سیستم‌های فازی و کاربردها
شاپای چاپی: ۴۴۰۹-۲۷۱۷
سال پنجم، شماره دوم (پائیز و زمستان ۱۴۰۱)
شاپای الکترونیکی: ۳۹۸۴-۲۷۱۷
صص. ۱ تا ۷۱
DOI:10.22034/JFSA.2022.340804.1128

مسئله برنامه‌ریزی خطی فازی I:
فرآیند کلی حل، مسائل برنامه‌ریزی خطی انعطاف‌پذیر

حسن میش مست نهی و شکوه سرگلزائی

گروه ریاضی، دانشکده ریاضی، دانشگاه سیستان و بلوچستان، زاهدان، ایران

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۲/۱۶ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۹/۲۰
نوع مقاله: علمی-پژوهشی

چکیده

در این مقاله، که بخش اول آن در اینجا آورده شده، مروری به مدل‌های مختلف مسأله برنامه ریزی خطی فازی و روش‌های حل آن خواهیم داشت. در مسائل دنیای واقعی، عدم قطعیت در اغلب داده‌های ورودی مسئله اجتناب ناپذیر است. این موضوع ناشی از ناکافی بودن داده‌های عینی موجود و یا دست نیافتنی بودن آن‌ها است. لذا براساس نوع عدم قطعیت در داده‌های ورودی، با سه دسته مسائل برنامه‌ریزی خطی انعطاف‌پذیر، امکانی و استوار برای مسئله برنامه ریزی خطی فازی روبرو هستیم؛ که در این مقاله به مسئله برنامه‌ریزی خطی انعطاف‌پذیر خواهیم پرداخت. در این دسته از مسائل، ابهام در داده‌های ورودی ناشی از غیرشفاف بودن مرز، با توابع عضویت مبتنی بر ارجحیت ذهنی مدلسازی می‌شود. حالت‌های مختلف بکار بردن تابع عضویت برای بیان ابهام مدل‌های انعطاف پذیر و روش‌های حل آن‌ها را به همراه مثال‌های عددی مرور خواهیم کرد.

بخش دوم این مقاله، شامل مدل‌ها و روش‌های مسائل برنامه‌ریزی خطی امکانی و استوار، در مقاله دیگری مرور خواهد شد.

عبارات و کلمات کلیدی: برنامه‌ریزی خطی فازی، تصمیم فازی، برنامه‌ریزی خطی فازی انعطاف‌پذیر

Email(s): hmnehi@hamoon.usb.ac.ir.

Mathematics Subject Classification: 03B52;03E72

۱ مقدمه

برنامه‌ریزی خطی به عنوان یکی از کاربردی‌ترین مدل‌های تصمیم‌گیری مسائل واقعی، همواره مورد توجه محققان بوده است. در حالت کلی، مسئله برنامه‌ریزی خطی را می‌توان به صورت مدل ریاضی (۱) بیان کرد:

$$\begin{aligned} &\max z = \textstyle\sum_{j=1}^{n} \mathbf{c}_j x_j \\ &s.t. \quad \textstyle\sum_{j=1}^{n} \mathbf{a}_{ij} x_j \leq \mathbf{b}_i, \quad i = 1, 2, ..., m, \\ &\qquad\quad x_j \geq 0, \qquad\qquad j = 1, 2, ..., n. \end{aligned} \tag{1}$$

تابع $z = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{c}_j x_j$ را تابع هدف، بردار $\mathbf{b} = (b_1, b_2, ..., b_m)$ را بردار منابع، بردار $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ را بردار متغیرهای تصمیم، بردار $\mathbf{c} = (c_1, c_2, ..., c_n)$ بردار هزینه یا ضرایب متغیرهای تصمیم در تابع هدف و ماتریس $A = (\mathbf{a}_{ij})_{m\times n}$ را ماتریس قیود یا ماتریس ضرایب تکنولوژیکی می‌نامند. داده‌ها در مسائل برنامه‌ریزی خطی معمولی، به صورت مقادیر دقیق در نظر گرفته می‌شوند. اما اغلب داده‌های ورودی در مسائل جهان واقعی، دارای عدم قطعیت [۱] هستند که این موضوع، به دلیل ناکافی و ناکامل بودن داده‌های عینی موجود[۲] و یا دست نیافتنی [۳] بودن آن‌ها است. مفهوم برنامه‌ریزی ریاضی فازی نخستین بار توسط تاناکا و همکارانش [۱۹] در سال ۱۹۷۴ در چهارچوب تصمیم‌گیری فازی بلمن و زاده [۴] [۳] مطرح و سپس زیمرمن نظریه مجموعه‌های فازی را برای برنامه‌ریزی خطی مورد استفاده قرار داد. بدین‌ترتیب، با کمک مسائل برنامه‌ریزی خطی فازی [۵] می‌توان روی داده‌ها و قیدهای نادقیق[۶] کارکرد و اغلب این نوع مسائل، برای حل گستره گوناگونی از مسائل در علوم و مهندسی مورد استفاده قرار می‌گیرند [۴]،[۱۴، ۱۵]. مطالعه پیش‌رو، یک مطالعه مروری است که در آن به بررسی برخی مدل‌های برنامه‌ریزی خطی فازی، دسته‌بندی و روش‌های حل آن‌ها پرداخته‌ایم. طی

[1] Uncertainty
[2] Insufficient/incomplete available objective data
[3] Non-obtainable
[4] Bellman and Zadeh
[5] Fuzzy Linear Programming Problems
[6] Imprecise

سالیان گذشته، مطالعات مروری جذابی در خصوص حل و دسته‌بندی‌های گوناگون مسائل برنامه‌ریزی خطی فازی انجام شده است که یکی از آخرین مطالعات مروری بر روی تاریخچه، روندها و دیدگاه‌ها برنامه‌ریزی خطی فازی، توسط فیگورا ارائه شده است [۹]. با توجه به عدم قطعیت در داده‌های ورودی به مسئله برنامه‌ریزی ریاضی فازی [۷] ، این داده‌ها، در بسیاری از موارد به صورت یکی از حالت‌های زیر بیان می‌شوند [۱]:

۱. در صورتی که با یک نوع ابهام ناشی از غیر شفاف بودن مرز و محدوده [۸] روبرو باشیم یعنی نتوان مرز دقیق و شفافی را برای یک محدودیت به شکل نامساوی (یا تساوی) متصور شد با یک نامساوی (یا تساوی) نرم و انعطاف‌پذیر مواجه هستیم. چنین ابهام‌هایی در مسئله به صورت یک تابع عضویت مبتنی بر ارجحیت ذهنی ارائه می‌شوند.

۲. اگر با ناکافی بودن داده‌های عینی موجود(اطلاعات تاریخی از گذشته) [۹] و نیز دانش و تجربه فرد تصمیم‌گیرنده روبرو باشیم؛ در واقع، یک مقدار غیردقیق یا گنگ [۱۰] برای داده مورد نظر تخمین زده شده است. در این حالت، در انتخاب یک مقدار ورودی از میان چندین مقدار ممکن برای یک پارامتر، دچار شک و تردید بوده و به اصطلاح با عدم قطعیت ناشی از کمبود دانش کافی [۱۱] در برآورد دقیق مقدار پارامتر مربوطه روبرو هستیم. در اغلب موارد، چنین داده‌های گنگ و غیردقیق، به شکل یک توزیع امکانی که تلفیقی از داده‌های عینی موجود و اطلاعات ذهنی(تجربی و قضاوتی) [۱۲] هستند، مدل‌سازی می‌شوند.

بنابراین، برنامه‌ریزی خطی فازی با توجه به اینکه چگونه داده‌های ورودی فازی در مسائل برنامه‌ریزی خطی فازی با توابع عضویت مبتنی بر ارجحیت ذهنی و داده‌های نادقیق در مسائل برنامه‌ریزی خطی با پارامترهای فازی توسط توزیع‌های امکانی عینی و ذهنی مدل‌سازی می‌شوند، به سه دسته کلی مسائل برنامه‌ریزی خطی انعطاف‌پذیر[۱۳]، مسائل

[7] Fuzzy Mathematics programming

[8] Vagueness

[9] Historical (objective) dara

[10] Imprecise/ambiguous

[11] Epistemic uncertainty (lack of knowledge

[12] Expert-based subjective (Judgmental) data

[13] Flexible Programming Problems

برنامه‌ریزی خطی امکانی [14] و مسائل برنامه‌ریزی خطی استوار [15] تقسیم بندی شده‌اند.

در بخش دوم از مطالعه پیش رو، مسئله برنامه‌ریزی خطی فازی بیان می‌شود. در بخش سوم، به معرفی کامل مسائل برنامه‌ریزی خطی فازی انعطاف‌پذیر و تعدادی از دسته‌بندی‌های این نوع از مسائل پرداخته خواهد شد. بخش چهارم، شامل معرفی مدل‌های برنامه‌ریزی خطی فازی انعطاف‌پذیر و روش‌های حل موجود برای آن‌ها است و برای هر روش مثال‌هایی حل خواهد شد.

۲ مسئله برنامه‌ریزی خطی فازی

در این بخش، ابتدا مدل کلاسیک تصمیم‌گیری فازی، سپس دسته‌بندی کلی مسائل برنامه‌ریزی ریاضی فازی را بیان و در انتها، خلاصه‌ای از روند کلی حل یک مدل برنامه‌ریزی خطی فازی ارائه می‌کنیم.

۱.۲ تصمیم‌گیری تحت محیط فازی

روش‌های حل مسائل برنامه‌ریزی خطی فازی بر اساس مفهوم بلمن و زاده تحت شرایط فازی پایه‌گذاری شده‌اند [۱۷]. بلمن و زاده سه مفهوم اساسی به نام‌های هدف فازی، قید فازی و تصمیم فازی را معرفی و عملکرد آن‌ها را در فرآیند تصمیم‌گیری برای فازی‌زدایی شرح دادند [۳]. در ادامه چارچوبی مفهومی برای تصمیم‌گیری در محیط فازی ارائه می‌شود. برای هدف فازی، در واقع هدف اصلی، بیشینه یا کمینه کردن تابع هدف نیست؛ بلکه رسیدن به سطح اطمینانی است که ممکن است به طور قطعی قابل تعریف نباشد. فرض کنید X، مجموعه‌ای از گزینه‌های ممکن، شامل جواب مسئله‌ی تصمیم‌گیری تحت ارزیابی، باشد. هدف فازی $\tilde{G}$، یک مجموعه فازی روی X است که توسط تابع عضویت $\mu_{\tilde{G}} : X \to [0,1]$ نمایش داده می‌شود. برای نامساوی فازی (قیدهای فازی)، علامت $'\lesssim'$ ممکن است به معنای دقیق در ریاضیات نباشد اما ممکن است به طور ذهنی کمبودهایی را بپذیرد. قید فازی $\tilde{C}$، یک مجموعه فازی روی X است که با تابع عضویت $\mu_{\tilde{C}} : X \to [0,1]$ مشخص می‌شود. تصمیم فازی $\tilde{D}$، که از تلاقی اهداف فازی

[14] Posibilistic Programming Problems

[15] Robust Programming Problems

و قیدهای فازی بدست می‌آید، یک مجموعه‌ی فازی است که توسط عملگر بلمن و زاده تعریف می‌شود. تابع عضویت در این مجموعه، گزینه‌ها را براساس معیار میزان تطابق همزمان محدودیت‌های فازی و دستیابی به هدف فازی در نظر می‌گیرد. در واقع، تصمیم فازی بلمن و زاده، یک مجموعه فازی $\tilde{D}$ روی X است که به صورت $\tilde{D} = \tilde{G} \cap \tilde{C}$ تعریف و تابع عضویت آن با $\mu_{\tilde{D}}(x) = \min\{\mu_{\tilde{G}}, \mu_{\tilde{C}}\}$ مشخص می‌شود [۱]،[۳].

تعریف ۱.۲. بلمن و زاده تصمیم فازی محدب را بر اساس مجموع وزندار اهداف فازی و قیود فازی تعریف می‌کنند:

$$\bar{\mu}_D(x) = \sum_{j=1}^{n} u_j \mu_{\tilde{G}_j}(x) + \sum_{i=1}^{m} w_i \mu_{\tilde{C}_i}(x),$$

که

$$\sum_{j=1}^{n} u_j + \sum_{i=1}^{m} w_i = 1, \quad u_j \geq 0, w_i \geq 0, \quad \forall i, j.$$

ضرایب وزنی به میزان اهمیت اهداف و قیود بستگی دارند.

بیشینه سازی تصمیم فازی محدب به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\bar{\mu}_D(x^*) = \max_{x \in X} \bar{\mu}_D(x) = \max_{x \in X} \left[\sum_{j=1}^{n} u_j \mu_{\tilde{G}_j}(x) + \sum_{i=1}^{m} w_i \mu_{\tilde{C}_i}(x) \right]$$

۲.۲ دسته‌بندی مسائل برنامه‌ریزی ریاضی فازی

برنامه‌ریزی ریاضی فازی با توجه به اینکه چگونه پارامترها و اعداد مبهم در مسئله را مدل‌سازی می‌کند، به دسته‌های مختلفی طبقه‌بندی می‌شود. در ادامه، یکی از مهمترین طبقه‌بندی‌های موجود ارائه شده است. خواننده گرامی می‌تواند برای مشاهده جزئیات بیشتر و همچنین سایر طبقه‌بندی‌ها، به [۱] مراجعه نماید:

۱. برنامه‌ریزی خطی انعطاف‌پذیر: این نوع مسائل با عدم قطعیت مربوط به غیر شفاف بودن مرز مجموعه‌های مورد نظر [۱۶] روبرو می‌باشند که این عدم قطعیت به

[16] Vagueness

صورت توابع عضویت مبتنی بر ارجحیت ذهنی بیان می‌شوند. روش زیمرمن و اولین مدل‌های بلمن و زاده از این دسته هستند [۳] و [۲۲].

۲. برنامه‌ریزی امکانی: این نوع از مسائل با پارامترهای غیرقطعی و نادقیق [۱۷] مواجهند. در واقع در این مسائل، با عدم قطعیت ناشی از کمبود دانش برای برآورد دقیق پارامترهای مسئله روبرو هستیم. بنابرین از توابع توزیع امکانی و شاخص‌های مربوط به آن‌ها استفاده می‌شود که به کمک تلفیقی از داده‌های ذهنی و عینی موجود، مشخصه‌سازی می‌شوند.

۳. برنامه‌ریزی سخت یا استوار: این نوع مسائل، ترکیبی از دو دسته قبلی بوده و هر دو نوع ابهام یعنی پارامترهای نادقیق و نامساوی‌های فازی، در مسئله وجود دارند.

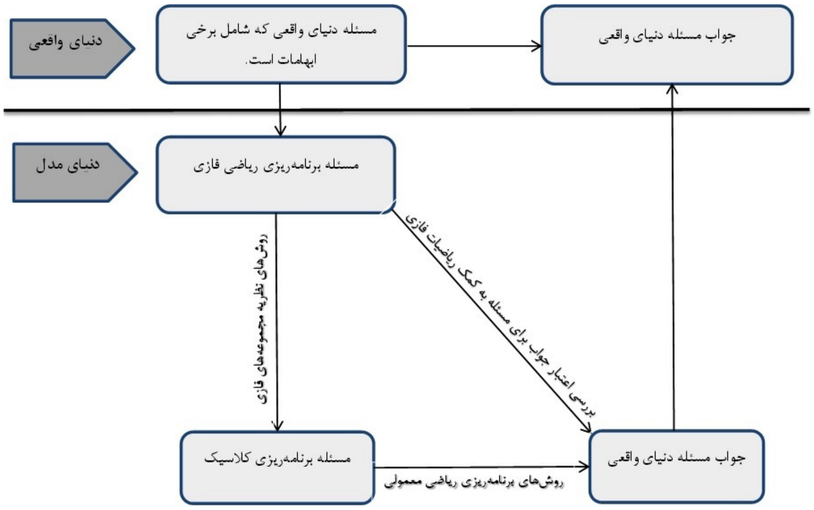
۳.۲ روند کلی حل یک مدل برنامه‌ریزی خطی فازی

برای حل یک مدل برنامه‌ریزی ریاضی فازی، همه‌ی روش‌هایی که برای حل سه دسته فوق استفاده می‌شوند در قسمت ریاضیات فازی قرار دارند. مدل‌های فازی را با کمک برنامه‌ریزی ریاضی فازی به مدل‌های برنامه‌ریزی کلاسیک (معمولی) تبدیل می‌کنند. خلاصه‌ی روند کلی حل یک مدل برنامه‌ریزی ریاضی فازی در شکل ۱ ارائه شده است:

۳ برنامه‌ریزی خطی فازی انعطاف‌پذیر

در این بخش، جزییات مربوط به مسئله برنامه‌ریزی خطی انعطاف‌پذیر بیان می‌شود. با قرارگیری ابهام در موقعیت‌های مختلف در یک مسئله برنامه‌ریزی خطی فازی و یا ترکیب آن موقعیت‌ها با هم، مدل‌های مختلفی تولید، که در پنج دسته، طبقه‌بندی می‌شوند.

[17] Ambiguous/imprecice data



شکل ۱: *روند کلی حل مدل برنامه‌ریزی ریاضی فازی*

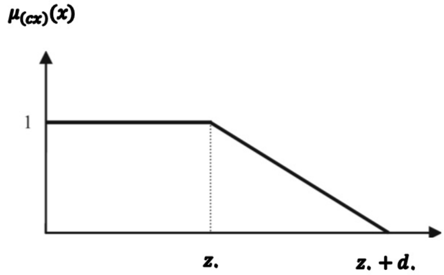
۱.۳ مسئله برنامه‌ریزی خطی فازی انعطاف‌پذیر

مسئله برنامه‌ریزی خطی (۲)، را در یک محیط فازی، در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} &\widetilde{\min} \quad \mathbf{c}x \\ &s.t. \quad Ax \preceq \mathbf{b}, \\ &\qquad\quad x \geq 0. \end{aligned} \tag{۲}$$

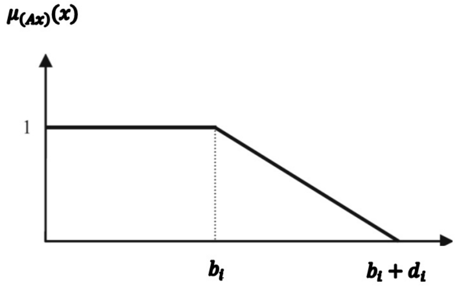
این مسئله، شامل وجود حالت ارتجاعی در محدودیت‌ها و/یا وجود آستانه‌های مطلوب انعطاف‌پذیر در مقادیر تابع هدف می‌باشد. میزان انعطاف‌پذیری در مقادیر سمت راست قیود یا مقادیر آستانه توابع هدف به صورت مقادیر انحراف مجاز، توسط تصمیم‌گیرنده تعیین می‌شوند. لذا ابهام موجود در این نوع مسائل، توسط توابع عضویت مبتنی بر ارحجیت ذهنی مدل‌سازی می‌شوند.

روش زیمرمن بر اساس تصمیم بلمن و زاده به عنوان اولین راهکار برای حل مدل‌های برنامه‌ریزی ریاضی فازی انعطاف‌پذیر شناخته می‌شود [۲۲]. فرض کنید در مسئله (۲)، تصمیم‌گیرنده مایل است تابع هدف cx با حداقل z_0 برقرار باشد. یعنی cx باید از z_0 کمتر باشد و اجازه دارد تا حدودی از آن عدول کند(شکل ۲ را ببینید). در سطح برآورده



شکل ۲: *نمایش تابع عضویت تابع هدف*

شدن قیود نیز به همین ترتیب عمل می‌شود. (شکل ۳). با در نظر گرفتن $b' = \begin{bmatrix} z_0 \\ b \end{bmatrix}$



شکل ۳: *نمایش تابع عضویت قیود*

و $B = \begin{bmatrix} c \\ A \end{bmatrix}$ مدل فازی فوق، به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$Bxb'_0$$
$$(Bx)_i b'_i, \quad i = 0, 1, ..., m$$

حال به ازای $i = 1, ..., m$، $b'_i = \mathbf{b}_i$ و $b'_0 = z_0$ نام‌گذاری می‌کنیم. تابع عضویت

$\mu_{(Bx)_i}(x)$ نیز عبارت است از:

$$\mu_{(Bx)_i}(x) = \begin{cases} ۱, & (Bx)_i \leq b'_i \\ ۱ - \frac{(Bx)_i - b'_i}{d_i}, & b'_i \leq (Bx)_i \leq b' + d \\ ۰. & (Bx)_i > b' + d_i \end{cases}$$

بر اساس تصمیم بلمن و زاده، به دنبال تصمیم فازی x^* هستیم به طوری که:

$$\mu_D(x) = \underset{i=۱,\ldots,m}{Min}\{\mu_{(Bx)_i}(x)\}$$

و تصمیم بهینه برابر است با:

$$\begin{aligned} \mu_D(x^*) &= \underset{x\in X}{Max} \ \ \underset{i}{Min}\{\mu_{(Bx)_i}(x)\} \\ &= \underset{x\in X}{Max} \ \ \underset{i=۱,\ldots,m}{Min}\{۱ - \frac{(Bx)_i}{d_i} + \frac{b'_i}{d_i}\} \end{aligned} \tag{۳}$$

مسئله (۳)، یک مسئله غیرخطی است. روابط زیر را در نظر بگیرید:

$$\frac{(Bx)_i}{d_i} = (B'x)_i \quad , \quad \frac{b'_i}{d_i} = b''_i,$$

و

$$\lambda = \underset{i=۱,\ldots,m}{Min}\{۱ - \frac{(B'x)_i}{d_i} + \frac{b''_i}{d_i}\}$$

آنگاه مسئله (۳) به صورت (۴) بازنویسی می‌شود:

$$\begin{aligned} &\max \ \ \lambda \\ &s.t. \ \lambda \leq ۱ - (B'x)_i + b''_i, \quad i = ۱, \ldots, m \\ &\quad x \in X = \{x | Ax \leq b\}. \end{aligned} \tag{۴}$$

مسئله (۴) یک مسئله برنامه‌ریزی خطی معمولی است که (x^*, λ^*) جواب بهین آن است.

۳.۲ دسته‌بندی مسائل برنامه‌ریزی خطی انعطاف‌پذیر

لای و هوانگ، مسائل برنامه‌ریزی خطی انعطاف‌پذیر را براساس فازی بودن ماتریس قیود، بردار منابع، بردار هزینه، تابع هدف و هر ترکیب ممکن از آن‌ها، به پنج گروه زیر طبقه‌بندی کردند:

۱. برنامه‌ریزی خطی انعطاف‌پذیر گروه-۱: مسائل برنامه‌ریزی خطی با بردار منابع انعطاف‌پذیر(قیود نامساوی انعطاف‌پذیر) در این دسته قرار می‌گیرند.

۲. برنامه‌ریزی خطی فازی انعطاف‌پذیرگروه-۲: مسائل برنامه‌ریزی خطی با بردار منابع انعطاف‌پذیر و تابع هدف انعطاف‌پذیر در این گروه قرار می‌گیرند.

۳. برنامه‌ریزی خطی انعطاف‌پذیرگروه-۳: مسائل برنامه‌ریزی خطی با بردار هزینه انعطاف‌پذیر در این دسته قرار دارند.

۴. برنامه‌ریزی خطی انعطاف‌پذیرگروه-۴: مسائل برنامه‌ریزی خطی با بردار هزینه انعطاف‌پذیر، ماتریس قیود انعطاف‌پذیر و بردار منابع انعطاف‌پذیر در این گروه قرار می‌گیرند.

۵. برنامه‌ریزی خطی انعطاف‌پذیرگروه-۵: مسائل برنامه‌ریزی خطی با تابع هدف انعطاف‌پذیر، ماتریس ضرایب انعطاف‌پذیر و بردار منابع انعطاف‌پذیر در این دسته قرار دارند.

۴ مدل‌های برنامه‌ریزی خطی انعطاف‌پذیر و روش‌های حل آن‌ها

همانطور که در زیربخش ۳.۲ بیان شد، بر اساس فازی بودن ماتریس قیود، بردار منابع، بردار هزینه، تابع هدف و هر ترکیب ممکن از آن‌ها، با پنج دسته از مسائل برنامه‌ریزی خطی انعطاف‌پذیر روبرو هستیم که در این بخش مدل‌های مربوط به هر دسته را به تفصیل معرفی و روش‌های حل موجود برای هر یک را بیان می‌کنیم.

۱.۴ مسائل برنامه‌ریزی خطی انعطاف‌پذیرگروه-۱

در این زیر بخش، به بررسی مدل برنامه‌ریزی خطی با بردار منابع انعطاف‌پذیر یا قیود نامساوی فازی پرداخته می‌شود. برای حل این مدل، روش‌های وردگی، ورنر و گو و وو پیشنهاد شده است. برای مشاهده جزئیات دو روش وردگی که مدلی متقارن و ورنر که مدلی نامتقارن است به [۱] مراجعه شود. در ادامه روش گو و وو را به تفصیل شرح می‌دهیم. [۱۱].
فرم کلی مسائل برنامه‌ریزی خطی با منابع انعطاف‌پذیر، به صورت (۵) بیان می‌شوند[۱۲]:

$$\begin{array}{ll} \max z = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{c}_j x_j & \\ s.t. \quad g_i(x) = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{a}_{ij} x_j \preceq \mathbf{b}_i, & i = 1, 2, ..., m, \\ \qquad x_j \geq 0, & j = 1, 2, ..., n. \end{array} \tag{5}$$

در مسئله (۵)، علامت نامساوی $\preceq$ «کوچکتر فازی از یا معادل است با» است و برای محدودیت iام، تلورانس p_i در نظر گرفته می‌شود. این بدان معناست که تصمیم‌گیرنده یک مقدار تلورانس برای محدودیت p_i به صورت ذهنی در نظر می‌گیرد. در این حالت، قیود $g_i(x) \preceq \mathbf{b}_i$ معادل هستند با $g_i(x) \leq \mathbf{b}_i + \theta p_i$ ، که $\theta \in [0, 1]$ و $(i = 1, 2, ..., m)$.
لذا با توجه به توضیحات ارائه شده، مسئله (۵) را می‌توان به صورت (۶) نوشت:

$$\begin{array}{ll} \max z = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{c}_j x_j & \\ s.t. \quad \sum_{j=1}^{n} \mathbf{a}_{ij} x_j \leq \tilde{b}_i, & i = 1, 2, ..., m, \\ \qquad x_j \geq 0, & j = 1, 2, ..., n. \end{array} \tag{6}$$

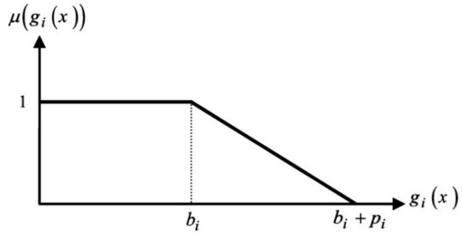
در مسئله (۶)، $\tilde{b}_i$ یک عدد فازی با تابع عضویت (۷) است:

$$\mu_{\tilde{b}_i}(x) = \begin{cases} 1, & x < \mathbf{b}_i \\ 1 - \frac{x - \mathbf{b}_i}{p_i}, & \mathbf{b}_i \leq x \leq \mathbf{b}_i + p_i \\ 0. & x > \mathbf{b}_i + p_i. \end{cases} \tag{7}$$

همچنین، توابع عضویت قیدهای نامساوی فازی مسئله (۵) را می‌توان به صورت (۸) بیان کرد:

$$\mu_i(g_i(x)) = \begin{cases} ۱, & g_i(x) < \mathbf{b}_i \\ ۱ - \frac{g_i(x)-\mathbf{b}_i}{p_i}, & \mathbf{b}_i \leq g_i(x) \leq \mathbf{b}_i + p_i \\ ۰. & g_i(x) > \mathbf{b}_i + p_i. \end{cases} \quad (۸)$$

شکل ۴، توابع عضویت قید نامساوی فازی بیان شده در (۸) را نشان می‌دهد:



شکل ۴: *توابع عضویت قید نامساوی فازی*

۱.۱.۴ روش گوو و وو

گوو و وو یک روش دو فازی را برای حل مسئله برنامه‌ریزی خطی فازی انعطاف‌پذیرگروه-۱ پیشنهاد کردند که این روش، حالت‌هایی که جواب حاصل از عملگر بلمن و زاده، کارا نباشد را بهبود می‌بخشد [۱۱]. این روش در فاز اول، شامل عملگر بلمن و زاده و در فاز دوم جوابی بدست می‌آورد که حداقل از جواب بدست آمده از عملگر بلمن و زاده بهتر است. روش دوفازی نه تنها به دنبال بالاترین درجه عضویت در هدف است بلکه به دنبال بیشترین بهره‌برداری از منابع نیز میباشد. بر اساس این روش و در فاز اول، برای حل مسئله (۵)، مسئله برنامه‌ریزی خطی قطعی زیر که حاصل از روش ورنراست، حل می‌شود.

$$\begin{aligned} & \max \alpha \\ & s.t. \ \ \textstyle\sum_{j=۱}^{n} \mathbf{c}_j x_j \geq z^u - (۱-\alpha)(z^u - z^l), \\ & \qquad g_i(x) = \textstyle\sum_{j=۱}^{n} \mathbf{a}_{ij} x_j \leq \mathbf{b}_i + (۱-\alpha)p_i, \quad i = ۱,۲,...,m, \\ & \qquad \alpha \in [۰,۱], \quad x_j \geq ۰, \quad j = ۱,۲,...,n. \end{aligned} \quad (۹)$$

که در آن z^l و z^u به ترتیب کران‌های پایین و بالای تابع هدف می‌باشند و با دو مسئله برنامه‌ریزی خطی استاندارد (۱۰) و (۱۱) بدست می‌آیند:

$$\begin{aligned} z^l = \max z = \textstyle\sum_{j=1}^{n} \mathbf{c}_j x_j \\ s.t.\ \ \textstyle\sum_{j=1}^{n} \mathbf{a}_{ij} x_j \leq \mathbf{b}_i, \quad i = 1,2,...,m, \\ x_j \geq 0, \ \ j = 1,2,...,n. \end{aligned} \tag{10}$$

و

$$\begin{aligned} z^u = \max z = \textstyle\sum_{j=1}^{n} \mathbf{c}_j x_j \\ s.t.\ \ \textstyle\sum_{j=1}^{n} \mathbf{a}_{ij} x_j \leq \mathbf{b}_i + p_i, \quad i = 1,2,...,m, \\ x_j \geq 0, \ \ j = 1,2,...,n. \end{aligned} \tag{11}$$

اگر جواب بهینه به دست آمده از حل مسئله (۹)، منحصر به فرد باشد، آنگاه جواب بهینه، یک جواب کارای فازی برای مسئله (۵) است و اگر جواب بدست آمده، بهینه دگرین باشد یعنی جواب بدست آمده از عملگر بلمن و زاده کارا نبوده است. حال در این حالت، فرض می‌کنیم (x^*, α^*) جواب بهینه مسئله (۹) باشد، آنگاه وارد فاز دوم شده و مسئله برنامه‌ریزی خطی (۱۲) را حل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} &\max \textstyle\sum_{i=0}^{m} \alpha_i \\ &s.t.\ \ \mu_0(z^* = cx^*) \leq \alpha_0, \\ &\quad \mu_i(g_i(x^*)) \leq \alpha_i, \ \ i = 1,2,...,m, \\ &\quad \mu_0(z = cx) \geq \alpha_0 \\ &\quad \mu_i(g_i(x)) \geq \alpha_i, \ \ i = 1,2,...,m, \\ &\quad \alpha_i \in [0,1], \ \ i = 1,2,...,m, \\ &\quad x_j \geq 0, \ \ j = 1,2,...,n. \end{aligned} \tag{12}$$

مسئله (۱۲) معادل مسئله (۱۳) می‌باشد:

$$
\begin{aligned}
&\max \textstyle\sum_{i=0}^{m} \alpha_i \\
&s.t.\ \ \textstyle\sum_{j=1}^{n} \mathbf{c}_j x_j \geq z^u - (1-\alpha_0)(z^u - z^l), \\
&\qquad g_i(x) = \textstyle\sum_{j=1}^{n} \mathbf{a}_{ij} x_j \leq \mathbf{b}_i + (1-\alpha_i)p_i, \ \ i = 1,2,...,m, \\
&\qquad \textstyle\sum_{j=1}^{n} \mathbf{c}_j x_j^* \geq z^u - (1-\alpha_0)(z^u - z^l) \\
&\qquad g_i(x^*) = \textstyle\sum_{j=1}^{n} \mathbf{a}_{ij} x_j^* \geq \mathbf{b}_i + (1-\alpha_i)p_i, \ \ i = 1,2,...,m, \\
&\qquad \alpha_i \in [0,1], \ \ i = 1,2,...,m, \\
&\qquad x_j \geq 0, \ \ j = 1,2,...,n.
\end{aligned}
\tag{13}
$$

فرض کنید $(x^{**}, \alpha_0^{**}, \alpha_1^{**}, ..., \alpha_m^{**})$ جواب بهینه مسئله (۱۲) یا (۱۳) باشد؛ در نتیجه، یک جواب کارای فازی مسئله (۵) است.

قضیه ۱.۴. *اگر x^{**} جواب بهینه مسئله (۱۲) باشد آنگاه یک جواب بهینه کارای فازی مسئله (۵) است.*

اثبات. [۱۱] □

در ادامه با حل یک مثال، عملکرد روش دوفازی گوو و وو را نشان می‌دهیم [۱۱]:

مثال ۲.۴. مسئله برنامه‌ریزی خطی فازی انعطاف‌پذیر گروه-۱، (۱۴) را در نظر بگیرید:

$$
\begin{aligned}
&\max z = 4x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 11x_4 \\
&s.t.\ \ g_1(x) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq \tilde{15}, \\
&\qquad g_2(x) = 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq \tilde{80}, \\
&\qquad g_3(x) = 3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 \leq \tilde{100}, \\
&\qquad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.
\end{aligned}
\tag{14}
$$

که در آن، توابع عضویت قیدهای نامساوی فازی به صورت روابط (۱۵)، (۱۶) و (۱۷)

تعریف شده‌اند:

$$\mu_1(x) = \begin{cases} 1, & g_1(x) < 15 \\ 1 - \frac{g_1(x)-15}{5}, & 15 \leq g_1(x) \leq 20 \\ 0, & g_1(x) > 20 \end{cases} \tag{15}$$

و

$$\mu_2(x) = \begin{cases} 1, & g_2(x) < 80 \\ 1 - \frac{g_2(x)-80}{40}, & 80 \leq g_2(x) \leq 120 \\ 0, & g_2(x) > 120 \end{cases} \tag{16}$$

و

$$\mu_3(x) = \begin{cases} 1, & g_2(x) < 100 \\ 1 - \frac{g_3(x)-100}{30}, & 100 \leq g_2(x) \leq 130 \\ 0, & g_2(x) > 130 \end{cases} \tag{17}$$

در نتیجه، کران‌های بالا و پایین تابع هدف، به ترتیب با حل دو مسئله برنامه‌ریزی خطی قطعی (۱۸) و (۱۹) بدست می‌آیند:

$$\begin{aligned} z^l = \max z &= 4x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 11x_4 \\ s.t.\ \ g_1(x) &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 15, \\ g_2(x) &= 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 80, \\ g_3(x) &= 3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 \leq 100, \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{aligned} \tag{18}$$

و

$$\begin{aligned} & z^u = \max z = ۴x_۱ + ۵x_۲ + ۹x_۳ + ۱۱x_۴ \\ & s.t.\ \ g_۱(x) = x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ \leq ۲۰, \\ & \qquad g_۲(x) = ۷x_۱ + ۵x_۲ + ۳x_۳ + ۲x_۴ \leq ۱۲۰, \\ & \qquad g_۳(x) = ۳x_۱ + ۵x_۲ + ۱۰x_۳ + ۱۵x_۴ \leq ۱۳۰, \\ & \qquad x_۱, x_۲, x_۳, x_۴ \geq ۰. \end{aligned} \tag{۱۹}$$

مقادیر بهینه تابع هدف مسائل (۱۸) و (۱۹) به ترتیب، برابر $z^l = ۹۹/۲۹$ و $z^u = ۱۳۰$ می‌باشند. سپس تابع عضویت تابع هدف، یعنی $\mu_۰$، به صورت (۲۰) تعریف می‌شود:

$$\mu_۰(z) = \begin{cases} ۱, & z > ۱۳۰ \\ ۱ - \frac{۱۳۰ - z}{۳۰/۷۱}, & ۹۹/۲۹ \leq z \leq ۱۳۰ \\ ۰. & z < ۹۹/۲۹. \end{cases} \tag{۲۰}$$

لذا بر طبق مسئله (۹)، مسئله برنامه‌ریزی خطی (۲۱) ، همانند مسئله فاز اول در روش دو فازی حل می‌شود:

$$\begin{aligned} & \max \alpha \\ & s.t.\ \ ۴x_۱ + ۵x_۲ + ۹x_۳ + ۱۱x_۴ \geq ۱۳۰ - ۳۰/۷۱(۱ - \alpha), \\ & \qquad g_۱(x) = x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ \leq ۱۵ + ۵(۱ - \alpha), \\ & \qquad g_۲(x) = ۷x_۱ + ۵x_۲ + ۳x_۳ + ۲x_۴ \leq ۸۰ + ۴۰(۱ - \alpha), \\ & \qquad g_۳(x) = ۳x_۱ + ۵x_۲ + ۱۰x_۳ + ۱۵x_۴ \leq ۱۰۰ + ۳۰(۱ - \alpha), \\ & \qquad \alpha \in [۰, ۱],\ \ x_۱, x_۲, x_۳, x_۴ \geq ۰. \end{aligned} \tag{۲۱}$$

جواب بهینه مسئله (۲۱) با درجه $\alpha^* = ۰/۵$، عبارت است از $x^* = (x_۱^*, x_۲^*, x_۳^*, x_۴^*) = (۸/۵۷, ۰, ۸/۹۳, ۰)$. با جایگزینی این جواب بهینه در تابع هدف و قیدهای مسئله (۱۴) به ترتیب، مقادیر $z(x^*) = ۱۱۴/۶۵$ ، $g_۱(x^*) = ۱۷/۵$ ، $g_۲(x^*) = ۸۶/۷۸$ و $g_۳(x^*) = ۱۱۵/۰۱$ بدست می‌آیند. بنابراین، بر اساس روابط (۱۵) ، (۱۶) ، (۱۷) و

(۱۸) مقادیر مربوط به توابع عضویت برابر $\mu_۰(x^*) = \mu_۱(x^*) = \mu_۳(x^*) = ۰/۵$ و $\mu_۲(x^*) = ۰/۸۳$ می‌شوند. حال، با توجه به مسئله (۱۲) ، مسئله برنامه‌ریزی خطی (۲۲) ، همانند مسئله فاز دوم در روش دو فازی حل می‌شود:

$$
\begin{aligned}
&\max\ \alpha_۰ + \alpha_۱ + \alpha_۲ + \alpha_۳ \\
&s.t.\ ۴x_۱ + ۵x_۲ + ۹x_۳ + ۱۱x_۴ \geq ۱۳۰ - ۳۰/۷۱(۱-\alpha), \\
&\qquad x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ \leq ۱۵ + ۵(۱-\alpha), \\
&\qquad ۷x_۱ + ۵x_۲ + ۳x_۳ + ۲x_۴ \leq ۸۰ + ۴۰(۱-\alpha), \\
&\qquad ۳x_۱ + ۵x_۲ + ۱۰x_۳ + ۱۵x_۴ \leq ۱۰۰ + ۳۰(۱-\alpha), \\
&\quad ۰/۵ \leq \alpha_۰ \leq ۱,\ ۰/۵ \leq \alpha_۱ \leq ۱,\ ۰/۸۳ \leq \alpha_۲ \leq ۱,\ ۰/۵ \leq \alpha_۳ \leq ۱, \\
&\qquad x_۱, x_۲, x_۳, x_۴ \geq ۰.
\end{aligned}
\tag{۲۲}
$$

$x^{**} = (x_۱^{**}, x_۲^{**}, x_۳^{**}, x_۴^{**}) = (۴/۰۵, ۵/۶۵, ۷/۸, ۰)$ جواب بهینه مسئله (۲۲) می‌باشد. با جایگذاری جواب بهینه در تابع هدف و در قیدهای مسئله (۱۴) به ترتیب مقادیر $z(x^{**}) = z^{**} = ۱۱۴/۶۵$ ، $g_۱(x^{**}) = ۱۷/۵$ ، $g_۲(x^{**}) = ۸۰$ و $g_۳(x^{**}) = ۱۱۵/۰۱$ بدست می‌آیند؛ در نتیجه $\mu_۰(x^{**}) = \mu_۱(x^{**}) = \mu_۳(x^{**}) = ۰/۵$ و $\mu_۲(x^{**}) = ۱$. یعنی x^{**}، هم مقدار بهینه هدف را بدست می‌آورد هم بالاترین درجه عضویت را که در $\mu_۲(x)$ حاصل شده است. در واقع تصمیم x^{**}، حاصل از روش دوفازی، ۸۰ واحد از منبع دوم را استفاده می‌کند در حالی که میزان استفاده از منبع دوم برای جواب x^{**}، با به کاربردن عملگر بلمن و زاده، برابر با ۸۶/۷۸ واحد است.

۲.۴ مسائل برنامه‌ریزی خطی انعطاف‌پذیرگروه-۲

در این زیربخش، مدل برنامه‌ریزی خطی فازی با بردار منابع انعطاف‌پذیر و تابع هدف انعطاف‌پذیر را بررسی می‌کنیم. برای حل این مدل، روش‌های زیمرمن، لای و هوانگ، چاناس، صافی و همکاران و چاندرا و آگاروال پیشنهاد شده است که در ادامه، این روش‌ها را بیان و برای هرکدام مثال‌هایی حل خواهیم کرد [۱]، [۶]، [۱۳]، [۱۶] و [۲۳]. فرم کلی مسئله برنامه‌ریزی خطی فازی با بردار منابع و تابع هدف انعطاف‌پذیر، به صورت

مسئله (۲۳) و معادل آن یعنی مسئله (۲۴) می‌باشد [۱۲]:

$$\begin{aligned} &\widetilde{\max}\ \ z = \textstyle\sum_{j=1}^{n} \mathbf{c}_j x_j \\ &s.t.\ \ \textstyle\sum_{j=1}^{n} \mathbf{a}_{ij} x_j \preceq \mathbf{b}_i, \quad i = 1, 2, ..., m, \\ &\qquad x_j \geq 0, \qquad\qquad j = 1, 2, ..., n. \end{aligned} \tag{۲۳}$$

$$\begin{aligned} &\widetilde{\max}\ \ z = \textstyle\sum_{j=1}^{n} \mathbf{c}_j x_j \\ &s.t.\ \ \textstyle\sum_{j=1}^{n} \mathbf{a}_{ij} x_j \leq \tilde{b}_i, \quad i = 1, 2, ..., m, \\ &\qquad x_j \geq 0, \qquad\qquad j = 1, 2, ..., n. \end{aligned} \tag{۲۴}$$

۱.۲.۴ روش زیمرمن

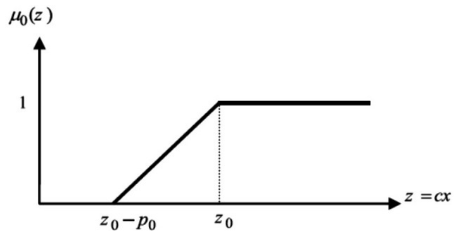
زیمرمن، روشی متقارن را برای حل مسئله برنامه‌ریزی خطی فازی انعطاف‌پذیر گروه-۲، پیشنهاد کرد [۲۳]، که بر طبق این روش، تابع عضویت قیدهای نامساوی فازی، μ_i، $i = 1, 2, ..., m$، همان تابع عضویت ارائه شده در رابطه (۸) می‌باشد. همچنین، z_0 به عنوان سطح اطمینان و p_0 تلورانس متناظرش برای تابع هدف، توسط تصمیم‌گیرنده مشخص می‌شوند. بدین ترتیب، مسئله (۲۳) را می‌توان به صورت (۲۵) نوشت:

$$\begin{aligned} &Find\ \ x \\ &s.t.\quad z = \textstyle\sum_{j=1}^{n} \mathbf{c}_j x_j \succeq z_0, \\ &\qquad g_i(x) = \textstyle\sum_{j=1}^{n} \mathbf{a}_{ij} x_j \preceq \mathbf{b}_i, \ \ i = 1, 2, ..., m, \\ &\qquad x_j \geq 0, \ \ j = 1, 2, ..., n. \end{aligned} \tag{۲۵}$$

دقت شود که p_0 یک تلورانس قابل قبول برای تابع هدف است. تابع عضویت تابع هدف، یعنی $\mu_0(z)$، را به صورت (۲۶) نمایش می‌دهیم:

$$\mu_0(z) = \begin{cases} 1, & z > z_0, \\ 1 - \frac{z_0 - z}{p_0}, & z_0 - p_0 \leq z \leq z_0, \\ 0, & z < z_0 - p_0. \end{cases} \tag{۲۶}$$

شکل ۵ ، تابع عضویت قید هدف فازی را نمایش می‌دهد:



شکل ۵: *تابع عضویت قید هدف فازی*

با استفاده از عملگر min به عنوان جمع‌کننده‌ای برای تابع هدف و قیدهای فازی، رابطهی $\mu_D(z)=\min\{\mu_\circ(z),\mu_\backslash(g_\backslash(x)),...,\mu_m(g_m(x))\}$ بدست می‌آید که به آن تابع عضویت فضای تصمیم می‌گویند. زیمرمن برای حل مسئله (۲۵) از عملگر بلمن و زاده استفاده کرد. بنابراین جواب بهینه با استفاده از رابطه (۲۷) بدست می‌آید:

$$\max \mu_D(z)=\min\{\mu_\circ(z),\mu_1(g_1(x)),...,\mu_m(g_m(x))\} \qquad (۲۷)$$

در رابطه (۲۷) ، فرض کنید $\alpha=\mu_D(z)=\min\{\mu_\circ(z),\mu_1(g_1(x)),...,\mu_m(g_m(x))\}$. در این حالت، برای حل سیستم فازی (۲۵) که با مسئله (۲۳) متناظر است، باید مسئله برنامه‌ریزی خطی قطعی (۲۸) حل شود:

$$\begin{aligned} &\max z=\alpha \\ &s.t.\quad \mu_\circ(z)\geq\alpha, \\ &\qquad \mu_i(g_i(x))\leq\alpha,\quad i=1,2,...,m, \\ &\qquad \alpha\in[\circ,1],\quad x_j\geq\circ,\quad j=1,2,...,n. \end{aligned} \qquad (۲۸)$$

با جایگذاری توابع عضویت قیدهای فازی (رابطه (۸)) و تابع عضویت تابع هدف (رابطه (۲۶)) در مسئله (۲۸) ، مسئله برنامه‌ریزی خطی قطعی (۲۹) بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} &\max \alpha \\ &s.t.\quad \textstyle\sum_{j=1}^{n}\mathbf{c}_j x_j\geq z_\circ-(1-\alpha)p_\circ, \\ &\qquad \textstyle\sum_{j=1}^{n}\mathbf{a}_{ij}x_j\leq\mathbf{b}_i+(1-\alpha)p_i,\quad i=1,2,...,m, \\ &\qquad \alpha\in[\circ,1],\quad x_j\geq\circ,\quad j=1,2,...,n. \end{aligned} \qquad (۲۹)$$

لازم به ذکر است که اگر (x^*, α^*) یک جواب بهینه مسئله (۲۹) باشد، بنابراین می‌تواند جواب بهینه مسئله برنامه‌ریزی خطی فازی (۲۳) نیز باشد که α^* تحت عنوان بالاترین درجه‌ای که سطح اطمینان $z_\circ$ در آن صدق می‌کند، می‌باشد. جهت مشاهده جزئیات بیشتر و مثال به مرجع [۱] مراجعه شود.

۲.۲.۴ روش لای و هوانگ

لای و هوانگ، روش زیمرمن را بهبود بخشیدند [۱۳]. آن‌ها چنین فرض کردند که تصمیم‌گیرنده فقط تابع هدف را مشخص می‌کند و مقدار تلورانس $p_\circ$ را بین ۰ و $z_\circ - z^l$ در نظر گرفتند. دقت شود که مقدار z^l را می‌توان از حل مسئله برنامه‌ریزی خطی (۱۰) بدست آورد. حال برای هر $p_\circ \in [\circ, z_\circ - z^l]$، تابع عضویت هدف فازی به صورت رابطه (۲۶) محاسبه و مسئله (۲۹) برای هر $p_\circ$ حل می‌شود. بنابراین، جواب بدست آمده برای هر $p_\circ$ در اختیار تصمیم‌گیرنده قرار می‌گیرد و وی جواب قابل قبول را انتخاب و در نتیجه، فرایند حل پایان می‌پذیرد.

مثال ۳.۴. مسئله برنامه‌ریزی خطی فازی انعطاف‌پذیر گروه-۲، را با $z_\circ = ۱۱۱/۵۷$ ، $p_۱ = ۵$ ، $p_۲ = ۴۰$ و $p_۳ = ۳۰$ در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} &\widetilde{\max}\, z = ۴x_۱ + ۵x_۲ + ۹x_۳ + ۱۱x_۴ \\ &s.t.\ \ g_۱(x) = x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ \le \widetilde{۱۵}, \\ &\qquad g_۲(x) = ۷x_۱ + ۵x_۲ + ۳x_۳ + ۲x_۴ \le \widetilde{۸۰}, \\ &\qquad g_۳(x) = ۳x_۱ + ۵x_۲ + ۱۰x_۳ + ۱۵x_۴ \le \widetilde{۱۰۰}, \\ &\qquad x_۱, x_۲, x_۳, x_۴ \ge \circ. \end{aligned} \tag{۳۰}$$

توابع عضویت قیدهای نامساوی فازی در روابط (۱۵) تا (۱۷) تعریف شده‌اند و تابع عضویت تابع هدف $\mu_\circ$ به صورت (۳۱) بیان می‌شود:

$$\mu_\circ(z) = \begin{cases} ۱, & z > ۱۱۱/۵۷, \\ ۱ - \frac{۱۱۱/۵۷ - z}{p_\circ}, & ۱۱۱/۵۷ - p_\circ \le z \le ۱۱۱/۵۷, \\ \circ, & z < ۱۱۱/۵۷ - p_\circ. \end{cases} \tag{۳۱}$$

با حل مسئله (۱۸) مقدار $z^l = ۹۹/۲۹$ بدست می‌آید. بنابراین، محدوده قابل قبول $p_\circ$، برابر $[\circ, z_\circ - z^l] = [\circ, ۱۲/۲۸]$ می‌شود. پنج مقدار ممکن $(\circ, ۳, ۶, ۹, ۱۲, ۱۲/۲۸)$ را برای $p_\circ$ انتخاب و در رابطه (۳۱) جایگزین می‌کنیم. مثالا به ازای $p_\circ = ۹$، داریم:

$$\mu_\circ(z) = \begin{cases} ۱, & z > ۱۱۱/۵۷, \\ ۱ - \frac{۱۱۱/۵۷ - z}{۹}, & ۱۰۲/۵۷ \leq z \leq ۱۱۱/۵۷, \\ \circ, & z < ۱۰۲/۵۷. \end{cases} \tag{۳۲}$$

در این حالت، مسئله (۲۹) به ازای هر کدام از مقادیر مفروض برای $p_\circ$، بازنویسی و حل می‌شود. به عنوان مثال به ازای $p_\circ = ۹$ ، مسئله (۳۳) را حل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} & \max \alpha \\ & s.t. \;\; ۴x_۱ + ۵x_۲ + ۹x_۳ + ۱۱x_۴ \geq ۱۱۱/۵۷ - ۹(۱-\alpha), \\ & \quad g_۱(x) = x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ \leq ۱۵ + ۵(۱-\alpha), \\ & \quad g_۲(x) = ۷x_۱ + ۵x_۲ + ۳x_۳ + ۲x_۴ \leq ۸\circ + ۴\circ(۱-\alpha), \\ & \quad g_۳(x) = ۳x_۱ + ۵x_۲ + ۱\circ x_۳ + ۱۵x_۴ \leq ۱\circ\circ + ۳\circ(۱-\alpha), \\ & \quad \alpha \in [\circ, ۱], \; x_۱, x_۲, x_۳, x_۴ \geq \circ. \end{aligned} \tag{۳۳}$$

جواب بهینه مسئله (۳۳) $x^* = (x_۱^*, x_۲^*, x_۳^*, x_۴^*) = (۸/\circ۲۷, \circ, ۸/۵۲, \circ)$ با $\alpha^* = \circ/۶۹۱$ است. با جایگذاری این جواب بهینه در هدف، $z(x^*) = z^* = ۱\circ۸/۷۸۸$ بدست می‌آید. به طور مشابه، جواب بهینه مسئله (۳۰) به ازای $z_\circ = ۱۱۱/۵۷$، و برای هر $p_\circ$ محاسبه و نتایج در جدول ۱ نشان داده می‌شوند. در نهایت تصمیم‌گیرنده مقدار

جدول ۱: *جواب‌های بهینه دگرین مسئله* (۳۰)

$p_\circ$	α^*	x^*	z^*
۰	۰/۴۰۰	(۸/۲۸۶, ۰, ۸/۷۱۴, ۰)	۱۱۱/۵۷۰
۳	۰/۳۶۴	(۸/۱۸۴, ۰, ۶۳۸, ۰)	۱۱۰/۴۷۸
۶	۰/۳۳۵	(۸/۰۹۹, ۰, ۸/۵۷۴, ۰)	۱۰۹/۵۶۲
۹	۰/۳۰۹	(۸/۰۲۷, ۰, ۸/۵۲۰, ۰)	۱۰۸/۷۸۸
۱۲/۲۸	۰/۲۸۶	(۷/۹۵۹, ۰, ۸/۴۶۹, ۰)	۱۰۸/۰۵۷

$p_\circ = ۱۰$ را انتخاب می‌کند و مسئله برنامه‌ریزی خطی (۳۴) حل می‌شود:

$$\begin{aligned}
&\max \alpha \\
&s.t.\ \ ۴x_۱ + ۵x_۲ + ۹x_۳ + ۱۱x_۴ \geq ۱۱۱/۵۷ - ۱۰(۱-\alpha), \\
&\qquad g_۱(x) = x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ \leq ۱۵ + ۵(۱-\alpha), \\
&\qquad g_۲(x) = ۷x_۱ + ۵x_۲ + ۳x_۳ + ۲x_۴ \leq ۸۰ + ۴۰(۱-\alpha), \\
&\qquad g_۳(x) = ۳x_۱ + ۵x_۲ + ۱۰x_۳ + ۱۵x_۴ \leq ۱۰۰ + ۳۰(۱-\alpha), \\
&\qquad \alpha \in [\circ, ۱],\ x_۱, x_۲, x_۳, x_۴ \geq \circ.
\end{aligned} \tag{۳۴}$$

جواب بهینه این مسئله با $\alpha^* = \circ/۷$ برابر $x^* = (x_۱^*, x_۲^*, x_۳^*, x_۴^*) = (۸/\circ۱, \circ, ۸/۵, \circ)$ است. با جایگزینی این جواب بهینه در هدف، مقدار $z(x^*) = z^* = ۱\circ۸/۵۴$ بدست می‌آید.

۳.۲.۴ روش چاناس

چاناس مدلی غیر متقارن را برای حل مسئله برنامه‌ریزی خطی فازی انعطاف‌پذیر گروه-۲، پیشنهاد کرد[۶]. بر طبق این روش، تصمیم‌گیرنده نه مقدار $z_\circ$ و نه تلورانسش یعنی $p_\circ$ را تعیین نمی‌کند. بنابر روش چاناس، ابتدا مسئله (۳۵) حل و سپس نتایج در اختیار تصمیم‌گیرنده قرار می‌گیرند تا سطح اطمینان و تلورانس مربوط به تابع هدف را تخمین بزنند:

$$\begin{aligned}
&\max z = \textstyle\sum_{j=۱}^{n} \mathbf{c}_j x_j \\
&s.t.\ \ g_i(x) = \textstyle\sum_{j=۱}^{n} \mathbf{a}_{ij} x_j \preceq \mathbf{b}_i, \quad i = ۱, ۲, ..., m, \\
&\qquad x_j \geq \circ, \qquad\qquad j = ۱, ۲, ..., n.
\end{aligned} \tag{۳۵}$$

در مسئله (۳۵) تابع عضویت قیدهای نامساوی فازی همانند رابطه (۸) در نظرگرفته می‌شوند. سپس با استفاده از روش وردگی و در نظر گرفتن $\theta = ۱ - \alpha$، مسئله (۳۵) به صورت (۳۶) نوشته می‌شود [۲۰] :

$$\begin{aligned}
&\max z = \textstyle\sum_{j=۱}^{n} \mathbf{c}_j x_j \\
&s.t.\ \ g_i(x) = \textstyle\sum_{j=۱}^{n} \mathbf{a}_{ij} x_j \leq \mathbf{b}_i + \theta p_i, \quad i = ۱, ۲, ..., m, \\
&\qquad \theta \in [\circ, ۱], \quad x_j \geq \circ, \qquad j = ۱, ۲, ..., n.
\end{aligned} \tag{۳۶}$$

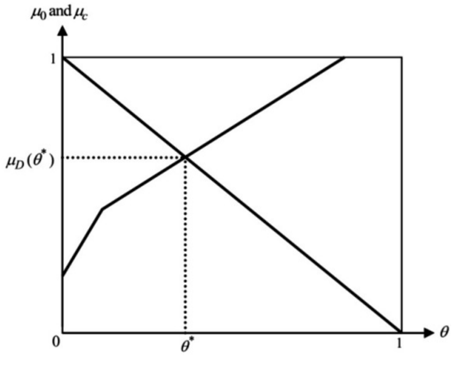
جواب بهینه مسئله برنامه‌ریزی خطی پارامتریک (۳۶) را می‌توان با استفاده از تکنیک‌های پارامتری بدست آورد. فرض کنید به ازای θ، مقادیر $x^*(\theta)$ و $z^*(\theta)$ به ترتیب جواب بهینه و مقدار تابع هدف بهینه متناظر مسئله برنامه‌ریزی خطی پارامتری باشند. بنابراین قیدهای زیر برقرارند:

$$\mu_i(g_i(x^*(\theta))) \geq ۱ - \theta, \quad i = ۱, ۲, ..., m.$$

به عبارت دیگر، در حالتی که $p_i > ۰$ ، برای هر جواب پایه‌ای غیر صفر، حداقل یک i وجود دارد به طوری که $\mu_i(g_i(x^*(\theta))) = ۱ - \theta$ باشد. لذا درجه معمول تطابق قیدها برابر $\mu_c(g(x^*(\theta))) = \min\limits_{۱\leq i\leq m} \mu_i(g_i(x^*(\theta))) = ۱ - \theta$ می‌باشد. یعنی برای هر θ می‌توان جوابی از درجه $۱ - \theta$ دست آورد که در همه قیدها صدق کند. حال، یک جواب برای تخمین $z_\circ$ و $p_\circ$ در اختیار تصمیم‌گیرنده قرار می‌گیرد. بنابراین تابع عضویت تابع هدف، به صورت (۳۷) بیان می‌شود:

$$\mu_\circ(z^*(\theta)) = \begin{cases} ۱, & z^*(\theta) > z_\circ \\ ۱ - \frac{z_\circ - z^*(\theta)}{p_\circ}, & z_\circ - p_\circ \leq z^*(\theta) \leq z_\circ \\ ۰. & z^*(\theta) < z_\circ - p_\circ \end{cases} \tag{۳۷}$$

در این حالت، همانطور که در شکل ۶ نمایش داده شده است، $x^*(\theta)$، جواب بهینه نهایی



شکل ۶: اشتراک $\mu_\circ$ و μ_D

مسئله برنامه‌ریزی خطی فازی انعطاف‌پذیرگروه-۲، خواهد بود:

$$\mu_D(\theta^*) = \max\{\mu_D(\theta)\} = \mu_c(g(x^*(\theta))) = \max\{\min\{\mu_\circ(\theta), \mu_c(\theta)\}\}.$$

درگام‌های زیر، خلاصه روش چاناس بیان می‌شود:

گام اول. مسئله برنامه‌ریزی خطی پارامتری (۳۶) را حل و مقادیر $x^*(\theta)$ و $z^*(\theta)$ را تعیین کنید.

گام دوم. تعیین مقدار مناسب θ برای بدست آوردن $z_\circ$ و انتخاب $p_\circ$.

گام سوم. بدست آوردن تابع عضویت $\mu_\circ(z^*(\theta))$ ، همانند رابطه (۳۷).

گام چهارم. برای یافتن θ^*، قرار دهید $\mu_c = \mu_\circ = ۱ - \theta$.

گام پنجم. جواب بهینه مسئله برنامه‌ریزی خطی فازی (۱۳) عبارت است از $x^*(\theta^*)$ با مقدار بهینه هدف $z^*(\theta^*)$.

مثال ۴.۴. مسئله (۳۸) را با $p_۱ = ۳$ و $p_۲ = p_۳ = ۶$ در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned}
\widetilde{\max}\;\; & z = x_۱ + x_۲ \\
s.t.\;\; & g_۱(x) = -x_۱ + ۳x_۲ \preceq ۲۱, \\
& g_۲(x) = x_۱ + ۳x_۲ \preceq ۲۷, \\
& g_۳(x) = ۴x_۱ + ۳x_۲ \preceq ۴۵, \\
& g_۴(x) = ۳x_۱ + x_۲ \leq ۳۰, \\
& x_۱, x_۲ \geq ۰.
\end{aligned} \tag{۳۸}$$

فرآیند حل به صورت زیر می‌باشد:

گام اول. بر طبق مسئله (۳۶) ، مسئله برنامه‌ریزی خطی پارامتری زیر باید حل شود:

$$\begin{aligned} \max\ & z = x_1 + x_2 \\ s.t.\ & g_1(x) = -x_1 + 3x_2 \leq 21 + 3\theta, \\ & g_2(x) = x_1 + 3x_2 \leq 27 + 6\theta, \\ & g_3(x) = 4x_1 + 3x_2 \leq 45 + 6\theta, \\ & g_4(x) = 3x_1 + x_2 \leq 30, \\ & 0 \leq \theta \leq 1, \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

جواب بهینه $x^*(\theta) = (x_1^*(\theta), x_2^*(\theta)) = (6, 7+2\theta)$ و مقدار هدف $z^*(\theta) = 13+2\theta$ بدست می‌آید.

گام دوم. فرض کنید $z_0 = 14$ و $p_0 = 1$.

گام سوم. تابع عضویت $\mu_0(z^*(\theta))$ به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\mu_0(z^*(\theta)) = \begin{cases} 1, & 13 + 2\theta > 14, \\ 1 - \frac{14-(13+2\theta)}{1}, & 13 \leq 13 + 2\theta \leq 14, \\ 0, & 13 + 2\theta < 13. \end{cases}$$

گام چهارم. به منظور یافتن θ^* ، قرار دهید $\mu_c = \mu_0 = 1 - \theta$. آنگاه $2\theta = 1 - \theta$ در نتیجه $\theta^* = \frac{1}{3}$.

گام پنجم. جواب بهینه $x^*(\frac{1}{3}) = (x_1^*(\frac{1}{3}), x_2^*(\frac{1}{3})) = (6, \frac{23}{3})$ و مقدار بهینه هدف $z^*(\frac{1}{3}) = 13 + \frac{2}{3} = 13/667$ بدست می‌آید.

شایان ذکر است که تابع عضویت هدف فازی که توسط چاناس پیشنهاد شده است، با استفاده از جواب بهینه پارامتری به صورت تابعی پارامتری به جای تابع اصلی متغیرهای تصمیم، ساخته می‌شود. با توجه به اینکه در بسیاری از مسائل، تعداد قیود و متغیرها خیلی زیادند، این روش یک روش کاربردی و کارا نیست.

۴.۲.۴ روش صافی و همکاران

برای حل مسائل برنامه‌ریزی خطی فازی انعطاف‌پذیر گروه-۲، بر طبق روش زیمرمن، باید مسئله (۲۸) یا (۲۹) حل شود. صافی و همکاران حالتی را که در آن مسئله دارای جواب‌های بهینه دگرین می‌شود را مورد بررسی قرار دادند [۱۶]. از آنجا که همه جواب‌های بهینه دگرین، آلفای یکسانی دارند، مقادیر یکسانی برای مسئله برنامه‌ریزی خطی (۲۸) بدست می‌آید. مگر اینکه مقدار $z = cx$ برای همه جواب‌های بهینه دگرین بررسی شود، زیرا ممکن است جوابی که در اختیار تصمیم‌گیرنده قرار می‌گیرد بهترین جواب مسئله نباشد. همچنین امکان دارد وقتی جواب بهینه دگرین باشد، اولین جواب بدست آمده با نرم‌افزار، نمایش داده شود در حالی که سایر جواب‌ها دارای مقادیر بهتری برای cx باشند. همچنین ممکن است در طی فرآیند حل، چرخه‌ای ایجاد شود و بنابراین نرم‌افزار نتواند همه جواب‌های بهینه دگرین را بدست آورد. در این حالت ممکن است بهترین مقدار تابع هدف از دست برود. علاوه بر این، در روش زیمرمن، اگر یک جواب بهینه برای مدل برنامه‌ریزی خطی متناظر بدست آید یعنی مسئله کراندار است در حالی که ممکن است $z = cx$ بی‌کران شود. بنابراین، واضح است وقتی یکی از این جواب‌های بهینه دگرین متناظر با مسئله برنامه‌ریزی خطی، در اختیار تصمیم‌گیرنده قرار گیرد، جواب بهینه نیست. لذا صافی و همکاران الگوریتمی برای حذف این نواقص، پیشنهاد و آنها را با حل چند مثال بررسی کردند.

مثال ۵.۴. مسئله برنامه‌ریزی خطی فازی انعطاف‌پذیر گروه-۲، با $z_0 = ۳$ ، $p_0 = ۱$ ، $p_1 = ۲$ و $p_2 = p_3 = ۳$ در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} \widetilde{\max}\ & z = x_1 + x_2 \\ s.t.\ \ & g_1(x) = x_1 + 2x_2 \preceq 10, \\ & g_2(x) = -2x_1 + x_2 \preceq 3, \\ & g_3(x) = 2x_1 + x_2 \preceq 12, \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned} \tag{۳۹}$$

بر طبق روش زیمرمن برای بدست آوردن جواب بهینه مسئله (۳۹) ، مسئله برنامه‌ریزی

خطی قطعی (۴۰) (با توجه به مسئله (۲۹)) حل می‌شود:

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\max}\ z = x_۱ + x_۲ \\
&s.t.\ \ z = x_۱ + x_۲ \geq ۳ - (۱ - \alpha) \\
&\qquad g_۱(x) = x_۱ + ۲x_۲ \leq ۱۰ + ۲(۱ - \alpha), \\
&\qquad g_۲(x) = -۲x_۱ + x_۲ \leq ۳ + ۳(۱ - \alpha), \\
&\qquad g_۳(x) = ۲x_۱ + x_۲ \leq ۱۲ + ۳(۱ - \alpha), \\
&\qquad ۰ \leq \alpha \leq ۱, \\
&\qquad x_۱, x_۲ \geq ۰.
\end{aligned} \tag{۴۰}$$

جواب‌های بهینه دگرین حاصل از مسئله برنامه‌ریزی خطی قطعی (۴۰)، با $\alpha^* = ۱$، در جدول ۲ ارائه شده‌اند. از آنجا که هدف، بدست آوردن بهترین مقدار برای آلفا است، ممکن است جواب بهینه دگرینی که در اختیار تصمیم‌گیرنده قرار می‌گیرد دارای بهترین مقدار z نباشد. همانطور که در جدول ۲ مشاهده می‌شود، جواب بهینه x^*_E دارای بهترین مقدار تابع هدف است و باید به عنوان جواب بهینه مسئله (۳۹) انتخاب شود. علاوه بر این، طبق آنچه که در روش صافی و همکاران بیان شد، وقتی مسئله با نرم افزار WinQSB حل شود یک دور(چرخه) بین x^*_A و x^*_B ایجاد می‌شود و بنابراین تنها دو جواب به صورت جواب‌های بهینه دگرین بدست می‌آید. در نتیجه امکان بدست آوردن جواب‌های بهینه دگرینی که دارای بهترین مقادیر برای تابع هدف z هستند، وجود ندارد.

جدول ۲: *جواب‌های بهینه دگرین* (۳۰)

تابع هدف	جواب بهینه
$z^*_A = ۳$	$x^*_A = (۳, ۰)$
$z^*_B = ۳$	$x^*_B = (۰, ۳)$
$z^*_C = ۵/۴$	$x^*_C = (۰/۸, ۴/۶)$
$z^*_D = ۶$	$x^*_D = (۶, ۰)$
$z^*_E = ۷/۳۳۳۴$	$x^*_E = (۴/۶۶۶۷, ۲/۶۶۶۷)$

مثال ۶.۴. مسئله برنامه‌ریزی خطی فازی انعطاف‌پذیر گروه-۲، با $z_۰ = ۷$ ، $p_۰ = ۱۰$ ، $p_۱ = p_۲ = p_۴ = p_۵ = ۲$ و $p_۳ = p_۶ = ۶$ را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\max}\ z = ۲x_۱ + ۲/۲x_۲\\
&s.t.\ \ g_۱(x) = ۲x_۱ + x_۲ \preceq ۸,\\
&\qquad g_۲(x) = x_۱ + x_۲ \succeq ۳,\\
&\qquad g_۳(x) = -x_۱ + x_۲ \preceq ۲,\\
&\qquad g_۴(x) = -x_۱ + ۱۰x_۲ \preceq ۱۰,\\
&\qquad g_۵(x) = ۳x_۱ + ۳x_۲ \preceq ۶,\\
&\qquad g_۶(x) = x_۱ - x_۲ \succeq ۲,\\
&\qquad x_۱, x_۲ \geq ۰.
\end{aligned} \tag{۴۱}$$

برای حل این مسئله، لازم است که مسئله برنامه‌ریزی خطی قطعی با توجه به مسئله (۲۹) حل شود. جواب‌های بهینه $x_A^* = (۲/۲۵, ۰)$ و $x_B^* = (۱۰/۵۶۲۶, ۰/۶۸۷۵)$ با $\alpha^* = ۰/۶۲۵$ بدست می‌آیند. مقادیر هدف برای x_A^* و x_B^* به ترتیب $z_A^* = ۴/۵$ و $z_B^* = ۴/۶۳۷۵$ می‌باشند. مشاهده می‌شود که از این جواب‌های بهینه نه تنها مقادیر مختلفی برای هدف بدست آمده است بلکه دارای درجه عضویت‌های متفاوت $\mu_z(x_A^*) = ۰/۷۵$ و $\mu_z(x_B^*) = ۰/۷۶۳۷$ نیز هستند.

مثال ۷.۴. مسئله برنامه‌ریزی خطی فازی انعطاف‌پذیر گروه-۲، با $z_۰ = ۶$ ، $p_۰ = ۱$ ، $p_۱ = ۲$ و $p_۲ = ۲$ را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\max}\ z = x_۱ + x_۲\\
&s.t.\ \ g_۱(x) = ۲x_۱ - ۵x_۲ \preceq ۱۰,\\
&\qquad g_۲(x) = ۵x_۱ - ۲x_۲ \preceq ۳۰,\\
&\qquad x_۱, x_۲ \geq ۰.
\end{aligned} \tag{۴۲}$$

برای حل این مسئله، لازم است که مسئله برنامه‌ریزی خطی قطعی با توجه به مسئله (۲۹) حل شود. جواب بهینه $x_A^* = (۵/۷۱۴۳, ۰/۲۸۵۷)$ ، $x_B^* = (۶/۱۹۰۵, ۰/۴۷۶۲)$ و $x_C^* = (۵/۷۱۴۳, ۰/۲۸۷۵)$ با $\alpha^* = ۱$ بدست می‌آید که مقادیر هدف برای x_A^* ، x_B^* و x_C^* به ترتیب $z_A^* = ۶$ ، $z_B^* = ۶/۶۶۶۷$ و $z_C^* = ۶$ می‌باشند. اما هیچ کدام از این مقادیر، بهترین مقدار تابع هدف نیستند. در واقع، ضرایب $x_۲$ در تابع هدف و قیدها نشان می‌دهد که مقدار متغیر $x_۲$ را می‌توان تا بی‌نهایت افزایش داد و در نتیجه تابع هدف بی‌کران می‌شود. روش زیمرمن این حالت را نمی‌تواند تشخیص دهد.

آنچه که از مثال‌های فوق مشاهده می‌شود این است که روش زیمرمن در طی فرآیند حل مسائل برنامه‌ریزی خطی فازی انعطاف‌پذیر گروه-۲، نمی‌تواند این حالت‌ها را تشخیص و در نتیجه نمی‌تواند بهترین مقدار تابع هدف را در اختیار تصمیم‌گیرنده قرار دهد. برای رفع این محدودیت‌ها، صافی و همکاران روش زیمرمن را بهبود بخشیدند. وقتی مسئله (۲۹) جواب بهینه منحصر به فرد دارد آنگاه مسئله (۲۳) دارای جواب بهینه می‌باشد. در غیر این صورت، فرض کنید که (x^*, α^*) جواب بهینه مسئله برنامه‌ریزی خطی قطعی (۲۹) باشد پس مسئله برنامه‌ریزی خطی (۴۳) را حل می‌کنیم:

$$
\begin{aligned}
&\max z = \textstyle\sum_{j=1}^{n} \mathbf{c}_j x_j \\
&s.t.\ \ \textstyle\sum_{j=1}^{n} \mathbf{c}_j x_j \geq z_0 - (1-\alpha^*)p_0, \\
&\qquad \textstyle\sum_{j=1}^{n} \mathbf{a}_{ij} x_j \leq \mathbf{b}_i + (1-\alpha^*)p_i, \quad i = 1, 2, ..., m, \\
&\qquad x_j \geq 0, \qquad\qquad\qquad\qquad j = 1, 2, ..., n.
\end{aligned}
\tag{۴۳}
$$

اگر مسئله (۴۳) بی‌کران شود آنگاه مسئله (۲۳) جواب بهینه کراندار ندارد. اگر مسئله (۴۳) جواب بهینه منحصر به فرد x^{**} داشته باشد، بهترین مقدار تابع هدف برابر $z^{**} = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{c}_j x_j^{**}$ فرض می‌شود. همچنین فرض کنید درجه تطابق برای تابع هدف اصلی برابر $\mu_0(x^{**})$ و درجه تطابق برای قیود برابر $\mu_i(x^{**})$ باشد. در نتیجه اگر مسئله (۴۳) جواب‌های بهینه دگرین داشته باشد، مسئله (۴۴) را حل می‌کنیم:

$$
\begin{aligned}
&\max \textstyle\sum_{i=0}^{m} \alpha_i \\
&s.t.\ \ \mu_0(z^{**} = cx^{**}) \leq \alpha_0, \\
&\qquad \mu_i(g_i(x^{**})) \leq \alpha_i, \qquad i = 1, 2, ..., m, \\
&\qquad \mu_0(z = cx) \geq \alpha_0 \\
&\qquad \mu_i(g_i(x)) \geq \alpha_i, \qquad i = 1, 2, ..., m, \\
&\qquad cx = cx^{**} \\
&\qquad \alpha_i \in [0, 1], \qquad\qquad i = 1, 2, ..., m, \\
&\qquad x_j \geq 0, \qquad\qquad\quad j = 1, 2, ..., n.
\end{aligned}
\tag{۴۴}
$$

مسئله (۴۴) با مسئله (۴۵) معادل است:

$$\begin{aligned}
&\max \textstyle\sum_{i=0}^{m} \alpha_i \\
&s.t.\ \ \textstyle\sum_{j=1}^{n} \mathbf{c}_j x_j \geq z_0 - (1-\alpha_0)p_0, \\
&\qquad g_i(x) = \textstyle\sum_{j=1}^{n} \mathbf{a}_{ij} x_j \leq \mathbf{b}_i + (1-\alpha_i)p_i, \qquad i = 1, 2, ..., m, \\
&\qquad \textstyle\sum_{j=1}^{n} \mathbf{c}_j x_j^{**} \geq z_0 - (1-\alpha_0)p_0 \\
&\qquad g_i(x^{**}) = \textstyle\sum_{j=1}^{n} \mathbf{a}_{ij} x_j^{**} \geq \mathbf{b}_i + (1-\alpha_i)p_i, \quad i = 1, 2, ..., m, \\
&\qquad \textstyle\sum_{j=1}^{n} \mathbf{c}_j x_j = \textstyle\sum_{j=1}^{n} \mathbf{c}_j x_j^{**} \\
&\qquad \alpha_i \in [0, 1], \qquad\qquad i = 1, 2, ..., m, \\
&\qquad x_j \geq 0, \qquad\qquad\quad j = 1, 2, ..., n.
\end{aligned} \tag{۴۵}$$

جواب بهینه مسئله (۴۵) بهترین مقدار را برای تابع هدف $z = cx$ نتیجه می‌دهد، این جواب در مجموعه‌ی جواب‌های بهینه دگرین، یک جواب کارای فازی است.

مثال ۸.۴. مسئله ارائه شده در مثال ۵.۴ را در نظر بگیرید. از آنجا که مسئله (۴۰)، در $\alpha^* = 1$ جواب‌های بهینه دگرین دارد، پس مسئله برنامه‌ریزی خطی زیر را با توجه به مسئله زیر حل می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\max}\ z = x_1 + x_2 \\
&s.t.\ \ z = x_1 + x_2 \geq 3 \\
&\qquad g_1(x) = x_1 + 2x_2 \leq 10, \\
&\qquad g_2(x) = -2x_1 + x_2 \leq 3, \\
&\qquad g_3(x) = 2x_1 + x_2 \leq 12, \\
&\qquad x_1, x_2 \geq 0.
\end{aligned}$$

$x^{**} = (۴/۶۶۶۷, ۲/۶۶۶۷)$ جواب بهینه منحصر به فرد مسئله با مقدار تابع هدف $z^{**} = ۷/۳۳۳۳$ است که این جواب، بهترین جواب برای تابع هدف $z = cx$ می‌باشد.

مثال ۹.۴. مسئله ارائه شده در مثال ۶.۴ را در نظر بگیرید. مسئله متناظر با مسئله (۲۹)، دارای جواب بهینه دگرین با $\alpha^* = ۰/۶۲۵$ است. مسئله برنامه‌ریزی خطی متناظر

(۴۳) دارای جواب منحصر به فرد $x^{**} = (۱/۵۶۲۶, ۰/۶۸۷۵)$ با $\mu_۰(x^{**}) = ۰/۶۲۵$ و $z^{**} = ۴/۶۳۷۵$ می‌باشد.

مثال ۱۰.۴. مثال ۷.۴ را در نظر بگیرید. دقت شود، مسئله متناظر با مسئله (۲۹) دارای جواب بهینه دگرین با $\alpha^* = ۱$ است. با حل مسئله برنامه‌ریزی خطی (۴۳) ، جواب بی‌کران بدست می‌آید در نتیجه مسئله (۴۲) هیچ جواب بهینه کرانداری ندارد.

مثال ۱۱.۴. مسئله برنامه‌ریزی خطی فازی انعطاف‌پذیر گروه-۲، با $z_۰ = ۱۳۰$ ، $p_۰ = ۳۰/۷۱۴۳$ ، $p_۱ = ۵$ ، $p_۲ = ۴۰$ و $p_۳ = ۳۰$ را در نظر بگیرید [۱۶].

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\max}\, z = ۴x_۱ + ۵x_۲ + ۹x_۳ + ۱۱x_۴\\
&s.t.\ \ g_۱(x) = x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ \le \widetilde{۱۵},\\
&\qquad g_۲(x) = ۷x_۱ + ۵x_۲ + ۳x_۳ + ۲x_۴ \le \widetilde{۸۰},\\
&\qquad g_۳(x) = ۳x_۱ + ۵x_۲ + ۱۰x_۳ + ۱۵x_۴ \le \widetilde{۱۰۰},\\
&\qquad x_۱, x_۲, x_۳, x_۴ \ge ۰.
\end{aligned}$$

برای حل این مسئله، ابتدا مسئله برنامه‌ریزی خطی قطعی (۴۶) را که بر اساس مسئله (۲۹) نوشته شده است، را حل می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
&\max \alpha\\
&s.t.\ \ ۴x_۱ + ۵x_۲ + ۹x_۳ + ۱۱x_۴ \ge ۱۳۰ - ۳۰/۷۱(۱-\alpha),\\
&\qquad g_۱(x) = x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ \le ۱۵ + ۵(۱-\alpha),\\
&\qquad g_۲(x) = ۷x_۱ + ۵x_۲ + ۳x_۳ + ۲x_۴ \le ۸۰ + ۴۰(۱-\alpha),\\
&\qquad g_۳(x) = ۳x_۱ + ۵x_۲ + ۱۰x_۳ + ۱۵x_۴ \le ۱۰۰ + ۳۰(۱-\alpha),\\
&\qquad \alpha \in [۰, ۱],\ x_۱, x_۲, x_۳, x_۴ \ge ۰.
\end{aligned} \tag{۴۶}$$

این مسئله دارای جواب بهینه دگرین با $\alpha^* = ۰/۵$ است. بنابراین با توجه به مسئله

(۴۳)، مسئله برنامه‌ریزی خطی (۴۷) را حل می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
&\max z = 4x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 11x_4\\
&s.t.\ \ 4x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 11x_4 \geq 114.64285,\\
&\qquad g_1(x) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 17.5,\\
&\qquad g_2(x) = 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 100,\\
&\qquad g_3(x) = 3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 \leq 115,\\
&\qquad \alpha \in [0, 1],\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.
\end{aligned} \tag{47}$$

$x^{**} = (8/5714, 0, 8/9286, 0)$ یکی از جواب‌های بهینه دگرین است که مقدار تابع هدف متناظر با آن برابر $z^{**} = 114/64286$ می‌شود. حال بر اساس مسئله (۴۴)، مسئله برنامه‌ریزی خطی (۴۸) را باید حل کنیم:

$$\begin{aligned}
&\max \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3\\
&s.t.\ \ 4x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 11x_4 \geq 130 - 30/71(1-\alpha_0),\\
&\qquad g_1(x) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 15 + 5(1-\alpha_1),\\
&\qquad g_2(x) = 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 80 + 40(1-\alpha_2),\\
&\qquad g_3(x) = 3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 \leq 100 + 30(1-\alpha_3),\\
&\qquad 0/5 \leq \alpha_0 \leq 11,\ \ 0/5 \leq \alpha_1 \leq 1,\ \ 0/83 \leq \alpha_2 \leq 1,\ \ 0/5 \leq \alpha_3 \leq 1,\\
&\qquad 4x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 11x_4 = 114.64286,\\
&\qquad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.
\end{aligned} \tag{48}$$

مقدار $x^{***} = (4/048, 5/655, 7/798, 0)$ جواب بهینه مسئله (۴۸) است که جواب کارای فازی مسئله (۴۶) نیز می‌باشد.

۵.۲.۴ روش چاندرا و آگاروال

در فرآیند قطعی، تمایز آشکاری بین هدف و قیدها وجود دارد. هر جواب بهینه، اول باید شدنی باشد یعنی در همه قیدها صدق کند. اما در فرآیند فازی، مثلاً روش زیمرمن، هیچ

تمایزی بین تابع هدف و قیدهای فازی وجود ندارد زیرا همه آن‌ها تحت عملگر min ارزیابی می‌شوند. برای رفع این مورد، چاندرا و آگاروال روش جدیدی را برای حل مسائل برنامه‌ریزی خطی فازی انعطاف‌پذیر گروه-۲، یعنی مسئله (۲۳)، ارائه کردند که چارچوب آن، دو هدفه است [۷]. در این روش سعی شده است که بین دو هدف تطابق قیود و تلاش برای رسیدن به سطح اطمینان تابع هدف، سازگاری ایجاد شود. در فاز اول این روش، تنها قیدها در نظر گرفته می‌شوند. یعنی، در این فاز، توابع عضویت متناظر با قیدها تحت عملگر min مورد بررسی قرار می‌گیرند تا مجموعه‌ای از بهترین جواب‌های شدنی را بدست آورند. سپس در فاز دوم، درجه عضویت تابع هدف فازی روی مجموعه شدنی که در فاز اول بدست آمد، بیشینه می‌شود. به نظر می‌رسد این روش، یک روش طبیعی و مناسب باشد زیرا تمایز واقعی که در حالت قطعی بین توابع هدف و قیود وجود دارد را نمایش می‌دهد. از آنجا که این روش، بر اساس روش زیمرمن عمل می‌کند لذا همه خواص مرتبط با آن را دارد. در ادامه به بررسی جزئیات روش چاندرا و آگاروال می‌پردازیم. مسئله‌ی فاز یک برای یافتن مجموعه‌ای از بهترین جواب‌های شدنی به صورت (۴۹) می‌باشد:

$$
\begin{aligned}
&\max \beta \\
&s.t.\ \ \mu_i(g_i(x)) \geq \beta, \qquad i = ۱, ۲, ..., m, \\
&\qquad \beta \in [۰, ۱],\ \ x_j \geq ۰, \quad j = ۱, ۲, ..., n.
\end{aligned} \tag{۴۹}
$$

مسئله (۴۹) با مسئله (۵۰) معادل است:

$$
\begin{aligned}
&\max \beta \\
&s.t.\ \ \textstyle\sum_{j=۱}^{n} \mathbf{a}_{ij} x_j \leq \mathbf{b}_i + (۱-\beta) p_i, \quad i = ۱, ۲, ..., m, \\
&\qquad \beta \in [۰, ۱],\ \ x_j \geq ۰, \qquad\qquad j = ۱, ۲, ..., n.
\end{aligned} \tag{۵۰}
$$

فرض کنید $(\bar{x}, \bar{\beta})$ جواب بهینه مسئله (۵۰) باشد. بنابراین $\bar{x}$ یک جواب شدنی مسئله (۲۳) است. مجموعه‌ی همه جواب‌های شدنی را با $S(\bar{\beta})$ نشان می‌دهیم. در این حالت، هر $\bar{x} \in S(\bar{\beta})$ دارای بیشترین درجه‌ای است که همه قیدهای $\sum_{j=۱}^{n} \mathbf{a}_{ij} x_j \leq \mathbf{b}_i$ در آن صدق می‌کنند. حال، مسئله فاز دو برای بیشینه کردن درجه تابع عضویت تابع هدف فازی

روی مجموعه شدنی $S(\bar{\beta})$ را به صورت (۵۱) بیان می‌کنیم:

$$\begin{aligned} &\max \alpha \\ &s.t. \ \sum_{j=1}^{n} \mathbf{c}_j x_j \geq z_0 - (1-\alpha)p_0 \\ &\qquad \sum_{j=1}^{n} \mathbf{a}_{ij} x_j \leq \mathbf{b}_i + (1-\bar{\beta})p_i, \quad i=1,2,...,m, \\ &\qquad \alpha \in [0,1], \ \ x_j \geq 0, \qquad\qquad j=1,2,...,n. \end{aligned} \tag{۵۱}$$

فرض کنید $(\hat{x}, \hat{\alpha})$ جواب بهینه مسئله (۵۱) باشد. بنابراین $\hat{x}$ با جواب بهینه $(\hat{x}, \bar{\beta})$ نمایش داده می‌شود که جواب بهینه مسئله برنامه‌ریزی خطی فازی انعطاف‌پذیر گروه-۲ نامیده می‌شود. $\hat{\alpha}$، بالاترین درجه‌ای است که در آن سطح اطمینان تصمیم‌گیرنده قرار می‌گیرد و $\bar{\beta}$ بالاترین درجه‌ای است که $\hat{x}$ در قیدهای $\sum_{j=1}^{n} \mathbf{a}_{ij} x_j \leq \mathbf{b}_i$ صدق می‌کند. دقت کنید اگر (x^*, α^*) جواب بهینه مسئله برنامه‌ریزی خطی قطعی (۲۹) باشد که از حل مسئله با روش زیمرمن بدست آمده است و $(\hat{x}, \hat{\alpha})$ جواب بهینه مسئله (۵۱) باشد، آنگاه $\alpha^* \leq \bar{\beta} \leq \max(\hat{\alpha}, \bar{\beta})$. یعنی رویکرد دو فازی که توسط چاندرا و آگاروال پیشنهاد شده است همواره جواب بهینه‌ای بدست می‌آورد که بیشترین سازگاری بین دو هدف «رسیدن به سطح اطمینان» و «تطابق قیود» را داراست.

قضیه ۱۲.۴. *فرض کنید $(\hat{x}, \hat{\alpha})$ جواب بهینه مسئله (۵۱) باشد [۷]؛ آنگاه $(\hat{x}, \hat{\alpha}, \bar{\beta})$ یک جواب بهینه مسئله بهینه سازی دو هدفه (۵۲) است:*

$$\begin{aligned} &\max \ (\alpha, \beta) \\ &s.t. \ \sum_{j=1}^{n} \mathbf{c}_j x_j \geq z_0 - (1-\alpha)p_0 \\ &\qquad \sum_{j=1}^{n} \mathbf{a}_{ij} x_j \leq \mathbf{b}_i + (1-\beta)p_i, \quad i=1,2,...,m, \\ &\qquad \alpha, \beta \in [0,1], \ \ x_j \geq 0, \qquad\qquad j=1,2,...,n. \end{aligned} \tag{۵۲}$$

اثبات. فرض کنید $(\hat{x}, \hat{\alpha}, \bar{\beta})$ جواب کارای مسئله دو هدفه (۵۲) نباشد. در نتیجه مسئله (۵۲) دارای جواب شدنی $(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{\alpha}}, \bar{\bar{\beta}})$ است به طوری که $(\bar{\bar{\alpha}} \geq \hat{\alpha}, \ \bar{\bar{\beta}} > \bar{\beta})$ یا $(\bar{\bar{\alpha}} > \hat{\alpha}, \ \bar{\bar{\beta}} \not> \bar{\beta})$ برقرار هستند. اما با توجه به مسئله (۵۲) واضح است که $\bar{\bar{\beta}} \not> \bar{\beta}$ و بنابراین $\bar{\bar{\beta}} = \bar{\beta}$. در نتیجه تنها یک حالت $(\bar{\bar{\alpha}} > \hat{\alpha}, \ \bar{\bar{\beta}} = \bar{\beta})$ باقی می‌ماند. اما به راحتی قابل مشاهده است که $\hat{\alpha}$ نمی‌تواند مقدار بهینه مسئله (۵۱) باشد. □

مثال ۱۳.۴. مسئله برنامه‌ریزی خطی فازی انعطاف‌پذیر گروه-۲، (۵۳) ، را با $z_0 = ۹٫۳$ ، $p_0 = ۱٫۸$ ، $p_1 = ۵$ ، $p_2 = ۳$ ، $p_3 = ۵$ و $p_4 = ۶$ در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \widetilde{\max}\ & z = x_۱ + x_۲ \\ s.t.\ & g_۱(x) = -۲x_۱ + x_۲ \preceq ۲, \\ & g_۲(x) = -x_۱ + ۱۰x_۲ \succeq ۱۵, \\ & g_۳(x) = x_۱ + ۳x_۲ \preceq ۱۲, \\ & g_۴(x) = ۳x_۱ - x_۲ \succeq ۲۰, \\ & x_۱, x_۲ \geq ۰. \end{aligned} \tag{۵۳}$$

برای حل مسئله برنامه‌ریزی خطی فازی (۵۳) با استفاده از رویکرد زیمرمن باید مسئله برنامه‌ریزی خطی قطعی زیر حل شود:

$$\begin{aligned} \widetilde{\max}\ & \alpha \\ s.t.\ & x_۱ + x_۲ \geq ۹/۳ - ۱/۸(۱-\alpha) \\ & -x_۱ + x_۲ \leq ۲ + ۴(۱-\alpha), \\ & -x_۱ + ۱۰x_۲ \geq ۱۵ - ۳(۱-\alpha), \\ & x_۱ + ۳x_۲ \leq ۱۲ + ۵(۱-\alpha), \\ & ۳x_۱ - x_۲ \geq ۲۰ - ۶(۱-\alpha), \\ & \alpha \in [۰, ۱],\ \ x_۱, x_۲ \geq ۰. \end{aligned} \tag{۵۴}$$

$(x_۱^*, x_۲^*, \alpha^*) = (۶/۸۸, ۲/۱۱, ۰/۷۵۴)$ جواب بهینه مسئله برنامه‌ریزی خطی قطعی (۵۴) می‌باشد. یعنی بالاترین درجه تطابقی که همه قیدها و هدف در آن صدق می‌کنند برابر $\alpha^* = ۰/۷۵۴$ است. حال، مسئله (۵۳) را با استفاده از روش دو فازی که توسط چاندرا و آگاروال پیشنهاد شده است، حل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \max\ & \beta \\ s.t.\ & -x_۱ + x_۲ \leq ۲ + ۴(۱-\beta), \\ & -x_۱ + ۱۰x_۲ \geq ۱۵ - ۳(۱-\beta), \\ & x_۱ + ۳x_۲ \leq ۱۲ + ۵(۱-\beta), \\ & ۳x_۱ - x_۲ \geq ۲۰ - ۶(۱-\beta), \\ & \beta \in [۰, ۱],\ \ x_۱, x_۲ \geq ۰. \end{aligned} \tag{۵۵}$$

$(\bar{x}_۱, \bar{x}_۲, \bar{\beta}) = (۶/۸۸, ۲/۱۱, ۰/۷۵۴)$ جواب بهینه مسئله برنامه‌ریزی خطی قطعی (۵۵)

است. یعنی $\bar{\beta} = ۰/۷۵۴$ بالاترین درجه تطابق قیود می‌باشد. سپس به فاز دوم مسئله می‌رویم:

$$
\begin{aligned}
\max\ & \alpha \\
s.t.\ & x_۱ + x_۲ \geq ۹/۳ - ۱/۸(۱-\alpha) \\
& -x_۱ + x_۲ \leq ۲ + ۴(۱-\bar{\beta}), \\
& -x_۱ + ۱۰x_۲ \geq ۱۵ - ۳(۱-\bar{\beta}), \\
& x_۱ + ۳x_۲ \leq ۱۲ + ۵(۱-\bar{\beta}), \\
& ۳x_۱ - x_۲ \geq ۲۰ - ۶(۱-\bar{\beta}), \\
& \alpha \in [۰,۱],\ \ x_۱, x_۲ \geq ۰.
\end{aligned}
\tag{۵۶}
$$

جواب بهینه مسئله برنامه‌ریزی خطی (۵۶)، برابر $(\hat{x}_۱, \hat{x}_۲, \hat{\alpha}) = (۶/۸۸, ۲/۱۱, ۰/۸۴۴)$ می‌باشد. دقت شود که $\max(\hat{\alpha}, \bar{\beta}) = \max(۰/۸۴۴, ۰/۷۵۴) = ۰/۸۴۴$ از مقدار بدست آمده از روش زیمرمن یعنی $\alpha^* = ۰/۷۵۴$، بزرگتر است. در رویکرد فازی، مسئله بهینه سازی دو هدفه (۵۲)، شامل دو هدف به نام‌های تطابق قیدهای فازی و رسیدن به سطح اطمینان مناسبی برای تابع هدف می‌باشد. از آنجا که هیچ یک از این دو هدف را نمی‌تواند به طور دقیق برآورد نماید، هر رابطه، باید نوعی ارتباط یا مبادله [۱۸] بین این دو هدف را محاسبه کند. روش متقارن زیمرمن، روشی است که فقط بالاترین درجه‌ی مشترک بین این دو هدف را می‌یابد [۲۳]. رویکرد دو فازی فوق، اهمیت بیشتر را به تطابق قیدها می‌دهد، یعنی فاز اول تنها شامل قیدها می‌باشد. همچنین، چاندرا و آگاروال روشی را برای حل مسئله برنامه‌ریزی خطی فازی انعطاف‌پذیر گروه-۲، بر اساس مسئله بهینه سازی دو هدفه ارائه کردند. فرض کنید رسیدن به سطح اطمینان تابع هدف اهمیت بیشتری نسبت به تطابق قیود داشته باشد. در این حالت، مسئله فاز اول تنها تابع

[18] Trade-off

عضویت تابع هدف را بررسی کرده و به صورت (۵۷) بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} &\max \quad \alpha \\ &s.t. \;\; \mu_i(z) \geq \alpha, \qquad\qquad i = ۱, ۲, ..., m, \\ &\qquad \alpha \in [۰, ۱], \;\; x_j \geq ۰, \quad j = ۱, ۲, ..., n. \end{aligned} \tag{۵۷}$$

مسئله (۵۷) معادل با مسئله (۵۸) است:

$$\begin{aligned} &\max \quad \alpha \\ &s.t. \;\; \textstyle\sum_{j=۱}^{n} \mathbf{c}_j x_j \geq z_۰ - (۱ - \alpha)p_۰, \quad i = ۱, ۲, ..., m, \\ &\qquad \alpha \in [۰, ۱], \;\; x_j \geq ۰, \qquad\qquad j = ۱, ۲, ..., n. \end{aligned} \tag{۵۸}$$

فرض کنید $(\bar{x}, \bar{\alpha})$ جواب بهینه مسئله (۵۸) باشد. پس مسئله فاز دو برای بیشینه کردن درجه قیدهای فازی به صورت (۵۹) نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} &\max \quad \beta \\ &s.t. \;\; \textstyle\sum_{j=۱}^{n} \mathbf{c}_j x_j \geq z_۰ - (۱ - \bar{\alpha})p_۰ \\ &\qquad \textstyle\sum_{j=۱}^{n} \mathbf{a}_{ij} x_j \leq \mathbf{b}_i + (۱ - \beta)p_i, \quad i = ۱, ۲, ..., m, \\ &\qquad \beta \in [۰, ۱], \;\; x_j \geq ۰, \qquad\qquad j = ۱, ۲, ..., n. \end{aligned} \tag{۵۹}$$

فرض کنید $(\hat{x}, \hat{\beta})$ جواب بهینه مسئله (۵۹) باشد. آنگاه $(\hat{x}, \bar{\alpha}, \hat{\beta})$ یک جواب کارای مسئله (۲۳) است.

مثال ۱۴.۴. مسئله برنامه‌ریزی خطی فازی انعطاف‌پذیر گروه-۲ که در مثال ۱۱.۴ بیان شد را در نظر بگیرید. این مسئله را توجه به مسائل (۵۸) و (۵۹) حل می‌کنیم. مسئله فاز یک بیشترین درجه سطح اطمینان تابع هدف فازی را به صورت (۶۰) محاسبه می‌کند:

$$\begin{aligned} &\max \quad \alpha \\ &s.t. \;\; x_۱ + x_۲ \geq ۹/۳ - ۱/۸(۱ - \alpha), \qquad i = ۱, ۲, ..., m, \\ &\qquad \alpha \in [۰, ۱], \;\; x_۱, x_۲ \geq ۰, \qquad\qquad j = ۱, ۲, ..., n. \end{aligned} \tag{۶۰}$$

$(\bar{x}_۱, \bar{x}_۲, \bar{\alpha}) = (۰, ۹/۳, ۱)$ جواب بهینه مسئله برنامه‌ریزی خطی قطعی (۶۰) میباشد. در ادامه، مسئله فاز دو که هدف آن یافتن بیشترین درجه تطابق قیود فازی است، به صورت (۶۱) بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} \max \quad & \beta \\ s.t. \quad & x_۱ + x_۲ \geq ۹/۳ - ۱/۸(۱ - \bar{\alpha}) \\ & -x_۱ + x_۲ \leq ۲ + ۴(۱ - \beta), \\ & -x_۱ + ۱۰x_۲ \geq ۱۵ - ۳(۱ - \beta), \\ & x_۱ + ۳x_۲ \leq ۱۲ + ۵(۱ - \beta), \\ & ۳x_۱ - x_۲ \geq ۲۰ - ۶(۱ - \beta), \\ & \beta \in [۰, ۱], \ \ x_۱, x_۲ \geq ۰. \end{aligned} \tag{۶۱}$$

مقدار جواب بهینه $(\hat{x}_۱, \hat{x}_۲, \hat{\alpha}) = (۷/۱۷۵۴۱۰, ۲/۱۲۴۹۰, ۰/۶۹۰۱۶۳۹)$ بدست می‌آید. دقت داشته باشید که $\max(\bar{\alpha}, \hat{\beta}) = \max(۱, ۰/۶۹۰۱۶۳۹) = ۱$ از جواب بدست آمده از رویکرد زیمرمن یعنی $\alpha^* = ۰/۷۵۴$ بیشتر است.

از آنجا که تطابق قیدهای فازی و رسیدن به سطح اطمینان تابع هدف دارای درجات اهمیت مختلفی هستند، چاندرا و آگاروال روش دیگری را نیز برای حل مسئله برنامه‌ریزی خطی فازی انعطاف‌پذیر گروه-۲ پیشنهاد نمودند. آن‌ها مسئله برنامه‌ریزی خطی (۶۲) را بر اساس روش مجموع وزندار، برای حل مسئله بهینه سازی چندهدفه مورد استفاده قرار دادند:

$$\begin{aligned} \max \quad & \lambda\alpha + (۱ - \lambda)\beta \\ s.t. \quad & \textstyle\sum_{j=۱}^{n} \mathbf{c}_j x_j \geq z_۰ - (۱ - \alpha)p_۰ \\ & \textstyle\sum_{j=۱}^{n} \mathbf{a}_{ij} x_j \leq \mathbf{b}_i + (۱ - \beta)p_i, \quad i = ۱, ۲, ..., m, \\ & \alpha, \beta \in [۰, ۱], \ \ x_j \geq ۰, \qquad\qquad j = ۱, ۲, ..., n. \end{aligned} \tag{۶۲}$$

که $\lambda \in [۰, ۱]$. برای $\bar{\lambda}$ ، فرض کنید $(\bar{x}, \bar{\alpha}, \bar{\beta})$ جواب مسئله (۶۲) باشد. بنابراین $\bar{x}$ جواب کارای $\bar{\lambda}$ برای مسئله برنامه‌ریزی خطی فازی انعطاف‌پذیر گروه-۲ نامیده می‌شود. دقت شود که تصمیم‌گیرنده با انتخاب $\lambda \in (\frac{۱}{۲}, ۱]$، اهمیت بیشتر را به دستیابی سطح

اطمینان تابع هدف می‌دهد و به طور مشابه، با انتخاب $\lambda \in [۰, \frac{۱}{۲})$، ارجحیت بیشتر را به تطابق قیود خواهد داد. همچنین با قرار دادن $\lambda = \frac{۱}{۲}$، هر دو هدف دارای وزن‌های یکسانی می‌باشند و اهمیت هر دو هدف برای تصمیم‌گیرنده یکسان خواهد شد.

مثال ۱۵.۴. مسئله (۵۳) که در مثال ۱۱.۴ بیان شد، را در نظر بگیرید. این مسئله را بر اساس رویکرد مجموع وزندار، یعنی مدل (۶۳) حل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \max \quad & \lambda\alpha + (۱-\lambda)\beta \\ s.t. \quad & x_۱ + x_۲ \geq ۹/۳ - ۱/۸(۱-\alpha) \\ & -x_۱ + x_۲ \leq ۲ + ۴(۱-\beta), \\ & -x_۱ + ۱۰x_۲ \geq ۱۵ - ۳(۱-\beta), \\ & x_۱ + ۳x_۲ \leq ۱۲ + ۵(۱-\beta), \\ & ۳x_۱ - x_۲ \geq ۲۰ - ۶(۱-\beta), \\ & \beta \in [۰, ۱], \quad x_۱, x_۲ \geq ۰. \end{aligned} \tag{۶۳}$$

به ازای مقادیر مختلف λ ، جواب‌های کارای فازی حاصل از حل مدل (۶۳) ، در جدول ۳ ارائه شده‌اند.

جدول ۳: *جواب‌های کارای فازی*

λ	$\bar{x}_۱$	$\bar{x}_۲$	$\bar{\alpha}$	$\bar{\beta}$
۰/۰	۶/۸۸۱۴۲۶	۲/۱۱۴۶۲۵	۰/۰	۰/۷۵۴۹۴۰۷
۰/۱	۶/۸۸۱۴۲۶	۲/۱۱۴۶۲۵	۰/۸۳۱۱۳۷۵	۰/۷۵۴۹۴۰۷
۰/۲	۶/۸۸۱۴۲۶	۲/۱۱۴۶۲۵	۱/۰	۰/۷۵۴۹۴۰۷
۰/۳	۷/۱۷۵۴۱۰	۲/۱۱۴۶۲۵	۱/۰	۰/۶۹۰۱۶۳۹
۰/۴	۷/۱۷۵۴۱۰	۲/۱۱۴۶۲۵	۱/۰	۰/۶۹۰۱۶۳۹
۰/۵	۷/۱۷۵۴۱۰	۲/۱۱۴۶۲۵	۱/۰	۰/۶۹۰۱۶۳۹
۰/۶	۷/۱۷۵۴۱۰	۲/۱۱۴۶۲۵	۱/۰	۰/۶۹۰۱۶۳۹
۰/۷	۷/۱۷۵۴۱۰	۲/۱۱۴۶۲۵	۱/۰	۰/۶۹۰۱۶۳۹
۰/۸	۷/۱۷۵۴۱۰	۲/۱۱۴۶۲۵	۱/۰	۰/۶۹۰۱۶۳۹
۰/۹	۷/۱۷۵۴۱۰	۲/۱۱۴۶۲۵	۱/۰	۰/۶۹۰۱۶۳۹
۱/۰	۷/۳۶۳	۱/۹۳۶	۱/۰	۰/۰

۳.۴ مسئله برنامه‌ریزی خطی انعطاف‌پذیرگروه-۳

در این زیربخش، گروه سوم از مدل‌های برنامه‌ریزی خطی فازی انعطاف‌پذیر مورد بررسی قرار می‌گیرند که دارای بردار هزینه انعطاف‌پذیر می‌باشند. برای حل این مدل‌ها از روش‌های مختلفی از جمله روش اول وردگی و روش دوم وردگی استفاده می‌شود که در ادامه به معرفی این مدل‌ها و روش‌های حل آن‌ها می‌پردازیم. فرم کلی مسئله برنامه‌ریزی خطی فازی با بردار هزینه انعطاف‌پذیر به صورت (۶۴) نمایش داده می‌شود:

$$\begin{aligned} &\max \tilde{z} = \textstyle\sum_{j=1}^{n} \tilde{\mathbf{c}}_j x_j \\ &s.t. \quad \textstyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i = 1, 2, ..., m, \\ &\qquad x_j \ge 0, \qquad\qquad j = 1, 2, ..., n. \end{aligned} \tag{۶۴}$$

در مدل (۶۴) ، فرض کنید توابع عضویت $\tilde{\mathbf{c}}_j, (j = 1, 2, ..., n)$ پیوسته و اکیدا یکنوا هستند و به ازای $(j = 1, 2, ..., n)$ با ضابطه $\mu_j(c_j) :\to [0, 1]$ نمایش داده می‌شوند. در ادامه، دو روش حل مسئله برنامه‌ریزی خطی فازی گروه-۳ را ارائه و مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۱.۳.۴ روش اول وردگی

وردگی مسئله برنامه‌ریزی خطی با بردار هزینه پارامتری را برای حل مسئله برنامه‌ریزی خطی فازی گروه-۳ پیشنهاد کرد [۲۰]. در زیر، به بیان جزئیات این روش می‌پردازیم. تابع عضویت هدف فازی $\tilde{z}$ به صورت $\mu(\tilde{z}) = \inf\{\mu_1(c_1), \mu_2(c_2), ...\mu_n(c_n)\}$ بیان می‌شود. جواب فازی مسئله (۶۴) را می‌توانیم بعد از حل مسئله (۶۵) بدست آوریم:

$$\begin{aligned} &\max \tilde{z} = \textstyle\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ &s.t. \quad \mu(\tilde{z}) \ge 1 - \alpha \\ &\qquad \textstyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i = 1, 2, ..., m, \\ &\qquad x_j \ge 0, \quad j = 1, 2, ..., n. \end{aligned} \tag{۶۵}$$

دقت شود که حل مسئله (۶۵) بسیار سخت است. بنابراین، وردگی نشان داد که جواب بهینه این مسئله را می‌توان با حل یک مسئله معادل، با توجه به قضیه ۱۶.۴ بدست آورد.

قضیه ۱۶.۴. *مسئله برنامه‌ریزی خطی فازی گروه-۳ را در نظر بگیرید [۲۰]. اگر به ازای*

$j = 1, 2, \dots, n$، توابع عضویت $\tilde{c}_j$، پیوسته و اکیدا یکنوا باشند، پس جواب فازی مسئله (۶۴) با حل مسئله برنامه‌ریزی خطی پارامتری (۶۶) بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} &\max \tilde{z} = \textstyle\sum_{j=1}^{n} \eta_j(\beta) x_j \\ &s.t.\ \ g_i(x) = \textstyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i,\ \ i = 1, 2, \dots, m, \\ &\qquad \beta \in [0, 1],\ x_j \geq 0,\ \ j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \tag{66}$$

که $\eta_j(\beta) :\to [0, 1],\ (j = 1, 2, \dots, n)$.

اثبات. جواب بهینه فازی مسئله (۶۴) را می‌توان با حل مسئله (۶۵) بدست آورد. از آنجا که $\mu(\tilde{z}) = \inf_{1 \leq j \leq n} \{\mu_j(c_j)\} \geq 1 - \alpha$ ، پس به ازای $j = 1, 2, \dots, n$ ، $\mu(\tilde{z}) \geq 1 - \alpha$. چون $\mu_j(c_j)$ پیوسته و اکیداً یکنواست، پس به ازای $j = 1, 2, \dots, n$، μ_j^{-1} وجود دارد به طوری که $c_j \geq \mu_j^{-1}(1 - \alpha)$. بنابراین مسئله (۶۵) را به صورت (۶۷) می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} &\max z = \textstyle\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ &s.t.\ \ c_j \geq \mu_j^{-1}(1 - \alpha),\ \ j = 1, 2, \dots, n, \\ &\qquad g_i(x) = \textstyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i,\quad i = 1, 2, \dots, m, \\ &\qquad \alpha \in [0, 1],\ x_j \geq 0,\ \ j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \tag{67}$$

مسئله (۶۷) معادل مسئله (۶۸) است:

$$\begin{aligned} &\max z = \textstyle\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ &s.t.\ \ c_j = \mu_j^{-1}(1 - \alpha),\ \ j = 1, 2, \dots, n, \\ &\qquad g_i(x) = \textstyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i,\ \ i = 1, 2, \dots, m, \\ &\qquad \alpha \in [0, 1],\ x_j \geq 0,\ \ j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \tag{68}$$

یعنی هر جواب بهینه مسئله (۶۸) برای مسئله (۶۷) نیز بهینه است. بنابراین باید مسئله (۶۹) حل شود:

$$\begin{aligned} &\max z = \textstyle\sum_{j=1}^{n} \mu_j^{-1}(1 - \alpha) x_j \\ &s.t.\ \ g_i(x) = \textstyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i,\ \ i = 1, 2, \dots, m, \\ &\qquad \alpha \in [0, 1],\ x_j \geq 0,\ \ j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \tag{69}$$

با در نظر گرفتن $\beta = ۱ - \alpha$ و به ازای $j = ۱, ۲, ..., n$ ، $\eta_j(\beta) = \mu_j^{-۱}(۱ - \alpha)$ ، مسئله (۶۹) با مسئله (۶۶) یکی می‌شود. □

مثال ۱۷.۴. مسئله برنامه‌ریزی خطی فازی گروه-۳، را در نظر بگیرید [۲۰]:

$$\begin{aligned} &\max\ z = \tilde{\mathbf{c}}_۱ x_۱ + ۷۵ x_۲ \\ &s.t. \quad g_۱(x) = ۳x_۱ - x_۲ \leq ۲, \\ &\qquad g_۲(x) = x_۱ + ۲x_۲ \leq ۳, \\ &\qquad x_۱, x_۲ \geq ۰. \end{aligned}$$

که تابع عضویت $\mu_۱$ برای $\tilde{\mathbf{c}}_۱$ به صورت (۷۰) بیان می‌شود:

$$\mu_۱(c_۱) = \begin{cases} ۱, & c_۱ > ۱۱۵, \\ \frac{(c_۱ - ۴۰)^۲}{۵۶۲۵}, & ۴۰ \leq c_۱ \leq ۱۱۵, \\ ۰, & c_۱ < ۴۰. \end{cases} \tag{۷۰}$$

بنابراین، $\mu_۱^{-۱}(t) = ۴۰ + ۷۵\sqrt{t}$ بدست می‌آید. حال بر طبق مسئله (۶۹) باید مسئله (۷۱) حل شود:

$$\begin{aligned} &\max\ z = (۴۰ + ۷۵\sqrt{t})x_۱ + ۷۵x_۲ \\ &s.t. \quad g_۱(x) = ۳x_۱ - x_۲ \leq ۲, \\ &\qquad g_۲(x) = x_۱ + ۲x_۲ \leq ۳, \\ &\qquad x_۱, x_۲ \geq ۰. \end{aligned} \tag{۷۱}$$

با استفاده از تکنیک پارامتری، جواب بهینه مسئله (۷۱) به ازای هر $\alpha \in [۰, ۱]$ برابر $x^* = (x_۱^*, x_۲^*) = (۱, ۱)$ است. مجموعه فازی مقادیر تابع هدف از رابطه (۷۲) بدست می‌آیند:

$$\mu(\tilde{z}) = ۷۵ + \frac{(c_۱ - ۴۰)^۲}{۵۶۲۵}, \quad ۴۰ \leq c_۱ \leq ۱۱۵. \tag{۷۲}$$

۲.۳.۴ روش دوم وردگی

وردگی ثابت کرد که دوگان مسئله برنامه‌ریزی خطی فازی با بردار هزینه فازی در تابع هدف (یک مسئله برنامه‌ریزی خطی فازی گروه-۳)، برابر با یک مسئله برنامه‌ریزی خطی فازی با قیدهای نامساوی فازی (مسئله برنامه‌ریزی خطی فازی گروه-۱) می‌باشد و بر عکس [۲۱]. در واقع، وی نشان داد که یکی از دو مسئله برنامه‌ریزی خطی فازی گروه-۳ یا گروه-۱، همواره دوگان دیگری است و دارای جواب فازی یکسانی هستند. بنابراین وی پیشنهاد کرد که جواب بهینه مسئله (۶۴) را می‌توان با حل مسئله دوگان آن بدست آورد. در ادامه، جزئیات روش دوگان برای حل مسئله برنامه‌ریزی خطی فازی گروه-۳ را بررسی می‌کنیم.

قضیه ۱۸.۴. *فرض کنید یک مسئله برنامه‌ریزی خطی فازی گروه-۳ یا گروه-۱ را در اختیار دارید، آن یکی همیشه دوگان دیگری است و جواب فازی یکسانی دارند.*

اثبات. مسئله برنامه‌ریزی خطی فازی گروه-۱را در نظر بگیرید. توابع عضویت قیدهای نامساوی به صورت (۷۳) می‌باشند:

$$\mu_i(g_i(x)) = \begin{cases} ۱, & g_i(x) < b_i \\ ۱ - \frac{g_i(x)-b_i}{p_i}, & b_i \leq g_i(x) \leq b_i + p_i \\ ۰. & g_i(x) > b_i + p_i. \end{cases} \qquad (۷۳)$$

با حل مسئله برنامه‌ریزی خطی پارامتری (۷۴) ، جواب بهینه مسئله برنامه‌ریزی خطی فازی گروه-۱ بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} & \max z = \textstyle\sum_{j=۱}^{n} c_j x_j \\ & s.t. \quad g_i(x) = \textstyle\sum_{j=۱}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i + (۱-\alpha) p_i, \quad i = ۱, ۲, ..., m, \\ & \qquad \alpha \in [۰, ۱], \quad x_j \geq ۰, \quad j = ۱, ۲, ..., n. \end{aligned} \qquad (۷۴)$$

از آنجا که مسئله (۷۴) یک مسئله برنامه‌ریزی خطی پارامتری کلاسیک است پس دوگان آن عبارت است از:

$$\begin{aligned} & \min \textstyle\sum_{i=۱}^{m} [b_i + (۱-\alpha) p_i] y_i \\ & s.t. \quad g_i(x) = \textstyle\sum_{j=۱}^{n} y_i a_{ij} \geq c_j, \quad j = ۱, ۲, ..., n, \\ & \qquad \alpha \in [۰, ۱], \; y_i \geq ۰, \quad i = ۱, ۲, ..., m. \end{aligned} \qquad (۷۵)$$

فرض کنید $\beta = ۱ - \alpha$ و به ازای $i = ۱, ۲, ..., n$، $d_i = b_i + (۱ - \alpha)p_i$. در این حالت مسئله (۷۵) با مسئله (۷۶) معادل است:

$$\begin{aligned} &\min \textstyle\sum_{i=۱}^{m} d_i y_i \\ &s.t.\ \ d_i = [b_i + \beta p_i],\ \ i = ۱, ۲, ..., m, \\ &\qquad g_i(x) = \textstyle\sum_{j=۱}^{n} y_i a_{ij} \geq c_j,\ \ j = ۱, ۲, ..., n, \\ &\qquad \beta \in [۰, ۱],\ y_i \geq ۰,\ \ i = ۱, ۲, ..., m. \end{aligned} \tag{۷۶}$$

به طور معادل، مسئله (۷۶) را به صورتی که هر جواب بهینه آن، یک جواب بهینه مسئله (۷۷) نیز باشد، را بازنویسی می‌کنیم:

$$\begin{aligned} &\min \textstyle\sum_{i=۱}^{m} d_i y_i \\ &s.t.\ \ d_i \leq [b_i + \beta p_i],\ \ i = ۱, ۲, ..., m, \\ &\qquad g_i(x) = \textstyle\sum_{j=۱}^{n} y_i a_{ij} \geq c_j,\ \ j = ۱, ۲, ..., n, \\ &\qquad \beta \in [۰, ۱],\ y_i \geq ۰,\ \ i = ۱, ۲, ..., m. \end{aligned} \tag{۷۷}$$

دقت کنید به ازای $i = ۱, ۲, ..., m$ ، $d_i \leq b_i + \beta p_i$ اگر و تنها اگر $b_i + p_i - d_i \geq (۱ - \beta)p_i$ یعنی $۱ - \frac{d_i - b_i}{p_i} \geq (۱ - \beta)$. بنابراین مسئله (۷۷) با توجه به رابطه (۷۳)، به صورت (۷۸) بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} &\min \textstyle\sum_{i=۱}^{m} d_i y_i \\ &s.t.\ \ \mu_i(d_i) \geq ۱ - \beta,\ \ i = ۱, ۲, ..., m, \\ &\qquad g_i(x) = \textstyle\sum_{j=۱}^{n} y_i a_{ij} \geq c_j,\ \ j = ۱, ۲, ..., n, \\ &\qquad \beta \in [۰, ۱],\ y_i \geq ۰,\ \ i = ۱, ۲, ..., m. \end{aligned} \tag{۷۸}$$

واضح است که مسئله (۷۸) یک مسئله برنامه‌ریزی خطی پارامتری کلاسیک برای مسئله برنامه‌ریزی خطی فازی گروه-۳، یعنی مسئله (۷۹) می‌باشد:

$$\begin{aligned} &\min \textstyle\sum_{i=۱}^{m} \tilde{d}_i y_i \\ &s.t.\ \ g_i(x) = \textstyle\sum_{j=۱}^{n} y_i a_{ij} \geq c_j,\ \ j = ۱, ۲, ..., n, \\ &\qquad \beta \in [۰, ۱],\ y_i \geq ۰,\ \ i = ۱, ۲, ..., m. \end{aligned} \tag{۷۹}$$

از آنجا که در بهینگی، مسائل (۷۴) و (۷۵) جواب پارامتری یکسانی دارند، مسئله برنامه‌ریزی خطی فازی گروه–۳، یعنی (۷۹) با فرض $\beta = ۱ - \alpha$ ، جواب فازی یکسانی با مسئله برنامه‌ریزی خطی فازی گروه–۱ دارد. اگر در ابتدا، فرآیند حل از یک مسئله برنامه‌ریزی خطی فازی گروه–۳ شروع شود، به یک مسئله برنامه‌ریزی خطی فازی گروه–۱ با جواب فازی یکسانی دست می‌یابد. □

مثال ۱۹.۴. مسئله برنامه‌ریزی خطی فازی گروه–۳، (۸۰) ، را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}
\min \quad & z = \tilde{\mathbf{c}}_۱ x_۱ + ۱۲۰ x_۲ + \tilde{\mathbf{c}}_۳ x_۳ \\
s.t. \quad & x_۱ + ۷x_۲ + ۳x_۳ \geq ۴, \\
& x_۱ + ۵x_۲ + ۵x_۳ \geq ۵, \\
& x_۱ + ۳x_۲ + ۱۰x_۳ \geq ۹, \\
& x_۱ + ۲x_۲ + ۱۵x_۳ \geq ۱۱, \\
& x_۱, x_۲, x_۳ \geq ۰.
\end{aligned} \tag{۸۰}$$

که توابع عضویت بردار هزینه فازی به صورت (۸۱) و (۸۲) تعریف شده باشند:

$$\mu_۱(c_۱) = \begin{cases} ۱, & c_۱ < ۱۵, \\ \frac{۱۸ - c_۱}{۳}, & ۱۵ \leq c_۱ \leq ۱۸, \\ ۰, & c_۱ > ۱۸. \end{cases} \tag{۸۱}$$

و

$$\mu_۳(c_۳) = \begin{cases} ۱, & c_۳ < ۱۰۰, \\ \frac{۱۲۰ - c_۳}{۲۰}, & ۱۰۰ \leq c_۳ \leq ۱۲۰, \\ ۰, & c_۳ > ۱۲۰. \end{cases} \tag{۸۲}$$

جواب بهینه مسئله (۸۰)، با حل مسئله برنامه‌ریزی خطی پارامتری زیر و با توجه به مسئله (۶۹) به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \min \quad & (18 - 3\alpha)x_1 + 120x_2 + (120 - 20\alpha)x_3 \\ s.t. \quad & x_1 + 7x_2 + 3x_3 \geq 4, \\ & x_1 + 5x_2 + 5x_3 \geq 5, \\ & x_1 + 3x_2 + 10x_3 \geq 9, \\ & x_1 + 2x_2 + 15x_3 \geq 11, \\ & \alpha \in [0, 1], \ x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned} \tag{83}$$

با استفاده از تکنیک پارامتری، جواب بهینه به صورت زیر بدست می‌آید:

$$(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = (\frac{13}{7}, 0, \frac{5}{7}). \tag{84}$$

با جایگذاری جواب بهینه (۸۴) در تابع هدف (۸۳) ، مقدار $z^* = \frac{834}{7} - \frac{139}{7}\alpha$ حاصل می‌شود. از طرفی، اگر مسئله (۸۰) با استفاده از دوگانش حل شود:

$$\begin{aligned} \min \quad & z = 4x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 11x_4 \\ s.t. \quad & g_1(x) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 15, \\ & g_2(x) = 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 \geq 120, \\ & g_3(x) = 3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 \geq 100, \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{aligned} \tag{85}$$

توابع عضویت قیدهای نامساوی فازی در روابط (۸۱) و (۸۲) ارائه شده است. واضح است که مسئله (۸۵) به مسئله برنامه‌ریزی خطی فازی گروه–۱ تعلق دارد. لذا چنین نتیجه گرفته می‌شود که هر دو مسئله (۸۰) و دوگانش (مسئله (۸۵))، مقادیر هدف بهینه فازی یکسانی دارند.

۴.۴ مسائل برنامه‌ریزی خطی انعطاف‌پذیرگروه-۴

در این زیربخش، گروه چهارم از مدل‌های برنامه‌ریزی خطی فازی انعطاف‌پذیر بررسی می‌شوند که شامل مدل برنامه‌ریزی خطی با بردار هزینه انعطاف‌پذیر، ماتریس قیود

انعطاف‌پذیر و بردار منابع انعطاف‌پذیر می‌باشند. برای حل این مدل، از روش‌های کارلسن و کورهونن، گاسیمو و ینیلماز و فرهادی‌نیا استفاده می‌شود که در ادامه به معرفی مدل و روش‌های حل آن‌ها می‌پردازیم. فرم کلی مسئله برنامه‌ریزی خطی فازی گروه-۴ با بردار هزینه انعطاف‌پذیر، ماتریس قیود انعطاف‌پذیر و بردار منابع انعطاف‌پذیر به صورت (۸۶) بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} &\max \tilde{z} = \textstyle\sum_{j=1}^{n} \tilde{\mathbf{c}}_j x_j \\ &s.t. \quad g_i(x) = \textstyle\sum_{j=1}^{n} \tilde{\mathbf{a}}_{ij} x_j \leq \tilde{\mathbf{b}}_i, \quad i = 1, 2, ..., m, \\ &\qquad x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, ..., n. \end{aligned} \tag{۸۶}$$

فرض کنید توابع عضویت ضرایب فازی در مدل (۸۶)، خطی هستند و با کمک روابط (۸۷)، (۸۸) و (۸۹) نشان داده می‌شوند:

$$\mu_{\tilde{\mathbf{c}}_j}(x) = \begin{cases} 1, & x > c_j, \\ \frac{x-(c_j-p_j)}{p_j}, & c_j - p_j \leq x \leq c_j, \\ 0, & x < (c_j - p_j). \end{cases} \tag{۸۷}$$

و

$$\mu_{\tilde{\mathbf{a}}_{ij}}(x) = \begin{cases} 1, & x < a_{ij}, \\ \frac{(a_{ij}-p_{ij})-x}{p_{ij}}, & a_{ij} \leq x \leq a_{ij} + p_{ij}, \\ 0, & x > a_{ij} + p_{ij}. \end{cases} \tag{۸۸}$$

و

$$\mu_{\tilde{\mathbf{b}}_i}(x) = \begin{cases} 1, & x < b_i, \\ 1 - \frac{x-b_i}{p_i}, & b_i \leq x \leq b_i + p_i, \\ 0, & x > b_i + p_i. \end{cases} \tag{۸۹}$$

دقت شود، با توجه به هدف مسئله که بیشینه‌سازی است باید بردار هزینه بزرگتر و از حداقل منابع و ضرایب تکنیکی استفاده شود. در این زیر بخش، دو روش برای حل

مسائل برنامه‌ریزی خطی فازی گروه–۴ که شامل ماتریس قیود فازی هستند، را شرح می‌دهیم.

۱.۴.۴ روش کارلسن و کورهونن

کارلسن و کورهونن روشی موثر برای حل مسئله (۸۶) ارائه نمودند [۵]. همچنین نشان دادند که روش چاناس هیچ تعامل پیوسته‌ای را بین درجات نقض قیدی در نظر نمی‌گیرد، در نتیجه، آن‌ها یک روش کاملاً تعاملی را پیشنهاد کردند. همچنین به این نکته اشاره کردند که اگر تعامل کاملی بین ماتریس قیود، بردار منابع و بردار هزینه در نظر گرفته شود، جواب بهینه همواره در $\mu = \mu_{\tilde{\mathbf{a}}_{ij}} = \mu_{\tilde{\mathbf{c}}_j} = \mu_{\tilde{\mathbf{b}}_i}$ وجود خواهد داشت، که توابع عضویت، توابعی خطی اکیداً غیر افزایشی (یا غیر کاهشی) هستند. بنابراین، مسئله کمکی (۹۰) را پیشنهاد نمودند:

$$\begin{aligned}
\max\ & \textstyle\sum_{j=1}^{n} \mu_{\tilde{\mathbf{c}}_j}^{-1}(\mu)x_j \\
s.t.\ & \textstyle\sum_{j=1}^{n} \mu_{\tilde{\mathbf{a}}_{ij}}^{-1}(\mu)x_j \leq \mu_{\tilde{b}_i}^{-1}(\mu), \quad i = 1, 2, ..., m, \\
& \mu \in [0, 1],\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, ..., n.
\end{aligned} \tag{90}$$

مسئله (۹۰) را می‌توان با جایگزینی توابع عضویت (۸۷) ، (۸۸) و (۸۹) به صورت (۹۱) باز نویسی کرد:

$$\begin{aligned}
\max\ & \textstyle\sum_{j=1}^{n} [c_j - (1-\mu)p_i]x_j \\
s.t.\ & \textstyle\sum_{j=1}^{n} [a_{ij} + (1-\mu)p_{ij}]x_j \leq b_i + (1-\mu)p_i, \quad i = 1, 2, ..., m, \\
& \mu \in [0, 1],\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, ..., n.
\end{aligned} \tag{91}$$

دقت شود که مسئله (۹۱) یک مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی است، زیرا تابع هدف و قیدها، شامل عبارت ضربی μx_j می‌باشند. اگر μ ثابت باشد، آنگاه این مسئله، به یک مسئله برنامه‌ریزی خطی تبدیل خواهد شد. بنابراین برای هر μ، یک جواب بهینه برای مسئله (۹۱) بدست می‌آید و می‌توان نتایج بدست آمده را برای تصمیمات بیشتر در اختیار تصمیم‌گیرنده قرار داد.

مثال ۲۰.۴. مسئله برنامه‌ریزی خطی فازی گروه-۴، (۹۲) را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} &\max\ z = \tilde{\mathbf{c}}_1 x_1 + \tilde{\mathbf{c}}_2 x_2 \\ &s.t.\ \ \tilde{\mathbf{a}}_{11} x_1 + \tilde{\mathbf{a}}_{12} x_2 \leq \tilde{\mathbf{b}}_1, \\ &\qquad \tilde{\mathbf{a}}_{21} x_1 + \tilde{\mathbf{a}}_{22} x_2 \leq \tilde{\mathbf{b}}_2, \\ &\qquad x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned} \tag{۹۲}$$

که توابع عضویت ضرایب فازی به صورت (۹۳)، (۹۴) و (۹۵) تعریف می‌شوند:

$$\mu_{\tilde{\mathbf{c}}_1}(x) = \begin{cases} 1, & x > 3, \\ x-2, & 2 \leq x \leq 3, \\ 0, & x < 2. \end{cases} \qquad \mu_{\tilde{\mathbf{c}}_2}(x) = \begin{cases} 1, & x > 5, \\ x-4, & 4 \leq x \leq 5, \\ 0, & x < 4. \end{cases} \tag{۹۳}$$

و

$$\begin{aligned} &\mu_{\tilde{\mathbf{a}}_{11}}(x) = \begin{cases} 1, & x < 1, \\ 2-x, & 1 \leq x \leq 2, \\ 0, & x > 2. \end{cases} \qquad \mu_{\tilde{\mathbf{a}}_{12}}(x) = \begin{cases} 1, & x < 2, \\ 3-x, & 2 \leq x \leq 3, \\ 0, & x > 3. \end{cases} \\ &\mu_{\tilde{\mathbf{a}}_{21}}(x) = \begin{cases} 1, & x < 3, \\ 4-x, & 3 \leq x \leq 4, \\ 0, & x > 4. \end{cases} \qquad \mu_{\tilde{\mathbf{a}}_{22}}(x) = \begin{cases} 1, & x < 4, \\ 5-x, & 4 \leq x \leq 5, \\ 0, & x > 5. \end{cases} \end{aligned} \tag{۹۴}$$

و

$$\mu_{\tilde{\mathbf{b}}_1}(x) = \begin{cases} 1, & x < 8, \\ 9-x, & 8 \leq x \leq 9, \\ 0, & x > 9. \end{cases} \qquad \mu_{\tilde{\mathbf{b}}_2}(x) = \begin{cases} 1, & x < 10, \\ 11-x, & 10 \leq x \leq 11, \\ 0, & x > 11. \end{cases} \tag{۹۵}$$

جواب بهینه مسئله (۹۲) را می‌توان با حل مسئله (۹۶) و با توجه به مسئله (۹۱) بدست آورد:

$$\begin{aligned} &\max\ z = [3-(1-\mu)]x_1 + [5-(1-\mu)]x_2 \\ &s.t.\ \ [1+(1-\mu)]x_1 + [2+(1-\mu)]x_2 \leq [8+(1-\mu)], \\ &\qquad [3+(1-\mu)]x_1 + [4+(1-\mu)]x_2 \leq [10+(1-\mu)], \\ &\qquad \mu \in [0,1], x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned} \tag{۹۶}$$

جواب بهینه و مقدار تابع هدف متناظر با آن به ازای مقادیر مختلف $\mu \in [۰, ۱]$ ، در جدول ۴ نمایش داده شده است. روش کارلسون و کورهونن را می‌توان برای حل مسائل

جدول ۴: *جواب‌های مسئله* (۹۶)

μ	z^*	$x_۱^*$	$x_۲^*$
۰/۰	۰/۰۰	۲/۲۰	۸/۸۰
۰/۱	۰/۰۰	۲/۲۲۴۴۹۰	۹/۱۲۰۴۰۸
۰/۲	۰/۰۰	۲/۲۵	۹/۴۵
۰/۳	۰/۰۰	۲/۲۷۶۵۹۶	۹/۷۸۹۳۶۲
۰/۴	۰/۰۰	۲/۳۰۴۳۴۸	۱۰۱۳۹۱۳
۰/۵	۰/۰۰	۲/۳۳۳۳۳	۱۰/۵
۰/۶	۰/۰۰	۲/۳۶۳۶۳۶	۱۰/۸۷۲۷۳
۰/۷	۰/۰۰	۲/۳۹۵۳۴۹	۱۱/۲۵۸۱۴
۰/۸	۰/۰۰	۲/۴۲۸۵۷۱	۱۱/۶۵۷۱۴
۰/۹	۰/۰۰	۲/۴۶۳۴۱۵	۱۲/۰۷۰۰۷۳
۱/۰	۰/۰۰	۲/۵۰	۱۲/۵

شامل ماتریس قیود فازی، بردار هزینه فازی و بردار منابع فازی؛ ماتریس قیود فازی و بردار منابع فازی؛ و بردار هزینه فازی و ماتریس قیود فازی به کار برد.

۲.۴.۴ روش گاسیمو و ینیلماز

گاسیمو و ینیلماز دو گروه از مسائل برنامه‌ریزی خطی فازی گروه-۴ را در نظر گرفتند: گروه اول، مسائل برنامه‌ریزی خطی که فقط ماتریس قیود، فازی است و گروه دوم شامل، مسائل برنامه‌ریزی خطی که هم بردار منابع و هم ماتریس قیود در آن‌ها فازی هستند [۱۰]. آن‌ها از روش متقارن بلمن و زاده برای فازی‌زدایی این نوع از مسائل استفاده کردند. ابتدا مسئله برنامه‌ریزی خطی فازی با ماتریس قیود فازی به عنوان گروه خاصی از مسائل برنامه‌ریزی خطی فازی گروه-۴ را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} &\max\ \ z=\textstyle\sum_{j=۱}^{n} c_j x_j \\ &s.t.\ \ g_i(x)=\textstyle\sum_{j=۱}^{n}\tilde{\mathbf{a}}_{ij}x_j \le b_i,\ \ i=۱,۲,...,m, \\ &\qquad x_j\ge ۰,\ \ j=۱,۲,...,n. \end{aligned} \tag{۹۷}$$

تابع عضویت خطی ماتریس قیود فازی در مسئله (۹۷) در رابطه (۸۸) ارائه شده است. گاسیمو و ینیلماز، برای فازی زدایی از مسئله (۹۷) ، ابتدا تابع هدف را با محاسبه کران‌های بالا و پایین مقادیر بهینه، فازی کردند. کران‌های مقادیر بهینه با حل مسائل برنامه‌ریزی خطی استاندارد (۹۸) و (۹۹) محاسبه می‌شوند(با این فرض که این مقادیر بهینه، متناهی هستند):

$$\begin{aligned} & z_1 = \max z = \textstyle\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ & s.t. \ \ \textstyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \ \ i = 1, 2, ..., m, \\ & \qquad x_j \geq 0, \ \ j = 1, 2, ..., n. \end{aligned} \tag{98}$$

و

$$\begin{aligned} & z_2 = \max z = \textstyle\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ & s.t. \ \ \textstyle\sum_{j=1}^{n} (a_{ij} + p_{ij}) x_j \leq b_i, \ \ i = 1, 2, ..., m, \\ & \qquad x_j \geq 0, \ \ j = 1, 2, ..., n. \end{aligned} \tag{99}$$

فرض کنید $z^l = \min\{z_1, z_2\}$ و $z^u = \max\{z_1, z_2\}$. آنگاه z^l و z^u به ترتیب، کران‌های پایین و بالای مقادیر بهینه نامیده می‌شوند. در این حالت، تابع عضویت مقدار بهینه $\tilde{G}$، از رابطه (۱۰۰) بدست می‌آید:

$$\mu_{\tilde{G}}(x) = \begin{cases} 1, & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j > z^u, \\ \frac{\sum_{j=1}^{n} c_j x_j - z^l}{z^u - z^l}, & z^l \leq \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq z^u, \\ 0, & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j < z^l. \end{cases} \tag{100}$$

به طور مشابه، مجموعه فازی iمین قید $\tilde{C}_i$ ، به صورت (۱۰۱) تعریف می‌شود:

$$\mu_{\tilde{C}_i}(x) = \begin{cases} 1, & b_i > \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} + p_{ij}) x_j, \\ \frac{b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j}{\sum_{j=1}^{n} p_{ij} x_j}, & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \leq \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} + p_{ij}) x_j, \\ 0, & b_i < \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j. \end{cases} \tag{101}$$

با استفاده از تعریف تصمیم فازی توسط بلمن و زاده، تصمیم بهینه فازی یک جواب مسئله $\mu_{\tilde{D}}(x^*) = \max_{x\geq ۰} \mu_{\tilde{D}}(x) = \max_{x\geq ۰} \min\{\mu_{\tilde{G}_j}(x), \min_{۱\leq i\leq m}\{\mu_{\tilde{C}_i}(x)\}\}$ می‌باشد. در نتیجه مسئله (۹۷) به مسئله بهینه‌سازی (۱۰۲) تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} &\max\ \alpha \\ &s.t.\ \ \mu_{\tilde{G}}(x) \geq \alpha, \\ &\qquad \mu_{\tilde{C}_i}(x) \geq \alpha,\ \ i = ۱, ۲, ..., m, \\ &\qquad \alpha \in [۰, ۱],\ \ x \geq ۰. \end{aligned} \tag{۱۰۲}$$

با استفاده از (۱۰۰) و (۱۰۱) ، مسئله (۱۰۲) را می‌توان به صورت (۱۰۳) نوشت:

$$\begin{aligned} &\max\ \alpha \\ &s.t.\ \ \alpha(z^u - z^l) - \textstyle\sum_{j=۱}^{n} c_j x_j + z^l \leq ۰, \\ &\qquad \textstyle\sum_{j=۱}^{n} (a_{ij} + p_{ij}\alpha)x_j - b_i \leq ۰,\ \ i = ۱, ۲, ..., m, \\ &\qquad \alpha \in [۰, ۱],\ \ x_j \geq ۰,\ \ j = ۱, ۲, ..., n. \end{aligned} \tag{۱۰۳}$$

دقت شود که مسئله (۱۰۳) غیرخطی است، زیرا قیدهای این مسئله شامل عبارت ضربی αx_j می‌باشند. بنابراین، برای حل این مسئله به یک روش ویژه برای حل مسائل بهینه‌سازی غیرخطی نیاز داریم. گاسیمو و ینیلماز روش زیرگرادیان و الگوریتم روش مجموعه قاطع فازی [19] را برای حل مسئله (۱۰۳) ارائه کردند [۲]، [۱۰] و [۱۸]. روش مجموعه قاطع فازی بر پایه یک ایده است، به این صورت که برای آلفا در مسئله (۱۰۳)، یک مقدار ثابت را در نظر می‌گیریم، در نتیجه این مسئله به یک مسئله برنامه‌ریزی خطی تبدیل می‌شود. در مسئله (۱۰۳)، بدست آوردن این جواب بهینه α^*، معادل با تعیین بیشترین مقدار آلفا است بطوری که مجموعه شدنی، ناتهی باشد. الگوریتم روش مجموعه قاطع فازی (الگوریتم آلفا)، در دو گام زیر خلاصه می‌شود:

گام ۱. قرار دهید $\alpha = ۱$ و مسئله (۱۰۳) را با استفاده از فاز-۱ روش سیمپلکس، به ازای این مقدار آلفا بررسی کنید که آیا شدنی است یا خیر. اگر مسئله شدنی بود، قرار دهید $\alpha = ۱$ و پایان. در غیر این صورت، قرار دهید $\alpha^L = ۰$ و $\alpha^R = ۱$ و

[19] Fuzzy decisive set method

به گام بعد بروید.

گام ۲. فرض کنید $\alpha = \frac{\alpha^L+\alpha^R}{۲}$ و مقادیر α^L و α^U را به روزرسانی کنید. اگر مسئله به ازای آلفا شدنی باشد قرار دهید $\alpha^L = \alpha$. اگر به ازای آلفا، مسئله نشدنی باشد قرار دهید $\alpha^U = \alpha$.

در نتیجه، به ازای هر آلفا و با استفاده از فاز-۱ از روش سیمپلکس، بررسی کنید که آیا مسئله (۱۰۳) شدنی است یا خیر؛ سپس، بیشترین مقدار α^* برای تطابق قیود مسئله (۱۰۳) تعیین می‌شود.

مثال ۲۱.۴. مسئله برنامه‌ریزی خطی فازی (۱۰۴)، با ماتریس قیود فازی را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} &\max\ z = ۲x_۱ + ۳x_۲ \\ &s.t.\ \ \tilde{\mathbf{a}}_{۱۱}x_۱ + \tilde{\mathbf{a}}_{۱۲}x_۲ \le ۴, \\ &\qquad \tilde{\mathbf{a}}_{۲۱}x_۱ + \tilde{\mathbf{a}}_{۲۲}x_۲ \le ۶, \\ &\qquad x_۱, x_۲ \ge ۰. \end{aligned} \tag{۱۰۴}$$

که توابع عضویت ضرایب فازی به صورت (۱۰۵) تعریف شده باشند:
(۱۰۵)

$$\mu_{\tilde{\mathbf{a}}_{۱۱}}(x) = \begin{cases} ۱, & x < ۱, \\ ۲ - x, & ۱ \le x \le ۲, \\ ۰, & x > ۲. \end{cases} \qquad \mu_{\tilde{a}_{۱۲}}(x) = \begin{cases} ۱, & x < ۲, \\ \frac{۵-x}{۳}, & ۲ \le x \le ۵, \\ ۰, & x > ۵. \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{\mathbf{a}}_{۲۱}}(x) = \begin{cases} ۱, & x < ۳, \\ \frac{۵-x}{۲}, & ۳ \le x \le ۵, \\ ۰, & x > ۵. \end{cases} \qquad \mu_{\tilde{\mathbf{a}}_{۲۲}}(x) = \begin{cases} ۱, & x < ۱, \\ \frac{۴-x}{۳}, & ۱ \le x \le ۴, \\ ۰, & x > ۴. \end{cases}$$

برای بدست آوردن کران‌های بالا و پایین مقادیر بهینه، ابتدا به ترتیب مسائل (۱۰۶) و

(۱۰۷) را با توجه به مسائل (۹۸) و (۹۹) حل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} z_۱ &= \max\ z = ۲x_۱ + ۳x_۲ \\ s.t.\ \ & x_۱ + ۲x_۲ \leq ۴, \\ & ۳x_۱ + x_۲ \leq ۶, \\ & x_۱, x_۲ \geq ۰. \end{aligned} \tag{۱۰۶}$$

و

$$\begin{aligned} z_۲ &= \max\ z = ۲x_۱ + ۳x_۲ \\ s.t.\ \ & ۲x_۱ + ۵x_۲ \leq ۴, \\ & ۵x_۱ + ۴x_۲ \leq ۶, \\ & x_۱, x_۲ \geq ۰. \end{aligned} \tag{۱۰۷}$$

با حل این دو مسئله، مقادیر $z_۱ = ۶/۸$ و $z_۲ = ۰/۰۶$ بدست می‌آیند که:

$$z^l = \min\{۶/۸, ۳/۰۶\} = ۳/۰۶, z^u = \min\{۶/۸, ۳/۰۶\} = ۶/۸$$

بنابراین، مسئله برنامه‌ریزی خطی فازی (۱۰۴) به مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی (۱۰۸) تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} & \max\ \alpha \\ s.t.\ \ & ۳/۷۴\alpha - (۲x_۱ + ۳x_۲) + ۳/۰۶ \leq ۰, \\ & (۱ + \alpha)x_۱ + (۲ + ۳\alpha)x_۲ - ۴ \leq ۰, \\ & (۳ + ۲\alpha)x_۱ + (۱ + ۳\alpha)x_۲ - ۶ \leq ۰, \\ & \alpha \in [۰, ۱],\ \ x_۱, x_۲ \geq ۰. \end{aligned} \tag{۱۰۸}$$

از آنجا که مسئله (۱۰۴) غیر خطی است پس با استفاده از الگوریتم آلفا، آن را حل

می‌کنیم. به ازای $\alpha = ۱$، مسئله به صورت سیستم (۱۰۹) نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} ۲x_۱ + ۳x_۲ &\geq ۶/۸, \\ ۲x_۱ + ۵x_۲ &\leq ۴, \\ ۵x_۱ + ۴x_۲ &\leq ۶, \\ x_۱, x_۲ &\geq ۰. \end{aligned} \tag{۱۰۹}$$

با اعمال فاز-۱ از الگوریتم سیمپلکس روی مسئله (۱۰۹)، مشاهده می‌شود که این سیستم نشدنی است. بنابراین $\alpha^L = ۰$ و $\alpha^R = ۱$ را در نظر می‌گیریم. مقدار جدید آلفا برابر با $\alpha = \frac{۰+۱}{۲} = \frac{۱}{۲}$ می‌شود. برای $\alpha = \frac{۱}{۲}$، مسئله (۱۰۸) به صورت سیستم (۱۱۰) کاهش می‌یابد:

$$\begin{aligned} ۲x_۱ + ۳x_۲ &\geq ۴/۹۳, \\ ۱/۵x_۱ + ۳/۵x_۲ &\leq ۴, \\ ۴x_۱ + ۲/۵x_۲ &\leq ۶, \\ x_۱, x_۲ &\geq ۰. \end{aligned} \tag{۱۱۰}$$

از آنجا که سیستم (۱۱۰) نیز نشدنی است پس مقادیر $\alpha^L = ۰$ و $\alpha^R = \frac{۱}{۲}$ در نظر می‌گیریم. مقدار جدید آلفا برابر $\alpha^R = \frac{۱}{۴}$ بدست می‌آید. آنگاه به ازای $\alpha = \frac{۱}{۴}$ ، مسئله (۱۰۸) به صورت سیستم (۱۱۱) بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} ۲x_۱ + ۳x_۲ &\geq ۳/۹۹۴۱, \\ ۱/۲۵x_۱ + ۲/۷۵x_۲ &\leq ۴, \\ ۳/۵x_۱ + ۱/۷۵x_۲ &\leq ۶, \\ x_۱, x_۲ &\geq ۰. \end{aligned} \tag{۱۱۱}$$

سیستم (۱۱۱) شدنی می‌شود، پس $\alpha^L = \frac{۱}{۴}$ و $\alpha^R = \frac{۱}{۲}$ در نظر می‌گیریم و مقدار جدید آلفا برابر $\alpha = \frac{۳}{۸}$ می‌شود. به ازای $\alpha = \frac{۳}{۸}$ ، مسئله (۱۰۸) به صورت سیستم (۱۱۲)

کاهش می‌یابد:

$$\begin{aligned} &۲x_۱ + ۳x_۲ \geq ۴/۴۶۱۸, \\ &۱/۳۷۵x_۱ + ۳/۱۲۵x_۲ \leq ۴, \\ &۳/۷۵x_۱ + ۲/۱۲۵x_۲ \leq ۶, \\ &\quad x_۱, x_۲ \geq ۰. \end{aligned} \tag{۱۱۲}$$

سیستم (۱۱۲) نیز شدنی است پس $\alpha^L = \frac{۱}{۴}$ و $\alpha^R = \frac{۱}{۲}$ در نظر گرفته و مقدار جدید آلفا برابر $\alpha = \frac{۳}{۸}$ می‌شود. به ازای $\alpha = \frac{۳}{۸}$ ، مسئله (۱۰۸) به صورت سیستم (۱۱۳) کاهش می‌یابد:

$$\begin{aligned} &۲x_۱ + ۳x_۲ \geq ۴/۴۶۱۸, \\ &۱/۳۷۵x_۱ + ۳/۱۲۵x_۲ \leq ۴, \\ &۳/۷۵x_۱ + ۲/۱۲۵x_۲ \leq ۶, \\ &\quad x_۱, x_۲ \geq ۰. \end{aligned} \tag{۱۱۳}$$

با ادامه این فرآیند، مقدار بهینه آلفا در بیست و یکمین تکرار از الگوریتم آلفا بدست می‌آید.

توجه داشته باشید، مقدار بهینه آلفا که در دومین تکرار روش زیرگرادیان اصلاح شده بدست می‌آید تقریبا با مقدار بهینه آلفا، بدست آمده از بیست و یکمین تکرار الگوریتم آلفا برابر است.

حال مسئله برنامه‌ریزی فازی با ماتریس قیود فازی و بردار منابع فازی (۱۱۴) را به عنوان گروه خاصی از مسائل برنامه‌ریزی خطی فازی گروه–۵ در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} &\max z = \textstyle\sum_{j=۱}^{n} c_j x_j \\ &s.t. \quad g_i(x) = \textstyle\sum_{j=۱}^{n} \tilde{\mathbf{a}}_{ij} x_j \leq \tilde{\mathbf{b}}_i, \quad i = ۱, ۲, ..., m, \\ &\qquad x_j \geq ۰, \quad j = ۱, ۲, ..., n. \end{aligned} \tag{۱۱۴}$$

توابع عضویت خطی ماتریس قیود فازی و بردار منابع فازی مسئله (۱۱۴) به ترتیب در روابط (۸۸) و (۸۹) داده شده‌اند.
گاسیمو و ینیلماز برای فازی زدایی مسئله (۱۱۴) ، ابتدا تابع هدف را با محاسبه کران‌های مقادیر بهینه، فازی کردند. آن‌ها، کران‌های مقادیر بهینه را با حل مسائل برنامه‌ریزی خطی استاندارد (۱۱۵) تا (۱۱۷) بدست آوردند:

$$\begin{aligned} & z_1 = \max \ z = \textstyle\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ & s.t. \ \ \textstyle\sum_{j=1}^{n} (a_{ij} + p_{ij}) x_j \leq b_i, \ \ i = 1, 2, ..., m, \\ & \qquad x_j \geq 0, \ \ j = 1, 2, ..., n. \end{aligned} \tag{115}$$

و

$$\begin{aligned} & z_2 = \max \ z = \textstyle\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ & s.t. \ \ \textstyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i + p_i, \ \ , i = 1, 2, ..., m, \\ & \qquad x_j \geq 0, \ \ j = 1, 2, ..., n. \end{aligned} \tag{116}$$

و

$$\begin{aligned} & z_3 = \max \ z = \textstyle\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ & s.t. \ \ \textstyle\sum_{j=1}^{n} (a_{ij} + p_{ij}) x_j \leq b_i + p_i, \ \ i = 1, 2, ..., m, \\ & \qquad x_j \geq 0, \ \ j = 1, 2, ..., n. \end{aligned} \tag{117}$$

و

$$\begin{aligned} & z_4 = \max \ z = \textstyle\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ & s.t. \ \ \textstyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \ \ i = 1, 2, ..., m, \\ & \qquad x_j \geq 0, \ \ j = 1, 2, ..., n. \end{aligned} \tag{118}$$

در این حالت $z^l = \min\{z_1, z_2, z_3, z_4\}$ و $z^u = \max\{z_1, z_2, z_3, z_4\}$ به ترتیب کران‌های بالا و پایین هستند. مجموعه فازی مقدار بهینه $\tilde{G}$ همانند (۱۰۰) تعریف می‌شود.
در ادامه، مجموعه فازی قید iام، $\tilde{C}_i$، به صورت (۱۱۹) تعریف می‌شود:

$$\mu_{\tilde{c}_i}(x)=\begin{cases} ۱, & b_i > \sum_{j=۱}^{n}(a_{ij}+p_{ij})x_j, \\ \frac{b_i-\sum_{j=۱}^{n}a_{ij}x_j}{\sum_{j=۱}^{n}p_{ij}x_j+p_i}, & \sum_{j=۱}^{n}a_{ij}x_j \le b_i \le \sum_{j=۱}^{n}(a_{ij}+p_{ij})x_j+p_i, \\ ۰, & b_i < \sum_{j=۱}^{n}a_{ij}x_j. \end{cases} \tag{۱۱۹}$$

سپس با استفاده از روش فازی زدایی که برای مسئله (۱۰۲) استفاده شد، مسئله (۱۱۴) به مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی قطعی (۱۲۰) کاهش می‌یابد:

$$\begin{aligned} &\max\ \alpha \\ &s.t.\ \ \alpha(z^u-z^l)-\sum_{j=۱}^{n}c_jx_j+z^l\le ۰, \\ &\qquad \sum_{j=۱}^{n}(a_{ij}+p_{ij}\alpha)x_j+p_i\alpha-b_i\le ۰,\ \ i=۱,۲,...,m, \\ &\qquad \alpha\in[۰,۱],\ x_j\ge ۰,\ \ j=۱,۲,...,n. \end{aligned} \tag{۱۲۰}$$

در این مرحله، دوباره از الگوریتم آلفا برای حل مسئله (۱۲۰) استفاده می‌شود.

مثال ۲۲.۴. مسئله برنامه‌ریزی خطی فازی (۱۲۱) با ماتریس قیود فازی و بردار منابع فازی در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} &\max\ z=x_۱+x_۲ \\ &s.t.\ \ \tilde{\mathbf{a}}_{۱۱}x_۱+\tilde{\mathbf{a}}_{۱۲}x_۲\le \tilde{\mathbf{b}}_۱, \\ &\qquad \tilde{\mathbf{a}}_{۲۱}x_۱+\tilde{\mathbf{a}}_{۲۲}x_۲\le \tilde{\mathbf{b}}_۲, \\ &\qquad x_۱,x_۲\ge ۰. \end{aligned} \tag{۱۲۱}$$

که توابع عضویت قیدهای فازی به صورت (۱۲۲) و (۱۲۳) تعریف می‌شوند:

(۱۲۲)

$$\mu_{\tilde{\mathbf{a}}_{۱۱}}(x)=\begin{cases} ۱, & x<۱, \\ ۲-x, & ۱\le x\le ۲, \\ ۰, & x>۲. \end{cases} \qquad \mu_{\tilde{\mathbf{a}}_{۱۲}}(x)=\begin{cases} ۱, & x<۲, \\ ۳-x, & ۲\le x\le ۳, \\ ۰, & x>۳. \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{\mathbf{a}}_{۲۱}}(x)=\begin{cases} ۱, & x<۲, \\ \frac{۴-x}{۲}, & ۲\le x\le ۴, \\ ۰, & x>۴. \end{cases} \qquad \mu_{\tilde{\mathbf{a}}_{۲۲}}(x)=\begin{cases} ۱, & x<۳, \\ \frac{۵-x}{۲}, & ۳\le x\le ۵, \\ ۰, & x>۵. \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{b}_1}(x) = \begin{cases} ۱, & x < ۳, \\ \frac{۵-x}{۲}, & ۳ \leq x \leq ۵, \\ ۰, & x > ۵. \end{cases} \quad \mu_{\tilde{b}_2}(x) = \begin{cases} ۱, & x < ۴, \\ \frac{۷-x}{۳}, & ۴ \leq x \leq ۷, \\ ۰, & x > ۷. \end{cases} \tag{۱۲۳}$$

مسائل (۱۲۴) تا (۱۲۷) را برای محاسبه کران‌های بالا و پایین مقادیر بهینه حل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} z_۱ &= \max\ z = x_۱ + x_۲ \\ s.t.\ \ & ۲x_۱ + ۳x_۲ \leq ۳, \\ & ۴x_۱ + ۵x_۲ \leq ۴, \\ & x_۱, x_۲ \geq ۰. \end{aligned} \tag{۱۲۴}$$

و

$$\begin{aligned} z_۲ &= \max\ z = x_۱ + x_۲ \\ s.t.\ \ & x_۱ + ۲x_۲ \leq ۵, \\ & ۲x_۱ + ۳x_۲ \leq ۷, \\ & x_۱, x_۲ \geq ۰. \end{aligned} \tag{۱۲۵}$$

و

$$\begin{aligned} z_۳ &= \max\ z = x_۱ + x_۲ \\ s.t.\ \ & ۲x_۱ + ۳x_۲ \leq ۵, \\ & ۴x_۱ + ۵x_۲ \leq ۷, \\ & x_۱, x_۲ \geq ۰. \end{aligned} \tag{۱۲۶}$$

و

$$\begin{aligned} z_۴ &= \max\ z = x_۱ + x_۲ \\ s.t.\ \ & x_۱ + ۲x_۲ \leq ۳, \\ & ۲x_۱ + ۳x_۲ \leq ۴, \\ & x_۱, x_۲ \geq ۰. \end{aligned} \tag{۱۲۷}$$

با حل این مسائل، مقادیر بهینه به ترتیب برابر $z_۱ = ۱$ ، $z_۲ = ۳/۵$ ، $z_۳ = ۱/۷۵$ و

$z_4 = ۲$ بدست می‌آیند. بنابراین

$$z^l = \min\{۱, ۳/۵, ۲, ۱/۷۵\} = ۱, z^u = \min\{۱, ۳/۵, ۲, ۱/۷۵\} = ۳/۵$$

در نتیجه، مسئله (۱۲۱) به مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} &\max\ \alpha \\ &s.t.\ \ ۲/۵\alpha - (x_1 + x_2) + ۱ \leq ۰, \\ &\qquad (۱ + \alpha)x_1 + (۲ + \alpha)x_2 + ۲\alpha - ۳ \leq ۰, \\ &\qquad (۲ + ۲\alpha)x_1 + (۳ + ۲\alpha)x_2 + ۳\alpha - ۴ \leq ۰, \\ &\qquad \alpha \in [۰, ۱],\ \ x_1, x_2 \geq ۰. \end{aligned} \tag{۱۲۸}$$

مسئله (۱۲۸) را با استفاده از الگوریتم آلفا حل می‌کنیم. به ازای $\alpha = ۱$، مسئله فوق به سیستم (۱۲۹) کاهش می‌یابد:

$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 \geq ۳/۵ \\ &۲x_1 + ۳x_2 \leq ۱, \\ &۴x_1 + ۵x_2 \leq ۱, \\ &x_1, x_2 \geq ۰. \end{aligned} \tag{۱۲۹}$$

سیستم (۱۲۹) نشدنی است. بنابراین $\alpha^L = ۰$ و $\alpha^R = ۱$ در نظر گرفته می‌شود. مقدار جدید آلفا برابر $\alpha = \frac{۰+۱}{۲} = \frac{۱}{۲}$ و به ازای آن، مسئله (۱۲۸) به سیستم (۱۳۰) کاهش می‌یابد:

$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 \geq ۲/۲۵ \\ &۱/۵x_1 + ۲/۵x_2 \leq ۲, \\ &۳x_1 + ۴x_2 \leq ۲/۵, \\ &x_1, x_2 \geq ۰. \end{aligned} \tag{۱۳۰}$$

چون سیستم (۱۳۰) نشدنی است پس $\alpha^L = ۰$ و $\alpha^R = \frac{۱}{۲}$ در نظر گرفته می‌شود. مقدار

جدید آلفا برابر $\alpha = \frac{۱}{۴}$ می‌باشد. به ازای $\alpha = \frac{۱}{۴}$ ، مسئله (۱۲۸) به سیستم (۱۳۱) تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} & x_۱ + x_۲ \geq ۱/۶۲۵ \\ & ۱/۲۵x_۱ + ۲/۲۵x_۲ \leq ۲/۵, \\ & ۲/۵x_۱ + ۳/۵x_۲ \leq ۳/۲۵, \\ & x_۱, x_۲ \geq ۰. \end{aligned} \tag{۱۳۱}$$

سیستم (۱۳۱) شدنی می‌شود و $\alpha^L = ۰$ و $\alpha^R = \frac{۱}{۴}$ در نظر گرفته می‌شود. مقدار جدید آلفا برابر $\alpha = \frac{۱}{۸}$ می‌باشد. به ازای $\alpha = \frac{۱}{۸}$ ، مسئله (۱۲۸) به سیستم (۱۳۲) تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} & x_۱ + x_۲ \geq ۱/۳۱۲۵ \\ & ۱/۱۲۵x_۱ + ۲/۱۲۵x_۲ \leq ۲/۷۵, \\ & ۲/۲۵x_۱ + ۳/۲۵x_۲ \leq ۳/۶۲۵, \\ & x_۱, x_۲ \geq ۰. \end{aligned} \tag{۱۳۲}$$

چون سیستم (۱۳۲) شدنی است، قرار دهید $\alpha^L = \frac{۱}{۸}$ و $\alpha^R = \frac{۱}{۴}$. مقدار جدید آلفا برابر $\alpha = \frac{۳}{۱۶}$ می‌شود. با ادامه این فرآیند، مقدار بهینه آلفا، در بیست و پنجمین تکرار از الگوریتم آلفا بدست می‌آید. مشاهده می‌شود که این مقدار، تقریبا با مقدار بهینه آلفای بدست آمده در دومین تکرار روش زیرگرادیان اصلاح شده، برابر است.

۳.۴.۴ روش فرهادی‌نیا

برای حل مسئله (۱۱۴)، فرهادی‌نیا، روشی را برای تابع عضویت قیدهای فازی با توجه به تذکر زیر، ارائه کرد [۸].

تذکر: یک تابع عضویت مناسب باید صفر شود، اگر قیدها به طور قوی، حالت قطعی را نقض کنند و یک شود، اگر قیدها در حالت قطعی به طور کامل برقرار باشند.

همچنین باید از صفر به یک اکیداً صعودی باشد.
همانطور که مشاهده می‌شود، مسائل (۱۱۵) تا (۱۱۸) ، دارای توابع هدف یکسان و قیدهای متفاوتی هستند. با جابجایی عبارت p_i ، $(i = ۱, ۲, ..., m)$، در همه قیدها به سمت چپ، ابتدا قیود به صورت (۱۳۳) بدست می‌آیند:

$$\begin{array}{ll}
\sum_{j=۱}^{n} (a_{ij} + p_{ij})x_j \le b_i, & i = ۱, ۲, ..., m, \\
\sum_{j=۱}^{n} a_{ij}x_j - p_i \le b_i, & i = ۱, ۲, ..., m, \\
\sum_{j=۱}^{n} (a_{ij} + p_{ij})x_j - p_i \le b_i, & i = ۱, ۲, ..., m, \\
\sum_{j=۱}^{n} a_{ij}x_j \le b_i, & i = ۱, ۲, ..., m.
\end{array} \tag{۱۳۳}$$

برای هر $x = (x_j)_{۱\times n}$ چنین تعریف می‌شود:

$$\begin{array}{c}
b_i^{\max}(x) = \max\{\sum_{j=۱}^{n} (a_{ij} + p_{ij})x_j, \sum_{j=۱}^{n} a_{ij}x_j - p_i, \\
\sum_{j=۱}^{n} (a_{ij} + p_{ij})x_j - p_i\,, \sum_{j=۱}^{n} a_{ij}x_j\},
\end{array} \tag{۱۳۴}$$

و

$$\begin{array}{c}
b_i^{\min}(x) = \min\{\sum_{j=۱}^{n} (a_{ij} + p_{ij})x_j, \sum_{j=۱}^{n} a_{ij}x_j - p_i, \\
\sum_{j=۱}^{n} (a_{ij} + p_{ij})x_j - p_i\,, \sum_{j=۱}^{n} a_{ij}x_j\}.
\end{array} \tag{۱۳۵}$$

بنابراین، با توجه به مطالب فوق و معادلات (۱۳۴) و (۱۳۵) ، مجموعه فازی قید iم، $\tilde{C}_i$ ، به صورت (۱۳۶) مشخص می‌شود:

$$\mu_{\tilde{C}_i}(x) = \begin{cases} ۱, & b_i > b_i^{\max}, \\ \circ \in [\circ, ۱], & b_{i,}^{\min} \le b_i \le b_i^{\max}, \\ \circ, & b_i < b_i^{\min}. \end{cases} \tag{۱۳۶}$$

به آسانی می‌توان نشان داد که برای هر $x \ge \circ$:

$$b_i^{\max}(x) = \sum_{j=۱}^{n} (a_{ij} + p_{ij})x_j, \tag{۱۳۷}$$

و

$$b_i^{\min}(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - p_i. \qquad (۱۳۸)$$

در نتیجه با توجه به روابط (۱۳۶) تا (۱۳۸)، قید فازی $\tilde{C}_i$، به صورت (۱۳۹) تعریف می‌شود:

(۱۳۹)

$$\mu_{\tilde{C}_i}(x) = \begin{cases} 1, & b_i > \sum_{j=1}^{n}(a_{ij}+p_{ij})x_j + p_i, \\ \frac{b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j}{\sum_{j=1}^{n} p_{ij}x_j + p_i}, & \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - p_i \le b_i \le \sum_{j=1}^{n}(a_{ij}+p_{ij})x_j + p_i, \\ 0, & b_i < \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - p_i. \end{cases}$$

بنابراین با استفاده از فازی‌زدایی ارائه شده برای مسئله (۱۰۲)، می‌توان مسئله (۱۱۴) را، با جایگذاری $\mu_{\tilde{C}_i}(x)$ (رابطه (۱۳۹)) در مسئله (۱۰۲) ، به مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی قطعی (۱۴۰) تبدیل کرد:

(۱۴۰)

$$\begin{aligned} &\max\ \alpha \\ &s.t.\ \ \alpha(z^u - z^l) - \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + z^l \le 0, \\ &\qquad \sum_{j=1}^{n}(a_{ij} + p_{ij}\alpha)x_j + p_i\alpha - p_i - b_i \le 0, \qquad i = 1, 2, ..., m, \\ &\qquad \alpha \in [0, 1],\ \ x_j \ge 0, \qquad\qquad j = 1, 2, ..., n. \end{aligned}$$

مسئله پیشنهادی فرهادی‌نیا، (۱۴۰)، نسبت به مسئله ارائه شده توسط گاسیمو و ینیلماز (۱۲۰)، مزایای بیشتری دارد که عبارتند از:

۱. کاهش تعداد تکرارهای مورد نیاز برای بدست آوردن جواب؛

۲. رسیدن به یک بهینگی دقیق‌تر با یشترین درجه تطابق مجموعه تصمیم فازی.

مثال ۲۳.۴. مسئله برنامه‌ریزی خطی فازی (۱۲۱) که توابع عضویت قیدهای ماتریس فازی آن در رابطه (۱۲۲) و بردار منابع فازی آن به صورت (۱۴۱) می‌باشد، را در نظر

بگیرید:

$$\mu_{\tilde{\mathbf{b}}_1}(x)=\begin{cases} 1, & x<3,\\ \frac{11-x}{8}, & 3\le x\le 11,\\ 0, & x>11.\end{cases}\quad \mu_{\tilde{\mathbf{b}}_2}(x)=\begin{cases} 1, & x<4,\\ \frac{14-x}{10}, & 4\le x\le 14,\\ 0, & x>14.\end{cases} \tag{141}$$

ابتدا کران‌های بالا و پایین مقادیر بهینه را بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} z^l = \max\ & z = x_1 + x_2\\ s.t.\ \ & 2x_1 + 3x_2 \le 3,\\ & 4x_1 + 5x_2 \le 4,\\ & x_1, x_2 \ge 0. \end{aligned} \tag{142}$$

و

$$\begin{aligned} z^u = \max\ & z = x_1 + x_2\\ s.t.\ \ & x_1 + 2x_2 \le 11,\\ & 2x_1 + 3x_2 \le 14,\\ & x_1, x_2 \ge 0. \end{aligned} \tag{143}$$

با حل مسائل (۱۴۲) و (۱۴۳) ، به ترتیب مقادیر بهینه $z^l = 1$ و $z^u = 7$ بدست می‌آیند. بنابراین مسئله (۱۲۱) به مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی (۱۴۴) کاهش می‌یابد:

$$\begin{aligned} \max\ \ & \alpha\\ s.t.\ \ & 6\alpha - (x_1 + x_2) + 1 \le 0,\\ & (1+\alpha)x_1 + (2+\alpha)x_2 + 8\alpha - 11 \le 0,\\ & (2+2\alpha)x_1 + (3+2\alpha)x_2 + 10\alpha - 14 \le 0,\\ & \alpha \in [0,1],\ \ x_1, x_2 \ge 0. \end{aligned} \tag{144}$$

برای حل مسئله (۱۴۴) از الگوریتم آلفا استفاده می‌کنیم. ابتدا فرض می‌کنیم $\alpha = 1$،

آنگاه مسئله فوق به سیستم زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} &x_۱ + x_۲ \geq ۷, \\ &۲x_۱ + ۳x_۲ \leq ۳, \\ &۴x_۱ + ۵x_۲ \leq ۴, \\ &x_۱, x_۲ \geq ۰. \end{aligned} \tag{۱۴۵}$$

سیستم (۱۴۵) را با کمک فاز–۱ از الگوریتم سیمپلکس حل و مشاهده می‌شود که این سیستم نشدنی است. بنابراین، $\alpha^L = ۰$ و $\alpha^R = ۱$ در نظر می‌گیریم. مقدار جدید آلفا برابر $\alpha = \frac{۰+۱}{۲} = \frac{۱}{۲}$ بدست می‌آید و مسئله (۱۴۴) به صورت سیستم (۱۴۶) کاهش می‌یابد:

$$\begin{aligned} &x_۱ + x_۲ \geq ۴, \\ &۱/۵x_۱ + ۲/۵x_۲ \leq ۷, \\ &۳x_۱ + ۴x_۲ \leq ۹, \\ &x_۱, x_۲ \geq ۰. \end{aligned} \tag{۱۴۶}$$

چون سیستم (۱۴۶) نشدنی است پس مقادیر $\alpha^L = ۰$ و $\alpha^R = \frac{۱}{۲}$ در نظر گرفته و مقدار جدید آلفا برابر $\alpha = \frac{۱}{۴}$ می‌شود. به ازای $\alpha = \frac{۱}{۴}$ مسئله (۱۴۴) را به صورت سیستم (۱۴۷) تبدیل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} &x_۱ + x_۲ \geq ۲/۵, \\ &۱/۲۵x_۱ + ۲/۲۵x_۲ \leq ۹, \\ &۲/۵x_۱ + ۳/۵x_۲ \leq ۱۱/۵, \\ &x_۱, x_۲ \geq ۰. \end{aligned} \tag{۱۴۷}$$

از آنجا که سیستم (۱۳۱) نیز نشدنی است، مقادیر $\alpha^L = \frac{۱}{۴}$ و $\alpha^R = \frac{۱}{۲}$ در نظر گرفته و مقدار جدید آلفا برابر $\alpha = \frac{۳}{۸}$ و آنگاه، به ازای $\alpha = \frac{۳}{۸}$ مسئله (۱۴۴) به سیستم (۱۴۸)

کاهش می‌یابد:

$$
\begin{aligned}
& x_۱ + x_۲ \geq ۳/۲۵, \\
& ۱/۳۷۵x_۱ + ۲/۳۷۵x_۲ \leq ۱۰, \\
& ۲/۷۵x_۱ + ۳/۷۵x_۲ \leq ۶/۵, \\
& x_۱, x_۲ \geq ۰.
\end{aligned} \tag{۱۴۸}
$$

سیستم (۱۳۲) نیز نشدنی است. مقادیر $\alpha^L = \frac{۱}{۴}$ و $\alpha^R = \frac{۳}{۸}$ می‌باشند و مقدار جدید آلفا برابر $\alpha = \frac{۵}{۱۶}$ می‌باشد. با ادامه این روند و در تکرار شانزدهم از الگوریتم آلفا، مقدار بهینه $\alpha = ۰/۴۱۴۳$ بدست می‌آید. دقت شود که برای حل مثال ۲۳.۴ با روش گاسیمو و ینیلماز، باید مسئله غیرخطی زیر حل شود:

$$
\begin{aligned}
& \max\ \alpha \\
& s.t.\ \ ۶\alpha - (x_۱ + x_۲) + ۱ \leq ۰, \\
& \qquad (۱ + \alpha)x_۱ + (۲ + \alpha)x_۲ + ۸\alpha - ۳ \leq ۰, \\
& \qquad (۲ + ۲\alpha)x_۱ + (۳ + ۲\alpha)x_۲ + ۱۰\alpha - ۴ \leq ۰, \\
& \qquad \alpha \in [۰, ۱],\ \ x_۱, x_۲ \geq ۰.
\end{aligned} \tag{۱۴۹}
$$

با حل مسئله (۱۴۹) با کمک الگوریتم آلفا، مقدار بهینه $\alpha = ۰/۰۸۰۱$ در تکرار بیست و چهارم بدست می‌آید. پس از مقایسه نتایج فوق، مشاهده می‌شود که تعداد تکرارهای حل مسئله با روش فرهادی‌نیا کمتر از تعداد تکرارهای حل مسئله با روش گاسیمو و ینیلماز است. همچنین بیشترین درجه تطابق مجموعه تصمیم فازی، یعنی بهینگی مسئله (۱۴۴) برابر $\alpha = ۰/۴۱۴۳$ است که نسبت به مقدار بدست آمده در مسئله (۱۴۹) یعنی $(\alpha = ۰/۰۸۰۱)$ ، خیلی بهتر است.

۵.۴ مسائل برنامه‌ریزی خطی انعطاف‌پذیرگروه-۵

در این زیربخش، به بررسی گروه پنجم از مدل‌های برنامه‌ریزی خطی فازی انعطاف‌پذیر می‌پردازیم. این مدل، یک مدل برنامه‌ریزی خطی با تابع هدف انعطاف‌پذیر، ماتریس قیود

انعطاف‌پذیر و بردار منابع انعطاف‌پذیر است. برای حل این مدل، از روش لای و هوانگ استفاده می‌شود که در ادامه به معرفی این مدل و روش حل آن می‌پردازیم. فرم کلی مسئله برنامه‌ریزی خطی فازی گروه–۵، با تابع هدف انعطاف‌پذیر، ماتریس قیود انعطاف‌پذیر و بردار منابع انعطاف‌پذیر به صورت (۱۵۰) می‌باشد:

$$\begin{aligned} &\widetilde{\max}\, z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ &s.t.\quad g_i(x) = \sum_{j=1}^{n} \tilde{\mathbf{a}}_{ij} x_j \leq \tilde{\mathbf{b}}_i,\quad i = 1, 2, ..., m, \\ &\qquad\quad x_j \geq 0,\quad j = 1, 2, ..., n. \end{aligned} \tag{150}$$

که توابع عضویت ضرایب فازی $\tilde{\mathbf{a}}_{ij}$ و $\tilde{\mathbf{b}}_i$ به ترتیب همانند (۸۸) و (۸۹) خطی هستند. در ادامه، روش لای و هوانگ که برای حل این گروه از مسائل ارائه شده است، مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۱.۵.۴ روش لای و هوانگ

لای و هوانگ با فرض مفهوم مدل‌های غیر متقارن، چنین بیان کردند که تابع عضویت تابع هدف فازی را می‌توان با تحلیل قیدهای فازی و در نظر گرفتن توابع عضویت زیمرمن و ورنر در آن نوشت [۱۲]. آن‌ها برای حل مسئله (۱۵۰) ، ابتدا ماتریس قیود فازی و بردار منابع فازی را بر طبق روش کارلسون و کورهونن فازی‌زدایی کردند؛ یعنی ابتدا مسئله برنامه‌ریزی خطی زیر را حل کردند:

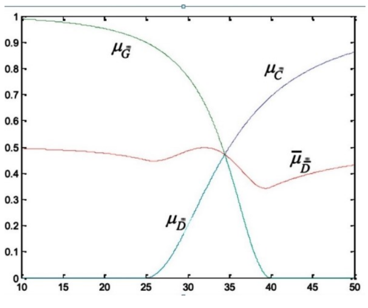
$$\begin{aligned} &\max\ z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ &s.t.\quad \sum_{j=1}^{n} [a_{ij} + (1-\mu)p_{ij}]x_j \leq b_i + (1-\mu)p_i,\quad i = 1, 2, ..., m, \\ &\qquad\quad \mu \in [0, 1],\ x_j \geq 0,\quad j = 1, 2, ..., n. \end{aligned} \tag{151}$$

از طرفی، مشاهده می‌شود که مسئله (۱۵۱) یک مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی است زیرا قیدها شامل عبارت ضربی μx_j می‌باشند. بنابراین برای هر مقدار μ مانند $\mu = 0/0, 0/1, ..., 0/9, 1$، می‌توان یک جواب بهینه برای مسئله (۱۵۱) و یک نمودار

تکه‌ای خطی متناظر بین z^* و μ بدست آورد، (شکل ۷). لذا، تابع عضویت ورنر برای تابع هدف (z) را می‌توان با رابطه (۱۵۲) بدست آورد:

$$\mu_\circ(z) = \begin{cases} ۱, & z > z^u, \\ ۱ - \frac{z^u - z}{z^u - z^l}, & z^l \leq z \leq z^u, \\ \circ, & z < z^l. \end{cases} \qquad (۱۵۲)$$

که z^l و z^u به ترتیب به ازای $\mu = \circ$ و $\mu = ۱$ مقادیر بهینه مسئله (۱۵۱) هستند. جواب بهینه z_w^* در نقطه تقاطع تابع عضویت تابع هدف و قطعه خطی فرضی از رابطه توابع بین مقادیر هدف (z^*) و درجه تطابق (μ)، همانطورکه در شکل ۷ نشان داده شده است، قرار دارد. به عبارت دیگر، اگر تصمیم‌گیرنده مقدار آرمانی $(z_\circ)$ و تلورانس متناظر با آن را $(p_\circ)$ در نظر بگیرد، پس از محاسبه جواب بهینه مسئله (۱۵۱) برای هر $\mu = ۰/۰, ۰/۱, ..., ۰/۹, ۱$، آنگاه تابع عضویت زیمرمن معنادارتر می‌شود. جواب z_z^* را می‌توان با حل همزمان دو معادله تابع عضویت زیمرمن و قطعه خطی فرضی از رابطه توابع بین مقادیر هدف (z^*) و درجه تطابق (μ) بدست آورد، (شکل ۷).



شکل ۷: *جواب مسئله* (۹۶)

۵ نتیجه گیری

مسائل در یک محیط فازی، به یکی از سه دسته مسائل برنامه‌ریزی خطی فازی انعطاف‌پذیر، امکانی و استوار تعلق دارند که با توجه به نوع ابهام‌های موجود در هر مسئله، هر کدام از این دسته‌ها به گروه‌های مختلفی تقسیم‌بندی می‌شوند. در این مطالعه،

به بررسی مسائل برنامه‌ریزی خطی فازی انعطاف‌پذیر پرداخته شده است که در آن با یک نوع ابهام ناشی از غیر شفاف بودن مرز، روبرو هستیم؛ یعنی نمی‌توانیم مرز دقیق و شفافی را برای یک محدودیت به شکل نامساوی (یا تساوی) در نظر بگیریم. چنین ابهام‌هایی در مسئله به صورت یک تابع عضویت مبتنی بر ارجحیت ذهنی مدل‌سازی می‌شوند. لای و هوانگ، مسائل برنامه‌ریزی خطی فازی انعطاف‌پذیر را بر اساس انعطاف‌پذیر بودن ماتریس قیود، بردار منابع، بردار هزینه تابع هدف و هر ترکیب ممکن از آن‌ها، به پنج گروه تقسیم‌بندی کردند. روش‌های پایه‌ای موجود برای حل مسائل برنامه‌ریزی خطی فازی انعطاف‌پذیر که در این مطالعه ارائه شده‌اند، عبارتند از روش‌های زیمرمن، ورنر، چاناس، وردگی، گوو و وو، لای و هوانگ، صافی و همکاران، چاندرا و آگاروال. مزایا و معایب هر کدام از روش‌ها بررسی و برای نشان دادن نحوه عملکرد آن‌ها، از مثال‌های عددی استفاده شده است.

همانطور که مشاهده شد، این مطالعه، یک مطالعه مروری است و در آن به بررسی برخی مدل‌های برنامه‌ریزی خطی فازی، دسته‌بندی و روش‌های حل آن‌ها پرداخته شده است. سایر روش‌های موجود برای حل مسائل برنامه‌ریزی خطی فازی را در مطالعات مروری بعدی بررسی خواهیم کرد.

مراجع

[۱] س. ع ترابی، س. توفیقی (۱۳۹۴). برنامه ریزی ریاضی فازی. انتشارات دانشگاه تهران. چاپ چهارم.

[2] Azimov, A.Y., Gasimov, R.N. (1999) On Weak Conjugacy, Weak subdifferentials and Duality with Zero-gap in non-convex Optimization. Int. J. Appl. Math. 1, 171–192.

[3] Bellman, R.E., Zadeh, L.A. (1970) Decision-Making in a Fuzzy Environment. Management Science 17(4): p. B-141-B-164.

[4] Cadenas, J.M., Pelta, D.A., Pelta, H.R., Verdegay, J.L. (2004) Application of Fuzzy Optimization to Diet Problems in Argentinean Farms. European Journal of Operational Research. 158(1): p. 218-228.

[5] Carlsson, C., Korhonen, P. (1986) A Parametric Approach to Fuzzy Linear Programming. Fuzzy Sets Syst. 20(1), 17–30.

[6] Chanas, S. (1983) The Use of Parametric Programming in Fuzzy Linear Programming. Fuzzy Sets and Systems. 11(1): p. 243-251.

[7] Chandra, S., Aggarwal, A. (2014) On Solving Fuzzy Linear Programming Problems: A Revisit to Zimmermann's Approach. Journal of Intelligent and Fuzzy Systems. 27(5): p. 2603-2610.

[8] Farhadinia, B. (2014) Solving Fuzzy Linear Programming Problems with Linear Membership Functions-Revisited. Casp. J. Math. Sci. 3(2), 317–396.

[9] Figueroa, J.C., Hernández, G., Franco, C. (2022) A Review on History, Trends and Perspectives of Fuzzy Linear Programming. Operations Research Perspectives. Volume 9. 100247.

[10] Gasimov, R.N., Yenilmez, K. (2002) Solving Fuzzy Linear Programming Problems with Linear Membership Functions. Turk. J. Math. 26(4), 375–396.

[11] Guu, S.M., Wu, Y.K. (1999) Two-phase Approach for Solving the Fuzzy Linear Programming Problems. Fuzzy Sets and Systems. 107(2): p. 191-195.

[12] Lai, Y.J., Hwang, C.L. (1992) Fuzzy Mathematical Programming. In: Fuzzy Mathematical programming. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, vol 394. Springer, Berlin, Heidelberg.

[13] Lai, Y.J., Hwang, C.L.(1992) Interactive Fuzzy Linear Programming. Fuzzy Sets and Systems. 45(2): p. 169-183.

[14] Melian, B., Verdegay, J.L. (2008) Fuzzy Optimization Models for the Design of WDM Networks. IEEE Transactions on Fuzzy Systems. 16(2): p. 466-476.

[15] Melian, B., Verdegay, J.L. (2011) Using Fuzzy Numbers in Network Design Optimization Problems. IEEE Transactions on Fuzzy Systems. 19(5): p. 797-806.

[16] Safi, M., Maleki, H., Zaeimazad, E. (2007) A Note on the Zimmermann Method for Solving Fuzzy Linear Programming Problems.

[17] Sakawa, M., Yano, H., Nishizaki, N. (2013) Linear and multiobjective programming with fuzzy stochastic extensions. Springer.

[18] Sakawa, M., Yana, H. (1985) Interactive Decision Making for Multi-Objective Linear Fractional Programming Problems with Fuzzy Parameters. Cybern. Syst. 16, 377–397.

[19] Tanaka, H., Okuda, T., Asai, K. (1974) Fuzzy Mathematical Programming. J. Cybern. 3(4). 37-49.

[20] Verdegay, J.L. (1982) Fuzzy Mathematical Programming. Fuzzy Information and Decision Processes. North Holland, Amsterdam p. 231- 237.

[21] Verdegay, J.L. (1984) Applications of Fuzzy Optimization in Operational Research. Control Cybern. 13(3), 229–239.

[22] Zimmermann, H.J. (1975) Description and Optimization of Fuzzy Systems. International Journal of General System. 2(1): p. 209-215.

[23] Zimmermann, H.J. (1978) Fuzzy Programming and Linear programming with Several Objective Functions. Fuzzy Sets and Systems,. 1(1): p. 45-55.