$

اثبات.

۱. فرض کنید $x \circ_G H \cap H \circ_G y \neq \emptyset$ باشد، در این صورت a و b عضو H وجود دارند، به طوری که $x \circ_G a \cap b \circ_G y \neq \emptyset$ باشد، طبق گزاره قبل $x \circ_G y \cap b \circ_G a \neq \emptyset$ می‌شود که تناقض است.

۲. فرض کنید $H = x \circ_G H$ و همچنین بر طبق مورد قبل $x \circ_G H \cap H \circ_G y = \emptyset$ می‌باشد، بنابراین $H \cap H \circ_G y = \emptyset$ می‌باشد، پس $H \circ_G y = \emptyset$ است.

۳. اثبات مشابه قسمت ۲ می‌باشد.

□

۵ کاربرد در شبیه سازی انتشار ویروس کووید ۱۹

همه گیری^{۱۲} کووید ۱۹ به عنوان مرگبارترین فاجعه بهداشت جهانی قرن در نظر گرفته شده است. همچنین به عنوان چالشی جدی که بشر پس از جنگ جهانی با آن مواجه شد، تلقی می شود. در اواخر دسامبر ۲۰۱۹، یک بیماری عفونی جدید در ووهان چین ظاهر شد و توسط مقامات بهداشتی چین گزارش شد و سازمان بهداشت جهانی آن را کووید ۱۹^{۱۳} نامید (در این عنوان "CO" مخفف نوعی ویروس بنام "Corona"، و "VI" مخفف "Virus"، "D" برای بیماری، و ۱۹ نشان دهنده سال بروز آن است). این ویروس پس از شناسایی به طور وسیعی گسترش یافته و باعث مرگ و میرهای بی شماری شده است. همچنین علاوه بر آسیب به سیستم بدن انسان، باعث چالش های اجتماعی و اقتصادی نیز شده است. این نوع ویروس به شدت اقتصاد جهانی را ویران کرده است و اثرات مخربی بر زندگی انسان گذاشته است. در حال حاضر هیچ درمان یا واکسن قطعی، علیه این ویروس وجود ندارد. تقریباً کل کشورها در تلاش هستند تا از طریق درمان بیماران، قرنطینه کردن افراد مشکوک از طریق ردیابی تماس و محدود کردن تجمعات بزرگ از انتقال بیماری جلوگیری کنند. بسیاری از محققان تأثیر کووید ۱۹ بر جوامع مختلف و راه های مفید برای کنترل این نوع بیماری را بررسی کرده اند (برای جزئیات بیشتر به [۷] و [۶] مراجعه کنید).

در این بخش، کاربرد گراف متناظر به ابرگروهواره را در علم پزشکی مورد بحث قرار می گیرد که در آن ارتباط بین افراد مختلف آلوده به ویروس کووید ۱۹ و گراف متناظر بررسی شده است.

کاربرد ۱

برای مدل سازی نحوه سرایت ویروس کووید ۱۹، از یک گراف به صورت $G_{19} = (S, E)$ استفاده می کنیم که در آن S افراد جامعه، نمونه ما (مثلاً مردمان یک شهر، استان، کشور،

Pandemic^{۱۲}
۱۹COVID-^{۱۳}

یک قاره و یا جهان) خواهد بود و همچنین E روابط بین اعضای S می‌باشد. حال ابرعمل $\circ$ را روی S به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$a \circ b = \{x \mid x \text{ توسط } a \text{ یا } b \text{ به بیماری کووید ۱۹ مبتلا شده است.}\}$$

در اینجا قاعده $\circ$ یک ابرعمل بدیهی روی S تعریف می‌کند، چرا که ممکن است $a \circ b$ برابر تهی باشد ($a \circ b = \emptyset$)، اما اگر S را با زیرمجموعه‌ی S' از آن یعنی مجموعه‌ی شامل افراد مبتلا به کووید ۱۹ را جایگزین کنیم، در این صورت $(S', \circ)$ یک ابرگروه‌واره خواهد بود.

حال $\diamond$ روی S (یا S') را چنین تعریف می‌کنیم:

$$a \diamond b = \bigcup \{x \in S \mid x \in aPb\}$$

که در آن P یک مسیر از a به b در گراف G می‌باشد.

حال این گراف که با نماد $G_{19} = (S', E)$ ، نشان داده می‌شود، را می‌توانیم با رابطه β روی ابرگروه‌واره $(S', \circ)$ به صورت زیر تعریف کنیم، که در آن رئوس G_{19} برابر S' و دو رأس متمایز x و y در S' ، مجاورند هرگاه $x\beta y$ ، یعنی به ازای $n \in \mathbb{N}$ ، دنباله $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in S^n$ وجود داشته باشد، به‌طوری‌که:

$$\{x, y\} \subseteq x_1 \circ \dots \circ x_n = \prod_{i=1}^n x_i,$$

حال اگر β^* را بستار متعددی β در نظر بگیریم، در این صورت می‌توانیم به جای رابطه xEy ، رابطه xE^*y را تعریف کنیم، یعنی:

$$xE^*y \Leftrightarrow x\beta^*y.$$

این گراف جدید را با نماد $G_{19}^* = (S, E^*)$ نشان می‌دهیم. بدیهی است که G_{19} یک زیرگراف G_{19}^* است. لذا بهتر است از مجموعه‌های فازی برای بیان آلودگی فرد A توسط فرد B صحبت کنیم. به عبارت دیگر میزان آلودگی یا درجه آلودگی را در نظر بگیریم. به این صورت که اگر A توسط B کاملاً آلوده شده باشد، درجه آلودگی را با ۱، اگر اصلاً آلوده

نشده باشد، میزان آلودگی را با صفر و برای سایر میزان آلودگی از اعداد بین صفر و یک استفاده کنیم. از این رو با استفاده از مفهوم ابرگروه‌واره (ابرگروه فازی) به‌طور واقعی‌تر می‌توانیم برای مدلسازی پدیده سرایت بیماری کووید ۱۹ در یک جامعه استفاده کنیم. در ذیل این مدلسازی را ارائه می‌دهیم.

ابر عمل فازی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(a \circ b)(x) = \mu(x) \text{ و } a, b \in F(S)$$

که در آن،

$\mu(x)$ = مینیمم میزان سرایت بیماری از شخص a به شخص x و از شخص b به شخص x .

به عبارت دیگر اگر رابطه فازی $P : S \times S \rightarrow [0, 1]$ را به عنوان درجه ابتلا به بیماری کووید ۱۹ در نظر بگیریم، آنگاه $P(x, y)$ برابر درجه ابتلای فرد x به بیماری کووید ۱۹ توسط فرد y است. بعنوان مثال اگر $P(x, y) = 0$ ، یعنی y اصلاً توسط فرد x به این بیماری آلوده نشده است، اما $P(x, y) = 1$ ، یعنی y کاملاً توسط x به بیماری کووید ۱۹ مبتلا شده است. حال می‌توانیم، ابرعمل فازی $\diamond$ روی S را بصورت زیر تعریف کنیم:

$$a \diamond b(x) = P(a, x) \wedge P(b, x)$$

پس به کمک این ابرعمل فازی، ابرعمل فازی $\circ$ را روی S به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$a \circ b(x) = \bigvee_{x_i \in P} \bigwedge_{i=1}^n (P(a, x_i) \wedge P(b, x_i))$$

که در آن P یک مسیر در گراف $G = (V, E)$ است، که $V = S$ و همچنین $(x, y) \in E$ ، اگر و تنها اگر y توسط x به بیماری کووید ۱۹ مبتلا شده است.

کاربرد ۲:

فرض کنید S مجموعه همه افراد یک کشور باشند، و A مجموعه افرادی که در یک ماه (روز) خاص به کووید ۱۹ مبتلا شده‌اند. گراف (G_{19A}) یک گراف است که رأس‌های آن

اعضای S می‌باشد. حال فرض کنید فرد $a \in A$ مبتلا به کووید ۱۹ می‌باشد، بین دو رأس است u و v در صورتی که $u \in \text{supp}(v \circ a)$ یا $v \in \text{supp}(u \circ a)$ باشد، یک یال رسم می‌کنیم. مطابق با تعریف بالا روند انتشار ویروس به صورت زیر می‌باشد:

مجموعه افرادی که از طریق ارتباط مستقیم با اعضای مجموعه A مبتلا شده‌اند را I می‌نامیم، پس از آن مجموعه A بزرگتر می‌شود، مجموعه A جدید را $A := A \cup I$ در نظر می‌گیریم. در حقیقت انتشار تا زمانی که $A = H$ شود ادامه پیدا می‌کند.

الگوریتم این همه‌گیری در زیر بیان شده است:

گام ۱: H را همه افراد شهر در نظر بگیر.

گام ۲: مجموعه A را همه افرادی که در یک ماه (روز) خاص به کووید ۱۹ مبتلا هستند، در نظر بگیر.

گام ۳: گراف $(H, \circ)$ را رسم کن.

گام ۴: مجموعه I را همه افرادی که با اعضای مجموعه A مستقیم در ارتباط بودند را در نظر بگیر.

گام ۵: $B = A \cup I$.

گام ۶: اگر $A \neq B$ باشد، آنگاه مجموعه A را همان B در نظر بگیر یعنی $A := B$ ، و به گام ۳ برو.

گام ۷: اگر $A = H$ باشد، انتشار متوقف شده است.

نتیجه‌گیری

همان‌طور که در این مقاله مشاهده شد با داشتن یک ابرگروه‌واره فازی می‌توانیم یک گراف را به آن نظیر کنیم. همچنین برعکس، با داشتن یک گراف فازی توانستیم با تعریف یک ابرعمل فازی یک ابرگروه‌واره فازی به آن نظیر کنیم و در هر دو حالت به بررسی خواص آن‌ها پرداختیم. ساختار گراف‌های متناظر با ابرگروه‌واره‌ها جالب و سودمند است و نشان می‌دهد که این نوع چارچوب می‌تواند در موضوعات مختلف زندگی واقعی مورد استفاده قرار گیرد.

مراجع

- [1] Ameri, R. (2003) *On the categories of hypergroups and hypermodules*, Journal of Discrete Mathematical Sciences and Cryptography, 6(2), 121-132.
- [2] Ameri, R., and Mohammadzadeh, E. (2015) *Engel groups derived from hypergroups*, European Journal of Combinatorics, 44, 191-197.
- [3] Ameri, R., and Nozari, T. (2010) *Complete parts and fundamental relation of fuzzy hypersemigroups*, Journal of multiple-valued Logic and Soft Computing, 19, 451–460.
- [4] Ameri, R., and Zahedi, M. M. (1997) *Hypergroup and join space induced by a fuzzy subset*, Pure Mathematics and Applications, 8, 2-4.
- [5] Berge, C. (1979) *Graphs and hypergraphs*, North Holland.
- [6] Chakraborty, I., and Maity, P. (2020) *COVID-19 outbreak: Migration, effects on society, global environment and prevention*, Science of the Total Environment, 728, 138882.
- [7] Ciotti, M., Angeletti, S., Minieri, M., Giovannetti, M., Benvenuto, D., Pascarella, S., Sagnelli, C., Bianchi, M., Bernardini, S., and Ciccozzi, M. (2019) *COVID-19 outbreak: an overview*, Chemotherapy, 64(5-6), 215–223.
- [8] Corsini, P. (1993) *Prolegomena of Hypergroup Theory*, Aviani Editore.
- [9] Corsini, P. (1996) *Hypergraphs and hypergroups*, Algebra Universalis, 35, 548-555.
- [10] Corsini, P., and Leoreanu, V. (2003) *Applications of Hyperstructure Theory* Kluwer Academic Publishers.

- [11] Fahimi, N., Nozari, T., and Mahjoob, R. (2020) *On the n^* – and γ_n^* – complete fuzzy hypergroups*, Italian journal of pure and applied mathematics, 43, 320-330.
- [12] Farshi, M., Davvaz, B., and Mirvakili, S. (2014) *Degree Hypergroupoids Associated with Hypergraphs*, Filomat, 28(1), 119-129.
- [13] Farshi, M., Davvaz, B., and Mirvakili, S. (2014) *Hypergraphs and Hypergroups based on a special relation*, Communications in Algebra, 42, 3395-3406.
- [14] Davvaz, B., and Leoreanu, V. (2007) *Hyperring Theory and Applications*, International Academic Press.
- [15] Freni, D. (2002) *A new characterization of the derived hypergroup via strongly regular equivalences*, Communication in Algebra, 30(8), 3977-3989.
- [16] Kalampakas, A., and Spartalis, S. (2015) *Path hypergroupoids: Commutativity and graph connectivity*, European Journal of Combinatorics, 44, 257-264.
- [17] Leoreanu, V., and Leoreanu, L. (1998) *Hypergroups associated with hypergraphs*, Italian Journal of Pure and Applied Mathematics, 4, 119–126.
- [18] Marty, F. (1934) *Sur une generalization de notion de groupe*, 8th Congress Math, Scandenaves, Stockholm, 45-49.
- [19] Mordeson, J., and Nair, P. (2000) *Fuzzy graphs and fuzzy hypergraphs*, Physica-Verlag.
- [20] Rosenberg, I. (1998) *Hypergroups and join spaces determined by relations*, Italian Journal of Pure and Applied Mathematics, 4, 93-101.
- [21] Rosenfeld, A. (1971) *Fuzzy Groups*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 35.

- [22] Sen, M. K., Ameri, R., and Chowdhury, G. (2008) *Fuzzy hypersemigroups*, Soft Computing, 12(9), 891-900.
- [23] Spartalis, S., and Kalampakas, A. (2014) *Graph hyperstructures*, Proc. of 12th international Congress on AHA, 130-134.
- [24] Wall, H.S. (1937) *Hypergroups*, American Journal of Mathematics, 59(1), 77-98.
- [25] Zadeh, L. (1965) *Fuzzy Sets*, Information and Control, 8.