سیستم‌های فازی و کاربردها
شاپای چاپی: ۴۴۰۹-۲۷۱۷
سال پنجم، شماره دوم (پائیز و زمستان ۱۴۰۱)
شاپای الکترونیکی: ۳۹۸۴-۲۷۱۷
صص. ۱۲۱ تا ۱۵۴
DOI:10.22034/JFSA.2022.314651.1098

یک رویکرد چندهدفه برای حل مسائل برنامه‌ریزی کسری خطی تماما فازی با اعداد ذوزنقه‌ای فازی

نعمت اله تقی نژاد*، الهام مهدی زاده و مهرداد غزنوی

دانشگاه گنبد کاووس، دانشکده علوم پایه، گنبد کاووس، ایران
دانشگاه صنعتی شاهرود، دانشکده علوم ریاضی، شاهرود، ایران
دانشگاه صنعتی شاهرود، دانشکده علوم ریاضی، شاهرود، ایران

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۸/۲۰ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۷/۱
نوع مقاله: علمی-پژوهشی

چکیده

یکی از ابزارهای کارا و متداول در بسیاری از مسائل جهان واقعی برنامه‌ریزی کسری است زیرا بهینه‌سازی نسبت اهداف از بهینه‌سازی هر هدف به تنهایی دید و بینش بهتری ایجاد می‌کند، اما از آنجایی که مقادیر مشاهده شده در جهان واقعی به دلیل اطلاعات ناقص یا غیرقابل دستیابی نادقیق و مبهم می‌باشند، در این مقاله از اعداد فازی استفاده می‌شود و بدین ترتیب یک مسئله‌ی برنامه‌ریزی کسری خطی فازی به وجود خواهد آمد. در این مقاله روش جدیدی برای حل برنامه‌ریزی کسری خطی تماما فازی با اعداد فازی ذوزنقه‌ای و با قیود نامساوی ارائه می‌شود در این روش ابتدا مسئله فازی به برنامه‌ریزی خطی چندهدفه تبدیل و سپس با روش رتبه‌بندی الفبایی جواب بهینه بدست می‌آید. در نهایت با ارائه چند مثال، روش ارائه شده را پیاده‌سازی عملی و با روش‌های دیگر مقایسه خواهیم کرد همچنین مطلوبیت روش جدید را از نظر سادگی عملیات و دقت نتایج خواهیم سنجید

عبارات و کلمات کلیدی: برنامه‌ریزی کسری تماما فازی، برنامه‌ریزی خطی چندهدفه، اعداد فازی ذوزنقه‌ای، روش رتبه‌بندی الفبایی.

Email(s): ntaghinezhad@gmail.com.

Mathematics Subject Classification:

۱ مقدمه

برنامه‌ریزی کسری خطی یک تکنیک ریاضی برای رسیدن به جواب بهینه‌ی مطلوب برای فعالیت‌های معلوم است، لذا در مسائل برنامه‌ریزی کسری خطی فرض بر این است تمام پارامترهای مسئله بطور دقیق مشخص شوند. در حالی که مقادیر مشاهده شده در جهان واقعی به دلیل اطلاعات ناقص یا غیرقابل دستیابی نادقیق و مبهم می‌باشند. بهینه‌سازی تحت عدم قطعیت عموماً در سه دیدگاه مورد بررسی قرار می‌گیرد: بهینه‌سازی تصادفی [۳۲]، بهینه‌سازی استوار [۴] و بهینه‌سازی فازی. در بهینه‌سازی تصادفی [۳۲]، پارامترهای نامعین توسط تابع توزیع احتمالی تحت کنترل بوده و مدل به دنبال ارائه راه حلی است که هزینه انتظاری تابع هدف را کمینه سازد. در بسیاری از مسائل کاربردی اطلاعات دقیق راجع به توزیع احتمالی غیرقطعی به راحتی بدست نمی‌آید، که این به علت نبود داده‌های شهودی کامل و گسترده است.

در بهینه‌سازی استوار [۴]، عدم قطعیت با یک مجموعه غیرقطعی نمایش داده می‌شود که عدم قطعیت همه داده‌ها را در بر می‌گیرد. گردایه داده‌های غیرقطعی ممکن است شامل متغیرهای پیوسته یا گسسته باشد. در حالت گسسته، برای هر پارامتر بر اساس تجارب گذشته و مطالعات و امکان‌سنجی صورت‌گرفته چندین عدد مختلف پیشنهاد می‌شود که به هر یک از آنها عنوان سناریو اطلاق شده و در حالت پیوسته هر پارامتر غیرقطعی با یک بازه مشخص تعیین می‌گردد. ایده اولیه در بهینه‌سازی استوار، در نظر گرفتن بدترین سناریوی ممکن و بهینه‌سازی بر اساس بدترین سناریو است. مهم‌ترین کاستی این روش، محتاطانه عمل کردن آن است که باعث اتلاف منابع در عمل می‌شود. به علاوه، بهینه‌سازی تصادفی و بهینه‌سازی استوار به عنوان بخشی از نظریه مجوعه‌های کلاسیک به شمار می‌آیند. این نظریه، از توابع مشخصه برای تعریف تخصیص عناصر استفاده می‌کند و خاصیت

دودویی عناصر را برجسته می‌کند.

به هرحال اغلب مفاهیم در دنیای واقعی غیردقیق (مبهم) هستند و دامنه آنها تنها می‌تواند تقریب زده شود. برنامه‌ریزی تصادفی نمی‌تواند این خاصیت فازی بودن را با یک توزیع احتمال دقیق نمایش دهد و روش‌های بهینه‌سازی استوار بسیار پیچیده هستند. نظریه مجموعه فازی می تواند یک توصیف واضح از عدم قطعیت در داده‌های ورودی (پارامترها، بردار هزینه و ...) داشته باشد. استفاده از اعداد فازی برای پوشش عدم قطعیت داده‌ها بسیار کارآمد می‌باشد. لذا مسئله‌ی برنامه‌ریزی کسری خطی فازی (FLFP) به وجود می‌آید.

پاپ[۱] و مینسن[۲] [۲۷] یک مدل برای حل مسائل برنامه‌ریزی کسری خطی تماما فازی (FFLFP)[۳] با اعداد فازی مثلثی پیشنهاد کردند. لی[۴] و چن[۵] [۲۲] با استفاده از مفهوم و تعریف ریاضی بهینه فازی، فرم کلی برنامه‌ریزی کسری خطی فازی را حل کردند. داس[۶] و همکاران [۹] به توسعه یک الگوریتم کارآمد برای حل مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی تماما فازی پرداختند. برای این منظور، یک روش جدید از ترکیب روش چارنز [۷] و کوپر [۸] و مسئله برنامه‌ریزی خطی چندهدفه بدست آوردند. چین‌دیار[۹] و موتوکومار[۱۰] [۷] استفاده از مقدار (α, r) بهینه قابل قبول را برای یک مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی با ضرایب فازی و متغیرهای تصمیم‌گیری فازی،پیشنهاد دادند و همچنین توسعه یک روش برای حل ارائه کردند. ورامانی[۱۱] و سوماتی[۱۲] [۳۸] یک الگوریتم

---

[1] Pop

[2] Minasian

[3] Fully Fuzzy Linear Fractional Programming

[4] Li

[5] Chen

[6] Dos

[7] Charns

[8] Cooper

[9] Chinnadurai

[10] Muthukumar

[11] Veeramani

[12] Sumathi

جدید برای حل برنامه‌ریزی کسری خطی فازی بیان کردند که متغیرهای انحرافی را حداقل می‌کرد. مهلاوات[۱۳] و کومار[۱۴] [۲۶] با استفاده از یک تابع رتبه‌بندی خطی، روشی برای حل مسائل برنامه‌ریزی کسری خطی فازی ارائه دادند. دلتا[۱۵] و همکاران [۱۲] برنامه‌ریزی کسری خطی فازی تک هدفه را بررسی کردند. رویکرد سری تیلور برای حل برنامه‌ریزی کسری خطی فازی چندهدفه توسط توکساری[۱۶] [۳۶] مورد بررسی قرار گرفت. آریا و همکاران [۳] با استفاده از یک تابع رتبه‌بندی و رویکرد وزن‌دهی، یک الگوریتم جدید برای حل مسائل برنامه‌ریزی کسری خطی فازی چندهدفه ارائه دادند. بورزا[۱۷] و رامبلی[۱۸] [۶] از روش مین-ماکس برای تبدیل یک مسئله برنامه‌ریزی خطی کسری فازی چندهدفه به یک مسئله تک‌هدفه استفاده کردند و نشان دادند جواب بهینه مسئله تک‌هدفه یک جواب کارا برای مسئله چندهدفه است. صفایی [۲۹] روشی را برای حل مسائل برنامه‌ریزی کسری خطی تماما فازی پیشنهاد کرد که مسئله اصلی را به سه مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی با محدودیت‌های متغیر تجزیه می‌کرد سپس جواب بهینه فازی را برای مسئله بدست می‌آورد. ورامانی و همکاران [۳۸] یک روش کارآمد برای حل مسائل برنامه‌ریزی کسری خطی تماما فازی ارائه دادند در این روش، ابتدا توسط آلفا برش‌ها، تابع هدف و محدودیت‌های مسئله به یک مسئله برنامه‌ریزی خطی دوهدفه تبدیل سپس به کمک برنامه‌ریزی چندهدفه حل شدند. ورامانی و همکاران [۳۹] مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی چندهدفه را به یک مسئله برنامه‌ریزی خطی چندهدفه تبدیل و حل کردند. دب[۱۹] [۱۱] ابتدا مسئله برنامه‌ریزی کسری فازی را به مسئله برنامه‌ریزی خطی فازی (FLP) با استفاده

[13] Mehlawat

[14] Kumar

[15] Dutta

[16] Toksari

[17] Borza

[18] Rambely

[19] Deb

از روش چارنز و کوپر تبدیل کرد سپس از رتبه‌بندی برای تبدیل برنامه‌ریزی خطی فازی به مسئله برنامه‌ریزی خطی (LP) استفاده کرد، در نهایت با استفاده از سیمپلکس جواب بهینه را بدست می‌آورد. داس و همکارش [۸] یک رتبه‌بندی برای محاسبه پارامترهای بالا، میانی و پایینی مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی فازی پیشنهاد دادند که با استفاده از آن یک مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی سه هدفه را تشکیل دادند. داس و همکاران [۱۰] مسائل برنامه‌ریزی کسری خطی فازی که در آن پارامترهای تابع هدف اعداد ذوزنقه‌ای فازی و محدودیت‌ها اعداد قطعی هستند را مورد مطالعه قرار دادند و روشی جدید را برای مسئله ارائه دادند. پرامی[20] [۲۸] روش جدیدی برای حل برنامه‌ریزی کسری خطی فازی با اعداد ذوزنقه‌ای بیان کرد که در آن با تبدیل مسئله به برنامه‌ریزی خطی چندهدفه جواب بهینه را بدست آورد. لوگاناتان[21] و گانسان[22] [۲۴] به بررسی مسائلFFLFP پرداختند و روشی با استفاده از پارامترr و ایجاد تبدیل مساوی مسئله را حل کردند. فرنام[23] و درەمیرکی[24] [۱۷] یک رویکرد جدید برای حل مسائل برنامه‌ریزی کسری خطی مبهم متقارن ارائه دادند که در آن از تعمیم نظریه بلمن و زاده استفاده کردند. لوگانتان و گانسان [۲۳] با تبدیل مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی تماما فازی به برنامه‌ریزی خطی و استفاده از یک رتبه‌بندی جدید به حل مسئله پرداختند. یونسی-آبباکی[25] و مولایی[26] [۴۱] مسائل برنامه‌ریزی کسری خطی چندهدفه را با استفاده از روشی مبنی بر جمع وزنی با انجام سه مرحله حل به برنامه‌ریزی کسری قطعی تبدیل و حل کردند. کومار-داس[27]

[20] Pramy
[21] Loganathan
[22] Ganesan
[23] Farnam
[24] Darehmiraki
[25] Younsi-Abbaci
[26] Moulai
[27] Kumar-Das

[۲۱] به ایجاد یک تابع رتبه‌بندی جدید برای حل برنامه‌ریزی کسری خطی تماما فازی که در آن با جایگزین کردن اضلاع غیرموازی عدد فازی ذوزنقه‌ای بدست می‌آید پرداخت. الحربی[28] و خلیفه[29] [۲] با استفاده از تقریب بازه بسته اعداد فازی، یک مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی تماماً فازی را حل کردند. آن‌ها با استفاده از روابط ترتیبی بدست آمده از ترجیحات تصمیم گیرنده، مسئله تک‌هدفه را به یک مسئله چندهدفه تبدیل کرده و ان را حل کردند. بهاتیا[30] و همکاران [۵] از رویکرد مهرا برای حل مسائل برنامه‌ریزی مینیمم جریان کسری خطی فازی استفاده کردند. محمودی‌راد و همکاران [۲۵] مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی فازی را ابتدا به برنامه‌ریزی خطی تبدیل و سپس با بهره‌گیری از بهینگی پارتو مسئله را حل کردند که مزیت روش آنان در استفاده نکردن از رتبه‌بندی است.

با توجه به بررسی‌های انجام شده مشاهده می‌شود که اغلب روش‌های ارائه شده برای حل مسائل برنامه‌ریزی کسری خطی تماماً فازی از پیچیدگی بالایی برخوردار هستند و رتبه‌بندی‌های ارائه شده در برخی از آن‌ها دقیق نیستند [۱۰]. لذا در این مقاله یک رویکرد جدید برای حل مسائل برنامه‌ریزی کسری تماماً فازی ارائه می‌دهیم. این رویکرد با استفاده از روندی ساده و کاربردی می‌تواند جواب‌های بهینه را بدست آورد. در این روش تمام اجزای اعداد فازی مورد بررسی قرار گرفته‌اند و در قیدهای مسئله لحاظ شده‌اند. همچنین مسئله چندهدفه را با روش الفبایی حل می‌کنیم که از نظر پیاده‌سازی ساده است و جواب‌های کارای مسئله چندهدفه را تولید می‌کند [۱۶]. مقایسه مقدار تابع هدف جواب‌های بدست آمده از روش پیشنهادی با نتایج مراجع [۹، ۲۷، ۳۵، ۳۷]، کارایی روش را نسبت به روش‌های موجود نشان می‌دهد.

مقاله به صورت زیرساماندهی شده است: در بخش دوم به شرح تعاریف

[28] Alharbi
[29] Khalifa
[30] Bhatia

اولیه فازی و عملیات حساب فازی می‌پردازیم. در بخش سوم روش جدید حل برنامه‌ریزی کسری خطی تماما فازی ارائه می‌شود. در بخش چهارم با حل چند مثال به بررسی و مقایسه روش جدید می‌پردازیم. در بخش پنجم نتیجه‌گیری کار ارائه می‌گردد.

۲ نظریه مجموعه‌های فازی و روش قاعده الفبایی

در این بخش مفاهیم اولیه اعداد فازی، عملیات حساب فازی و مقایسه اعداد فازی ارائه می‌شود [۱۴، ۱۸، ۱۶، ۲۰].

۱.۲ نظریه مجموعه‌های فازی

تعریف ۱: عدد فازی $A = (a_۱, a_۲, a_۳, a_۴)$ را ذوزنقه‌ای [31] می‌گویند هرگاه تابع عضویت آن به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \frac{x-a_۱}{a_۲-a_۱}, & a_۱ \leq x \leq a_۲ \\ ۱, & a_۲ \leq x \leq a_۳ \\ \frac{a_۴-x}{a_۴-a_۳}, & a_۳ \leq x \leq a_۴ \end{cases} \tag{۱}$$

تعریف ۲: مجموعه تمام اعداد فازی را با E نمایش می‌دهیم و $\tilde{۰} = (۰, ۰, ۰, ۰)$ را به عنوان عدد فازی صفر یا عضو خنثی جمعی E در نظر می‌گیریم.

تعریف ۳: عدد $\tilde{A} = (a_۱, a_۲, a_۳, a_۴)$ را $\tilde{A} \geq ۰$ می‌گوییم هرگاه $a_۱ \geq ۰$ باشد.

تعریف ۴: عملگرها برای اعداد فازی ذوزنقه‌ای $\tilde{A} = (a_۱, a_۲, a_۳, a_۴)$ و

[31] Trapezoidal

$\tilde{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ به‌صورت زیر است:

$$
\begin{aligned}
&\tilde{A} + \tilde{B} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, a_4 + b_4) \\
&\tilde{A} - \tilde{B} = (a_1 - b_4, a_2 - b_3, a_3 - b_2, a_4 - b_1) \\
&k\tilde{A} = \begin{cases} (ka_1, ka_2, ka_3, ka_4), k \geq 0 \\ (ka_4, ka_3, ka_2, ka_1), k < 0 \end{cases} \\
&\tilde{A} \otimes \tilde{B} = (a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3, a_4b_4), \quad \tilde{A} \geq 0, \tilde{B} \geq 0
\end{aligned}
\tag{2}
$$

تعریف ۵: در [۴۰] روش رتبه‌بندی مبنی بر مرکز ثقل برای عدد فازی ذوزنقه‌ای $\tilde{A} = (a, b, c, d)$ بصورت زیر محاسبه می‌شود:

$$
R(\tilde{A}) = \frac{1}{3}\left[a + b + c + d - \frac{cd - ab}{(c + d) - (a + b)}\right] \tag{3}
$$

تعریف ۶: فرض کنید $\tilde{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ و $\tilde{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ دو عدد فازی ذوزنقه‌ای باشند. گوییم $\tilde{A} < \tilde{B}$ اگر و فقط اگر

الف. $a_2 - a_1 > b_2 - b_1$ ، یا

ب. $a_2 - a_1 = b_2 - b_1$ و $a_2 < b_2$ ، یا

ج. $a_2 - a_1 = b_2 - b_1$ ، $a_2 = b_2$ و $a_2 + a_3 < b_2 + b_3$ ، یا

د. $a_2 - a_1 = b_2 - b_1$ ، $a_2 = b_2$, $a_2 + a_3 = b_2 + b_3$ و $a_4 - a_3 < b_4 - b_3$.

۲.۲ روش الفبایی برای حل مسائل چندهدفه

یک مسئله بهینه‌سازی با قاعده الفبایی به صورت زیر تعریف می‌شود [۱۶]:

$$
Lex \max(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_p(x))
$$

$$
x \in X
$$

که در آن $f_1(x), \ldots, f_p(x)$ توابع هدف از $R^n \to R$ و X ناحیه شدنی می‌باشد.
در این نوع بهینه‌سازی، تابع هدف اول بی‌نهایت بار مهم‌تر از تابع هدف دوم است و به همین ترتیب تا آخر این اولویت بندی ادامه دارد.
یادآوری می‌شود که برای $y^1, y^2 \in R^p$ داریم $y^1 <_{Lex} y^2$ ، اگر اولین مولفه غیرصفر $y^2 - y^1$ مثبت باشد.
تعریف ۷: یک نقطه شدنی $\hat{x} \in X$ را بهینه با روش الفبایی گوییم هرگاه برای هر $x \in X$ داشته باشیم $f(x) <_{Lex} f(\hat{x})$.
برای حل یک مسئله بهینه‌سازی به روش الفبایی گام‌های زیر را انجام می‌دهیم.
گام ۱: ابتدا مسئله زیر را حل می‌کنیم.

$$\max f_1(x)$$

$$x \in X$$

فرض کنیم x_1 یک جواب بهینه این مسئله باشد. اگر این جواب منحصر بفرد باشد توقف می‌کنیم، در غیر اینصورت به مرحله بعد می‌رویم.
گام ۲: مسئله بهینه‌سازی زیر را حل می‌کنیم:

$$\max f_2(x)$$

$$f_1(x_1) \leq f_1(x)$$

$$x \in X$$

فرض کنیم x_2 یک جواب بهینه این مسئله باشد. اگر این جواب منحصر بفرد باشد توقف می‌کنیم، در غیر اینصورت به مرحله بعد می‌رویم.

گام ۳: مسئله بهینه‌سازی زیر را حل می‌کنیم:

$$\max f_3(x)$$

$$f_2(x_2) \leq f_2(x)$$

$$f_1(x_1) \leq f_1(x)$$

$$x \in X$$

این روند را تا رسیدن به یک جواب بهینه منحصربفرد یا تمام شدن تمام توابع هدف ادامه می‌دهیم.

۳ روش حل جدید

در این بخش ابتدا مسئله را تعریف و سپس روش حل پیشنهادی ارائه می‌شود.
مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی تماما فازی بصورت زیر است:

$$\begin{aligned} &\max \tilde{z} = \frac{\tilde{c}^t \tilde{x} + \tilde{p}}{\tilde{d}^t \tilde{x} + \tilde{q}} \\ &s.t. \\ &\tilde{A}\tilde{x} \leq \tilde{b} \\ &\tilde{x} \geq 0 \end{aligned} \tag{۴}$$

که در آن $\tilde{x}$، $\tilde{c}$، $\tilde{p}$، $\tilde{d}$، $\tilde{q}$، $\tilde{b}$، $\tilde{A}$ و $\tilde{z}$ اعداد فازی می‌باشند. نخست با استفاده از تبدیل چارنز-کوپر $\tilde{y} = \tilde{t}\tilde{x}$ و $\tilde{t} = (\tilde{d}^t \tilde{x} + \tilde{q})^{-1}$ مسئله را به یک مسئله (FFLP) تبدیل می‌کنیم،

داریم:

$$\begin{aligned}
&\max \tilde{c}^t\tilde{y} + \tilde{p}\tilde{t} \\
&s.t. \\
&\tilde{A}\tilde{y} - \tilde{b}\tilde{t} \le \tilde{0} \\
&\tilde{d}^t\tilde{y} + \tilde{q}\tilde{t} \le \tilde{1} \\
&\tilde{y}, \tilde{t} \ge 0
\end{aligned} \tag{5}$$

با در نظر گرفتن همه پارامترها و متغیرها، $\tilde{y}$، $\tilde{c}$، $\tilde{p}$، $\tilde{d}$، $\tilde{q}$، $\tilde{b}$، $\tilde{A}$ و $\tilde{z}$ با اعداد فازی ذوزنقه‌ای بصورت
$\tilde{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4), \tilde{c^t} = (c_1^t, c_2^t, c_3^t, c_4^t), \tilde{p} = (p_1, p_2, p_3, p_4), \tilde{d^t} = (d_1^t, d_2^t, d_3^t, d_4^t),$
$\tilde{q} = (q_1, q_2, q_3, q_4), \tilde{b} = (b_1, b_2, b_3, b_4), \tilde{a} = (a_1, a_2, a_3, a_4), \tilde{z} = (z_1, z_2, z_3, z_4),$
نشان داده شوند. با توجه به تعریف ۴ ، مسئله (۵) را با استفاده از اعداد فازی ذوزنقه‌ای بازنویسی می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
&\max(z_1, z_2, z_3, z_4) = ((c^ty)_1, (c^ty)_2, (c^ty)_3, (c^ty)_4) + ((pt)_1, (pt)_2, (pt)_3, (pt)_4) \\
&s.t. \\
&(a_1, a_2, a_3, a_4) \otimes (y_1, y_2, y_3, y_4) - ((bt)_1, (bt)_2, (bt)_3, (bt)_4) \le \tilde{0} \\
&((d^ty)_1, (d^ty)_2, (d^ty)_3, (d^ty)_4) + ((qt)_1, (qt)_2, (qt)_3, (qt)_4) \le \tilde{1} \\
&(y_1, y_2, y_3, y_4) \ge 0 \quad (t_1, t_2, t_3, t_4) \ge 0 \\
&y_1 \le y_2 \le y_3 \le y_4 \quad t_1 \le t_2 \le t_3 \le t_4
\end{aligned} \tag{6}$$

روش پیشنهادی برای حل FFLFPP مسئله (۴) بصورت خلاصه زیر می‌باشد:

گام ۱: با توجه به تعاریف حساب فازی، مسئله (۶) را بصورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

(۷)

$$
\begin{aligned}
&\max(z_1, z_2, z_3, z_4) = ((c^t y + pt)_1, (c^t y + pt)_2, (c^t y + pt)_3, (c^t y + pt)_4) \\
&s.t. \\
&((ay)_1, (ay)_2, (ay)_3, (ay)_4) - ((bt)_1, (bt)_2, (bt)_3, (bt)_4) \leq \tilde{0} \\
&((d^t y + qt)_1, (d^t y + qt)_2, (d^t y + qt)_3, (d^t y + qt)_4) \leq \tilde{1} \\
&(y_1, y_2, y_3, y_4) \geq 0 \quad (t_1, t_2, t_3, t_4) \geq 0 \\
&y_1 \leq y_2 \leq y_3 \leq y_4 \quad t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq t_4
\end{aligned}
$$

گام ۲: با اعمال رتبه‌بندی تعریف ۶ داریم:

(۸)

$$
\begin{aligned}
&\max(z_1, z_2, z_3, z_4) = ((c^t y + pt)_1, (c^t y + pt)_2, (c^t y + pt)_3, (c^t y + pt)_4) \\
&s.t. \\
&((ay)_1 - (bt)_1, (ay)_2 - (bt)_2, (ay)_3 - (bt)_3, (ay)_4 - (bt)_4) \leq \tilde{0} \\
&((d^t y + qt)_1, (d^t y + qt)_2, (d^t y + qt)_3, (d^t y + qt)_4) \leq \tilde{1} \\
&(y)_1 \geq 0, (y)_2 - (y)_1 \geq 0, (y)_3 - (y)_2 \geq 0, (y)_4 - (y)_3 \geq 0 \\
&(t)_1 \geq 0, (t)_2 - (t)_1 \geq 0, (t)_3 - (t)_2 \geq 0, (t)_4 - (t)_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

گام ۳: حال با بکارگیری رتبه‌بندی تعریف ۶ برای تابع هدف مسئله ۸ خواهیم داشت:

$$
\begin{aligned}
&\min z_1 = (c^t y + pt)_2 - (c^t y + pt)_1 \\
&\max z_2 = (c^t y + pt)_2 \\
&\max z_3 = (c^t y + pt)_2 + (c^t y + pt)_3 \\
&\max z_4 = (c^t y + pt)_4 - (c^t y + pt)_3 \\
&s.t. \\
&(ay)_1 \leq (bt)_1 \\
&(ay)_2 \leq (bt)_2 \\
&(ay)_3 \leq (bt)_3 \\
&(ay)_4 \leq (bt)_4 \\
&(d^t y + qt)_1 \leq 1 \\
&(d^t y + qt)_2 \leq 1 \\
&(d^t y + qt)_3 \leq 1 \\
&(d^t y + qt)_4 \leq 1 \\
&(y)_1 \geq 0, (y)_2 - (y)_1 \geq 0, (y)_3 - (y)_2 \geq 0, (y)_4 - (y)_3 \geq 0 \\
&(t)_1 \geq 0, (t)_2 - (t)_1 \geq 0, (t)_3 - (t)_2 \geq 0, (t)_4 - (t)_3 \geq 0
\end{aligned}
\tag{9}
$$

اکنون مسئله چندهدفه بالا را با استفاده از روش الفبایی می‌توانیم بصورت مسائل تک هدفه به صورت زیر بررسی کنیم.

گام ۴: تابع هدف را برای z_1 با تمامی شرایط حل می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
&\min z_1 = (c^t y + pt)_2 - (c^t y + pt)_1\\
&s.t.\\
&(ay)_1 \le (bt)_1\\
&(ay)_2 \le (bt)_2\\
&(ay)_3 \le (bt)_3\\
&(ay)_4 \le (bt)_4\\
&(d^t y + qt)_1 \le 1\\
&(d^t y + qt)_2 \le 1\\
&(d^t y + qt)_3 \le 1\\
&(d^t y + qt)_4 \le 1\\
&(y)_1 \ge 0\\
&(y)_2 - (y)_1 \ge 0\\
&(y)_3 - (y)_2 \ge 0\\
&(y)_4 - (y)_3 \ge 0\\
&(t)_1 \ge 0\\
&(t)_2 - (t)_1 \ge 0\\
&(t)_3 - (t)_2 \ge 0\\
&(t)_4 - (t)_3 \ge 0
\end{aligned} \tag{10}$$

اگر این مسئله دارای جواب بهینه منحصربفرد باشد توقف می‌کنیم، در غیر اینصورت به گام بعدی می‌رویم.

گام ۵: فرض کنید z_1^* جواب بهینه مسئله (۱۰) باشد، در این مرحله با توجه به روش الفبایی جواب بهینه بدست آمده از مرحله قبل را به عنوان قید به قیود مسئله (۱۰) اضافه

می‌کنیم و تابع هدف z_2 را حل می‌کنیم:

$$
\begin{aligned}
&\max z_2 = (c^t y + pt)_2 \\
&s.t. \\
&(c^t y + pt)_2 - (c^t y + pt)_1 = z_1^* \\
&(ay)_1 \leq (bt)_1 \\
&(ay)_2 \leq (bt)_2 \\
&(ay)_3 \leq (bt)_3 \\
&(ay)_4 \leq (bt)_4 \\
&(d^t y + qt)_1 \leq 1 \\
&(d^t y + qt)_2 \leq 1 \\
&(d^t y + qt)_3 \leq 1 \\
&(d^t y + qt)_4 \leq 1 \\
&(y)_1 \geq 0 \\
&(y)_2 - (y)_1 \geq 0 \\
&(y)_3 - (y)_2 \geq 0 \\
&(y)_4 - (y)_3 \geq 0 \\
&(t)_1 \geq 0 \\
&(t)_2 - (t)_1 \geq 0 \\
&(t)_3 - (t)_2 \geq 0 \\
&(t)_4 - (t)_3 \geq 0
\end{aligned}
\tag{11}
$$

اگر این مسئله دارای جواب بهینه منحصربفرد باشد توقف می‌کنیم، در غیر اینصورت به گام بعدی می‌رویم.

گام ۶: فرض کنید z_2^* جواب بهینه مسئله (۱۱) باشد، در این مرحله با توجه به روش

الفبایی جواب بهینه بدست آمده از مرحله قبل را به عنوان قید به قیود مسئله (۱۱) اضافه می‌کنیم و تابع هدف z_3 را حل می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
&\max z_3 = (c^t y + pt)_2 + (c^t y + pt)_3 \\
&s.t. \\
&(c^t y + pt)_2 = z_2^* \\
&(c^t y + pt)_2 - (c^t y + pt)_1 = z_1^* \\
&(ay)_1 \le (bt)_1 \\
&(ay)_2 \le (bt)_2 \\
&(ay)_3 \le (bt)_3 \\
&(ay)_4 \le (bt)_4 \\
&(d^t y + qt)_1 \le 1 \\
&(d^t y + qt)_2 \le 1 \\
&(d^t y + qt)_3 \le 1 \\
&(d^t y + qt)_4 \le 1 \\
&(y)_1 \ge 0 \\
&(y)_2 - (y)_1 \ge 0 \\
&(y)_3 - (y)_2 \ge 0 \\
&(y)_4 - (y)_3 \ge 0 \\
&(t)_1 \ge 0 \\
&(t)_2 - (t)_1 \ge 0 \\
&(t)_3 - (t)_2 \ge 0 \\
&(t)_4 - (t)_3 \ge 0
\end{aligned} \tag{12}$$

گام ۷: فرض کنید z_3^* جواب بهینه مسئله (۱۲) باشد، در این مرحله با توجه به روش

الفبایی جواب بهینه بدست آمده از مرحله قبل را به عنوان قید به قیود مسئله (۱۲) اضافه می‌کنیم و تابع هدف $z_۴$ را حل می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
&\max z_۴ = (c^t y + pt)_۴ - (c^t y + pt)_۳ \\
&s.t. \\
&(c^t y + pt)_۲ + (c^t y + pt)_۳ = z^*_۳ \\
&(c^t y + pt)_۲ = z^*_۲ \\
&(c^t y + pt)_۲ - (c^t y + pt)_۱ = z^*_۱ \\
&(ay)_۱ \leq (bt)_۱ \\
&(ay)_۲ \leq (bt)_۲ \\
&(ay)_۳ \leq (bt)_۳ \\
&(ay)_۴ \leq (bt)_۴ \\
&(d^t y + qt)_۱ \leq ۱ \\
&(d^t y + qt)_۲ \leq ۱ \\
&(d^t y + qt)_۳ \leq ۱ \\
&(d^t y + qt)_۴ \leq ۱ \\
&(y)_۱ \geq ۰ \\
&(y)_۲ - (y)_۱ \geq ۰ \\
&(y)_۳ - (y)_۲ \geq ۰ \\
&(y)_۴ - (y)_۳ \geq ۰ \\
&(t)_۱ \geq ۰ \\
&(t)_۲ - (t)_۱ \geq ۰ \\
&(t)_۳ - (t)_۲ \geq ۰ \\
&(t)_۴ - (t)_۳ \geq ۰
\end{aligned} \tag{۱۳}$$

جواب بهینه یکتا بدست آمده برای (۱۳) همان جواب بهینه مسئله (۷) می‌باشد. **تذکر۱:** اگر $\tilde{y}^* = ((y^*)_1, (y^*)_2, (y^*)_3, (y^*)_4)$، جواب بهینه (۵) یکتا باشد شرایط زیر را داریم:

۱) $\tilde{A}\tilde{y}^* = \tilde{b}$؛

۲) برای $\tilde{y} = ((y)_1, (y)_2, (y)_3, (y)_4)$ داریم، $\tilde{c}^t\tilde{y} + \tilde{p}\tilde{t} \leq \tilde{c}^t\tilde{y}^* + \tilde{p}\tilde{t}$ (برای مسئله مینیمم‌سازی $\tilde{c}^t\tilde{y} + \tilde{p}\tilde{t} \geq \tilde{c}^t\tilde{y}^* + \tilde{p}\tilde{t}$).

تذکر۲: فرض کنید $\tilde{y}^*$ جواب بهینه مسئله (۵) باشد. در صورتی y' جواب بهینه مسئله (۶) باشد، آن‌گاه رابطه‌ی $\tilde{c}^t\tilde{y}' + \tilde{p}\tilde{t} = \tilde{c}^t\tilde{y}^* + \tilde{p}\tilde{t}$ برقرار است.

در قضیه زیر رابطه بین جواب‌های بهینه مسائل (۱۰)-(۱۳) و مسئله بهینه‌سازی (۷) را بیان می‌کنیم. نشان می‌دهیم جواب بهینه مسائل (۱۰)-(۱۳) یک جواب بهینه دقیق برای مسئله (۷) و لذا مسئله برنامه‌ریزی کسری (۴) است.

قضیه ۱. فرض کنید $(\tilde{y}^*, \tilde{t}^*) = (y_1^*, y_2^*, y_3^*, y_4^*, t_1^*, t_2^*, t_3^*, t_4^*)$ یک جواب بهینه برای مسائل (۱۰)-(۱۳) باشد، آن‌گاه $(\tilde{y}^*, \tilde{t}^*)$ جواب بهینه دقیق مسئله (۷) است.

برهان. با برهان خلف، فرض کنید $(\tilde{y}^*, \tilde{t}^*) = (y_1^*, y_2^*, y_3^*, y_4^*, t_1^*, t_2^*, t_3^*, t_4^*)$ یک جواب بهینه برای مسائل (۱۰)-(۱۳) باشد اما جواب بهینه دقیق مسئله (۷) نباشد. لذا یک جواب شدنی
$(\tilde{y}^r, \tilde{t}^r) = (y_1^r, y_2^r, y_3^r, y_4^r, t_1^r, t_2^r, t_3^r, t_4^r)$ برای مسئله (۷) وجود دارد به طوریکه:

$$(c^ty_1^*+pt_1^*, c^ty_2^*+pt_2^*, c^ty_3^*+pt_3^*, c^ty_4^*+pt_4^*) < (c^ty_1^r+pt_1^r, c^ty_2^r+pt_2^r, c^ty_3^r+pt_3^r, c^ty_4^r+pt_4^r)$$

بنا به تعریف ۶، یکی از چهار حالت زیر اتفاق می‌افتد.

حالت اول. اگر بنا به قسمت الف تعریف ۶، داشته باشیم
$(c^ty_2^r + pt_2^r) - (c^ty_1^r + pt_1^r) < (c^ty_2^* + pt_2^*) - (c^ty_1^* + pt_1^*)$ با توجه اینکه $(\tilde{y}^r, \tilde{t}^r)$ یک جواب شدنی برای مسئله (۷) است و ناحیه شدنی مسئله (۷) و (۱۰) یکسان است، لذا در تمام قیود مسئله (۱۰) نیز صدق می‌کند و در نتیجه برای این مسئله نیز شدنی است. به هر حال از رابطه $(c^ty_2^r + pt_2^r) - (c^ty_1^r + pt_1^r) < (c^ty_2^* + pt_2^*) - (c^ty_1^* + pt_1^*)$ نتیجه می‌گیریم $(\tilde{y}^*, \tilde{t}^*)$ جواب بهینه مسئله مینیمم‌سازی (۱۰) نیست و این یک تناقض است.

حالت دوم. اگر بنا به قسمت ب تعریف ۶، داشته باشیم

$(c^ty^r_2+pt^r_2)-(c^ty^r_1+pt^r_1)=(c^ty^*_2+pt^*_2)-(c^ty^*_1+pt^*_1)$ و $(c^ty^*_2+pt^*_2)<(c^ty^r_2+pt^r_2)$. در این حالت چون $(c^ty^*_2+pt^*_2)-(c^ty^*_1+pt^*_1)=z^*_1$، لذا $(c^ty^r_2+pt^r_2)-(c^ty^r_1+pt^r_1)=z^*_1$. در نتیجه $(\tilde{y}^r,\tilde{t}^r)$ در تمام قیود مسئله (۱۱) صدق می‌کند و یک جواب شدنی برای این مسئله است. به‌علاوه، از رابطه $(c^ty^*_2+pt^*_2)<(c^ty^r_2+pt^r_2)$ نتیجه می‌گیریم که $(\tilde{y}^*,\tilde{t}^*)$ یک جواب بهینه برای مسئله (۱۱) نیست و این یک تناقض است.

حالت ۳. اگر بنا به قسمت ج تعریف ۶ داشته باشیم

$(c^ty^r_2+pt^r_2)-(c^ty^r_1+pt^r_1)=(c^ty^*_2+pt^*_2)-(c^ty^*_1+pt^*_1)$، $(c^ty^*_2+pt^*_2)=(c^ty^r_2+pt^r_2)$

و $(c^ty^r_2+pt^r_2)+(c^ty^r_3+pt^r_3)>(c^ty^*_2+pt^*_2)+(c^ty^*_3+pt^*_3)$. در این حالت از $(c^ty^*_2+pt^*_2)-(c^ty^*_1+pt^*_1)=z^*_1$ و $(c^ty^*_2+pt^*_2)=z^*_2$ نتیجه می‌گیریم $(c^ty^r_2+pt^r_2)-(c^ty^r_1+pt^r_1)=z^*_1$ و $(c^ty^r_2+pt^r_2)=z^*_2$ در نتیجه $(\tilde{y}^r,\tilde{t}^r)$ در تمام قیود مسئله (۱۲) صدق می‌کند و یک جواب شدنی برای این مسئله است. به‌علاوه، از رابطه

$(c^ty^r_2+pt^r_2)+(c^ty^r_3+pt^r_3)>(c^ty^*_2+pt^*_2)+(c^ty^*_3+pt^*_3)$ نتیجه می‌گیریم که $(\tilde{y}^*,\tilde{t}^*)$ یک جواب بهینه برای مسئله ماکزیمم‌سازی (۱۲) نیست و این یک تناقض است.

حالت ۴. اگر بنا به قسمت د تعریف ۶ داشته باشیم

$(c^ty^r_2+pt^r_2)-(c^ty^r_1+pt^r_1)=(c^ty^*_2+pt^*_2)-(c^ty^*_1+pt^*_1)$، $(c^ty^*_2+pt^*_2)=(c^ty^r_2+pt^r_2)$، $(c^ty^r_2+pt^r_2)+(c^ty^r_3+pt^r_3)=(c^ty^*_2+pt^*_2)+(c^ty^*_3+pt^*_3)$ و $(c^ty^r_4+pt^r_4)-(c^ty^r_3+pt^r_3)>(c^ty^*_4+pt^*_4)-(c^ty^*_3+pt^*_3)$. در این حالت مشابه حالت‌های قبلی می توان نشان داد که $(\tilde{y}^r,\tilde{t}^r)$ یک جواب شدنی برای مسئله (۱۳) است. از طرفی رابطه

$(c^ty^r_4+pt^r_4)-(c^ty^r_3+pt^r_3)>(c^ty^*_4+pt^*_4)-(c^ty^*_3+pt^*_3)$ نتیجه می‌دهد که $(\tilde{y}^*,\tilde{t}^*)$ یک جواب بهینه برای مسئله ماکزیمم‌سازی (۱۳) نیست و این یک تناقض است.

بنابراین با بررسی حالت‌های فوق نتیجه می‌گیریم $(\tilde{y}^*,\tilde{t}^*)$ یک جواب

بهینه دقیق برای مسئله (۷) است.

۴ پیچیدگی محاسباتی روش پیشنهادی:

همانگونه که مشاهده شد، برای حل مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی تماماً فازی (۴)، بعد از تبدیلات انجام شده، تعدادی مسئله برنامه‌ریزی خطی قطعی شامل مسائل (۱۰) - (۱۳) را باید حل کنیم. پیچیدگی محاسباتی این مسائل LP مستقیما به تعداد متغیرها و محدودیت‌های آنها وابسته است. در واقع اگر بخواهیم هر یک از این مسائل برنامه‌ریزی خطی را از روشی مانند سیمپلکس حل کنیم، نیاز است که ماتریس پایه (یا معکوس آن) را ذخیره کنیم که اندازه حافظه مورد نیاز برای ذخیره ماتریس پایه برابر مربع تعداد محدودیت‌ها است [۱۵]. اکنون تعداد متغیرها و محدودیت‌های مسائل برنامه ریزی خطی (۱۰) - (۱۳) را بررسی می‌کنیم. فرض کنید مسئله برنامه‌ریزی خطی کسری تماماً فازی (۴) دارای n متغیر فازی $\tilde{x}_۱, \tilde{x}_۲, \ldots, \tilde{x}_n$ و m محدودیت به فرم $\tilde{A}\tilde{x} \leq \tilde{b}$ باشد. با توجه به تبدیلات انجام شده، مسئله برنامه‌ریزی خطی تماماً فازی (۵) دارای n+1 متغیر فازی و m+1 محدودیت است. با توجه به اینکه متغیرهای فازی بصورت اعداد فازی ذوزنقه‌ای در نظر گرفته شده اند، بعد از اعمال رتبه‌بندی به مسئله برنامه خطی چندهدفه (۹) می‌رسیم که دارای 4n+4 متغیر قطعی (بدون در نظر گرفتن متغیرهای کمکی) است. به‌علاوه، این مسئله دارای حداکثر 4m+4 محدودیت قطعی متناظر با محدودیت $\tilde{A}\tilde{x} \leq \tilde{b}$ و 4n+4 محدودیت قطعی متناظر با $\tilde{x}_i \geq ۰$ است. بنابراین، مسئله برنامه‌ریزی خطی (۱۰) تعداد 4n+4 متغیر و 4(n+m)+8 محدودیت می‌باشد. همچنین، تعداد متغیرهای مسئله (۱۱) با تعداد متغیرهای مسئله (۱۰) برابر است و تعداد محدودیت‌های آن یک عدد از محدودیت‌های مسئله (۱۰) بیشتر است. به همین ترتیب مسائل (۱۲) و (۱۳) ، به ترتیب دارای حداکثر 4(n+m)+10 و 4(n+m)+11 محدودیت می‌باشند. همان‌گونه که مشاهده می‌شود برای حل یک مسئله برنامه‌ریزی خطی کسری تماماً فازی با روش پیشنهاد شده، تعداد متغیرها و محدودیت‌ها افزایش زیادی ندارد و علی الخصوص برای مسائل کاربردی که اغلب تنک هستند این افزایش‌ها تاثیر زیادی در زمان حل مسئله ندارند. به‌علاوه، استفاده از α-برش‌ها برای حل یک مسئله برنامه‌ریزی خطی کسری تماماً فازی ممکن

است منجر به تبدیل مسئله به یک مسئله برنامه‌ریزی خطی نیمه-نامتناهی می‌شود که حل آن بسیار مشکل خواهد بود و روش پیشنهادی این محدودیت‌ها را از بین برده است.

۵ مثال‌های عددی

در این بخش به منظور پیاده‌سازی عمل و مقایسه روش پیشنهادی چند مثال را حل و با روش‌های دیگر مقایسه خواهیم کرد.

مثال ۱: مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی تماما فازی زیر را در نظر بگیرید:

$$\max \tilde{z} = \frac{(۰, ۰/۵, ۱/۵, ۲)\tilde{x_۱} - (۰, ۰/۵, ۱/۵, ۲)\tilde{x_۲} + (۰, ۰/۵, ۱/۵, ۲)}{(۰, ۰/۵, ۱/۵, ۲)\tilde{x_۱} + (۰, ۰/۵, ۱/۵, ۲)\tilde{x_۲} + (۱, ۱/۵, ۲/۵, ۳)}$$

$$s.t.$$

$$(۰, ۰/۵, ۱/۵, ۲)\tilde{x_۱} + (۰, ۰/۵, ۱/۵, ۲)\tilde{x_۲} \leq (۱, ۱/۵, ۲/۵, ۳)$$

$$(۰, ۰/۵, ۱/۵, ۲)\tilde{x_۱} - (۰, ۰/۵, ۱/۵, ۲)\tilde{x_۲} \leq (۰, ۰/۵, ۱/۵, ۲)$$

$$\tilde{x_۱}, \tilde{x_۲} \geq ۰$$

بر اساس گام ۱ داریم:

$$\max \tilde{z} = \frac{\begin{pmatrix} (۰, ۰/۵, ۱/۵, ۲) \otimes ((x_۱)_۱, (x_۱)_۲, (x_۱)_۳, (x_۱)_۴) - \\ (۰, ۰/۵, ۱/۵, ۲) \otimes ((x_۲)_۱, (x_۲)_۲, (x_۲)_۳, (x_۲)_۴) + (۰, ۰/۵, ۱/۵, ۲) \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} (۰, ۰/۵, ۱/۵, ۲) \otimes ((x_۱)_۱, (x_۱)_۲, (x_۱)_۳, (x_۱)_۴) + \\ (۰, ۰/۵, ۱/۵, ۲) \otimes ((x_۲)_۱, (x_۲)_۲, (x_۲)_۳, (x_۲)_۴) + (۱, ۱/۵, ۲/۵, ۳) \end{pmatrix}}$$

$$s.t.$$

$$\begin{matrix} (۰, ۰/۵, ۱/۵, ۲) \otimes ((x_۱)_۱, (x_۱)_۲, (x_۱)_۳, (x_۱)_۴) \\ +(۰, ۰/۵, ۱/۵, ۲) \otimes ((x_۲)_۱, (x_۲)_۲, (x_۲)_۳, (x_۲)_۴) \end{matrix} \leq (۱, ۱/۵, ۲/۵, ۳)$$

$$\begin{matrix} (۰, ۰/۵, ۱/۵, ۲) \otimes ((x_۱)_۱, (x_۱)_۲, (x_۱)_۳, (x_۱)_۴) \\ -(۰, ۰/۵, ۱/۵, ۲) \otimes ((x_۲)_۱, (x_۲)_۲, (x_۲)_۳, (x_۲)_۴) \end{matrix} \leq (۰, ۰/۵, ۱/۵, ۲)$$

$$(x_۱)_۱, (x_۱)_۲, (x_۱)_۳, (x_۱)_۴, (x_۲)_۱, (x_۲)_۲, (x_۲)_۳, (x_۲)_۴ \geq ۰$$

طبق گام ۲ داریم:

$$\max \tilde{z}=(-2(y_2)_4, 0.5(y_1)_2-1.5(y_2)_3+0.5t_2, 1.5(y_1)_3-0.5(y_2)_2+1.5t_3, 2(y_1)_4+2t_4) \tag{14}$$

$$
\begin{aligned}
& s.t. \\
& 0.5(y_1)_2+0.5(y_2)_2 \leq 1.5t_2 \\
& 1.5(y_1)_3+1.5(y_2)_3 \leq 2.5t_3 \\
& 2(y_1)_4+2(y_2)_4 \leq 3t_4 \\
& -2(y_2)_4 \leq 0 \\
& 0.5(y_1)_2-1.5(y_2)_3 \leq 0.5t_2 \\
& 1.5(y_1)_3-0.5(y_2)_2 \leq 1.5t_3 \\
& 2(y_1)_4 \leq 2t_4 \\
& t_1 \leq 1 \\
& 0.5(y_1)_2+0.5(y_2)_2+1.5t_2 \leq 1 \\
& 1.5(y_1)_3+1.5(y_2)_3+2.5t_3 \leq 1 \\
& 2(y_1)_4+2(y_2)_4+3t_4 \leq 1 \\
& (y_1)_1 \geq 0, (y_1)_2-(y_1)_1 \geq 0, (y_1)_3-(y_1)_2 \geq 0, (y_1)_4-(y_1)_3 \geq 0 \\
& (y_2)_1 \geq 0, (y_2)_2-(y_2)_1 \geq 0, (y_2)_3-(y_2)_2 \geq 0, (y_2)_4-(y_2)_3 \geq 0 \\
& t_1 \geq 0, t_2-t_1 \geq 0, t_3-t_2 \geq 0, t_4-t_3 \geq 0.
\end{aligned}
$$

گام ۳ ایجاب می‌کند:

$$
\begin{aligned}
& \min z_1 = 0.5(y_1)_2-1.5(y_2)_3+0.5t_2-(-2(y_2)_4) \\
& \max z_2 = 0.5(y_1)_2-1.5(y_2)_3+0.5t_2 \\
& \max z_3 = 0.5(y_1)_2-1.5(y_2)_3+0.5t_2+1.5(y_1)_3-0.5(y_2)_2+1.5t_3 \\
& \max z_4 = (y_1)_4+2t_4-(1.5(y_1)_3-0.5(y_2)_2+1.5t_3) \\
& s.t. \\
& Constraints \quad of \quad problem \quad (14)
\end{aligned}
$$

براساس گام ۴ مسئله‌ی زیر باید حل شود تا $z_۱^*$ بدست آید:

$$\begin{aligned}&\min z_۱ = ۰/۵(y_۱)_۲ - ۱/۵(y_۲)_۳ + ۰/۵t_۲ + ۲(y_۲)_۴\\&s.t.\\&Constraints \quad of \quad problem \quad (۱۴)\end{aligned}$$

که جواب بهینه آن $z_۱^* = ۰$ می‌باشد سپس به گام بعد می‌رویم.

$$\begin{aligned}&\max z_۲ = ۰/۵(y_۱)_۲ - ۱/۵(y_۲)_۳ + ۰/۵t_۲\\&s.t.\\&۰/۵(y_۱)_۲ - ۱/۵(y_۲)_۳ + ۰/۵t_۲ + ۲(y_۲)_۴ = ۰\\&Constraints \quad of \quad problem \quad (۱۴)\end{aligned}$$

که جواب بهینه آن $z_۲^* = ۰$ می‌باشد پس به گام بعد می‌رویم.

$$\begin{aligned}&\max z_۳ = ۰/۵(y_۱)_۲ - ۱/۵(y_۲)_۳ + ۰/۵t_۲ + ۱/۵(y_۱)_۳ - ۰/۵(y_۲)_۲ + ۱/۵t_۳\\&s.t.\\&۰/۵(y_۱)_۲ - ۱/۵(y_۲)_۳ + ۰/۵t_۲ = ۰\\&۰/۵(y_۱)_۲ - ۱/۵(y_۲)_۳ + ۰/۵t_۲ + ۲(y_۲)_۴ = ۰\\&Constraints \quad of \quad problem \quad (۱۴)\end{aligned}$$

و جواب بهینه مسئله فوق $z_3^* = 0/6$ می‌باشد به گام بعد می‌رویم.

$$\begin{aligned}
&\max z_4 = (y_1)_4 + 2t_4 - (1/5(y_1)_3 - 0/5(y_2)_2 + 1/5t_3)\\
&s.t.\\
&0/5(y_1)_2 - 1/5(y_2)_3 + 0/5t_2 + 1/5(y_1)_3 - 0/5(y_2)_2 + 1/5t_3 = 0/6\\
&0/5(y_1)_2 - 1/5(y_2)_3 + 0/5t_2 = 0\\
&0/5(y_1)_2 - 1/5(y_2)_3 + 0/5t_2 + 2(y_2)_4 = 0\\
&Constraints \quad of \quad problem \quad (14)
\end{aligned}$$

جواب‌های بهینه مسئله (۱۴) بصورت زیر می‌باشد:

$$\tilde{y}_1^* = \{(y_1^*)_1, (y_1^*)_2, (y_1^*)_3, (y_1^*)_4\} = (0, 0, 0/2, 0/2)$$

$$\tilde{y}_2^* = \{(y_2^*)_1, (y_2^*)_2, (y_2^*)_3, (y_2^*)_4\} = (0, 0, 0, 0)$$

$$t^* = \{(t_1, t_2, t_3, t_4)\} = (0, 0, 0/2, 0/2)$$

در نتیجه جواب بهینه مسئله اصلی برابر است با:

$$\tilde{x}_1^* = \{(x_1^*)_1, (x_1^*)_2, (x_1^*)_3, (x_1^*)_4\} = (0, 0, 1, 1)$$

$$\tilde{x}_2^* = \{(x_2^*)_1, (x_2^*)_2, (x_2^*)_3, (x_2^*)_4\} = (0, 0, 0, 0)$$

$$\tilde{z}^* = \{(z^*)_1, (z^*)_2, (z^*)_3, (z^*)_4\} = (0, 0, 0/6, 0/8)$$

همانطور که مشخص است پیاده سازی روش جدید بسیار ساده است.

اکنون با توجه به جواب بهینه بدست آمده به مقایسه آن با چند روش دیگر با توجه به تعریف ۶ می‌پردازیم:

$(۰, ۰, ۰, ۱/۶)$ جواب بهینه داس و همکارانش [۹] است. بنابراین:

$$۰ = (z_۲ - z_۱) proposedmethod = ۰ = (z_۲ - z_۱) method[۹]$$

بنایراین جواب بهینه روش پیشنهادی برابر با روش ارائه شده داس و همکارانش [۹] می باشد.

$(۰/۸, ۰/۶, ۰/۶, -۰/۲-)$ جواب بهینه پاپ و مینسن [۲۷] است. بنابراین:

$$۰ = (z_۲ - z_۱) proposedmethod < ۰/۸ = (z_۲ - z_۱) method[۲۷]$$

بنایراین جواب بهینه روش پیشنهادی بهتر از روش ارائه شده پاپ و مینسن [۲۷] می‌باشد.

$(۱, ۰/۵, ۰/۵, ۰)$ جواب بهینه استانوویچ و مینسن [۳۵] است. بنابراین

$$۰ = (z_۲ - z_۱) proposedmethod < ۰/۵ = (z_۲ - z_۱) method[۲۷]$$

بنایراین جواب بهینه روش پیشنهادی بهتر از روش ارائه شده استانوویچ و مینسن [۳۵] می‌باشد.

لذا همانطور که مشاهده شد روش پیشنهادی از مطلوبت بیشتری برخوردار است.

مثال ۲: (برنامه‌ریزی تولید): یک شرکت تولید کننده لبنیات سه محصول شیر، ماست و پنیر تولید می‌کند و قصد تأمین تقاضای چهار مرکز توزیع در گرگان، ساری، سمنان و رشت را دارد. جدول ۱ منابع احتمالی موجود از سه فرآورده را ارائه می‌دهد و تقاضای پیش بینی شده از چهار مرکز توزیع در جدول ۲ نشان داده شده است. مدیریت شرکت قصد دارد سود شرکت را حداکثر کند.

جدول ۱: *فرآورده‌های لبنی*

محصول	عرضه ده‌هزار واحد
شیر	$(۷/۲, ۸, ۸/۸, ۹/۶)$
ماست	$(۱۲, ۱۴, ۱۶, ۱۸)$
پنیر	$(۱۰/۲, ۱۲, ۱۳/۸, ۱۵/۶)$

جدول ۲: *مجموع تقاضای مقصد*

مقصد	تقاضا ده هزار واحد
گرگان	$(۶/۲, ۷, ۷/۸, ۸/۶)$
ساری	$(۸/۹, ۱۰, ۱۱/۱, ۱۲/۲)$
سمنان	$(۶/۵, ۸, ۹/۵, ۱۱)$
رشت	$(۷/۸, ۹, ۱۰/۲, ۱۱/۴)$

$$\max \tilde{z} = \frac{\left\{\begin{array}{c} (۸, ۱۰, ۱۰/۸, ۱۲/۸)\tilde{x}_{۱۱} + (۲۰/۴, ۲۲, ۲۴, ۲۵/۶)\tilde{x}_{۱۲}+ \\ (۸, ۱۰, ۱۰/۶, ۱۲/۶)\tilde{x}_{۱۳} + (۱۸/۸, ۲۰, ۲۲, ۲۳/۲)\tilde{x}_{۱۴}+ \\ (۱۴, ۱۵, ۱۶, ۱۷)\tilde{x}_{۲۱} + (۱۸/۲, ۲۰, ۲۲, ۲۳/۸)\tilde{x}_{۲۲}+ \\ (۱۰, ۱۲, ۱۳, ۱۵)\tilde{x}_{۲۳} + (۶, ۸, ۸/۸, ۱۰/۸)\tilde{x}_{۲۴}+ \\ (۱۸/۴, ۲۰, ۲۱, ۲۲/۶)\tilde{x}_{۳۱} + (۹/۶, ۱۲, ۱۳, ۱۵/۴)\tilde{x}_{۳۲}+ \\ (۷/۸, ۱۰, ۱۰/۸, ۱۳/۶)\tilde{x}_{۳۳} + (۱۴, ۱۵, ۱۶, ۱۷)\tilde{x}_{۳۴} \end{array}\right\}}{\left\{\begin{array}{c} (۱/۵, ۲, ۲/۵, ۳)\tilde{x}_{۱۱} + (۴, ۵, ۶, ۷)\tilde{x}_{۱۲} + (۱/۳, ۲, ۲/۵, ۳/۲)\tilde{x}_{۱۳}+ \\ (۳, ۴, ۵, ۶)\tilde{x}_{۱۴} + (۲/۵, ۳, ۴, ۴/۵)\tilde{x}_{۲۱} + (۲, ۳, ۴, ۵)\tilde{x}_{۲۲}+ \\ (۲/۳, ۳, ۴, ۴/۷)\tilde{x}_{۲۳} + (۱/۵, ۲, ۲/۵, ۳)\tilde{x}_{۲۴} + (۳, ۴, ۵, ۶)\tilde{x}_{۳۱}+ \\ (۲, ۳, ۴, ۵)\tilde{x}_{۳۲} + (۱/۵, ۲, ۲/۷, ۳/۲)\tilde{x}_{۳۳} + (۲, ۳, ۴, ۵)\tilde{x}_{۳۴} \end{array}\right\}}$$

$s.t.$

$$\tilde{x}_{۱۱} + \tilde{x}_{۱۲} + \tilde{x}_{۱۳} + \tilde{x}_{۱۴} \leq (۷/۲, ۸, ۸/۸, ۸/۶)$$

$$\tilde{x}_{۲۱} + \tilde{x}_{۲۲} + \tilde{x}_{۲۳} + \tilde{x}_{۲۴} \leq (۱۲, ۱۴, ۱۶, ۱۸)$$

$$\tilde{x}_{۳۱} + \tilde{x}_{۳۲} + \tilde{x}_{۳۳} + \tilde{x}_{۳۴} \leq (۱۰/۲, ۱۲, ۱۳/۸, ۱۵/۶)$$

$$\tilde{x}_{۱۱} + \tilde{x}_{۲۱} + \tilde{x}_{۳۱} \geq (۶/۲, ۷, ۷/۸, ۸/۶)$$

$$\tilde{x}_{۱۲} + \tilde{x}_{۲۲} + \tilde{x}_{۳۲} \geq (۸/۹, ۱۰, ۱۱/۱, ۱۲/۲)$$

$$\tilde{x}_{۱۳} + \tilde{x}_{۲۳} + \tilde{x}_{۳۳} \geq (۶/۵, ۸, ۹/۵, ۱۱)$$

$$\tilde{x}_{۱۴} + \tilde{x}_{۲۴} + \tilde{x}_{۳۴} \geq (۷/۸, ۹, ۱۰/۲, ۱۱/۴)$$

$$\tilde{x}_{ij} \geq ۰, \tilde{x}_{ij} = (x^{۱}_{ij}, x^{۲}_{ij}, x^{۳}_{ij}), i = ۱, ۲, ۳, j = ۱, ۲, ۳, ۴.$$

جدول ۳: *تقاضای محصولات مقصد*

محصول	شیر	ماست	پنیر
گرگان	(۸, ۱۰, ۱۰٫۸, ۱۲٫۸)	(۱۴, ۱۵, ۱۶, ۱۷)	(۱۸٫۴, ۲۰, ۲۱, ۲۲٫۶)
ساری	(۲۰٫۴, ۲۲, ۲۴, ۲۵٫۶)	(۱۸٫۲, ۲۰, ۲۲, ۲۳٫۸)	(۹٫۶, ۱۲, ۱۳, ۱۵٫۴)
سمنان	(۸, ۱۰, ۱۰٫۶, ۱۲٫۶)	(۱۰, ۱۲, ۱۳, ۱۵)	(۷٫۸, ۱۰, ۱۰٫۸, ۱۳٫۶)
رشت	(۸٫۸, ۲۰, ۲۲, ۲۳٫۲)	(۶, ۸, ۸٫۸, ۱۰٫۸)	(۱۴, ۱۵, ۱۶, ۱۷)

جدول ۴: *هزینه حمل‌ونقل*

محصول	گرگان	ساری	سمنان	رشت
شیر	(۱٫۵, ۲, ۲٫۵, ۳)	(۴, ۵, ۶, ۷)	(۱٫۳, ۲, ۲٫۵, ۳٫۲)	(۳, ۴, ۵, ۶)
ماست	(۲٫۵, ۳, ۴, ۴٫۵)	(۲, ۳, ۴, ۵)	(۲٫۳, ۳, ۴, ۴٫۷)	(۱٫۵, ۲, ۲٫۵, ۳)
پنیر	(۳, ۴, ۵, ۶)	(۲, ۳, ۴, ۵)	(۱٫۵, ۲, ۲٫۷, ۳٫۲)	(۲, ۳, ۴, ۵)

با حل مسئله طبق گام‌های ارائه شده جواب‌های بهینه بصورت زیر بدست می‌آیند:

$$\tilde{x}_{۱۱} = (۰, ۰, ۰, ۰), \tilde{x}_{۱۲} = (۰, ۰, ۰, ۰), \tilde{x}_{۱۳} = (۰, ۰, ۰, ۰), \tilde{x}_{۱۴} = (۰, ۰, ۰٫۰۴, ۰٫۰۴)$$
$$\tilde{x}_{۲۱} = (۰, ۰, ۰٫۰۲, ۰٫۰۲), \tilde{x}_{۲۲} = (۰, ۰, ۰٫۰۵, ۰٫۰۵), \tilde{x}_{۲۳} = (۰, ۰, ۰, ۰), \tilde{x}_{۲۴} = (۰, ۰, ۰٫۰۰۳, ۰٫۰۰۳)$$
$$\tilde{x}_{۳۱} = (۰, ۰, ۰٫۰۱, ۰٫۰۱), \tilde{x}_{۳۲} = (۰, ۰, ۰, ۰), \tilde{x}_{۳۳} = (۰, ۰, ۰٫۰۵, ۰٫۰۵), \tilde{x}_{۳۴} = (۰, ۰, ۰٫۰۵, ۰٫۰۰۵).$$

$$\tilde{z} = (z_{۱}, z_{۲}, z_{۳}, z_{۴}) = (۰, ۰, ۳٫۷۳۱, ۴٫۱۶)$$

مثال ۳: مثال زیر را در نظر بگیرید [۳۷].

$$\max \tilde{z} = \frac{(۳, ۴, ۶, ۷)\tilde{x}_{۱} + (۲, ۲٫۵, ۳٫۵, ۴)\tilde{x}_{۲}}{(۴, ۴٫۵, ۵٫۵, ۶)\tilde{x}_{۱} + (۱, ۱٫۵, ۲٫۵, ۳)\tilde{x}_{۲} + (۰, ۰٫۵, ۱٫۵, ۲)}$$

$$s.t.$$

$$(۲, ۲٫۵, ۳٫۵, ۴)\tilde{x}_{۱} + (۳, ۴, ۶, ۷)\tilde{x}_{۲} \leq (۱۱, ۱۲, ۱۸, ۱۹)$$

$$(۴, ۴٫۵, ۵٫۵, ۶)\tilde{x}_{۱} + (۱, ۱٫۵, ۲٫۵, ۳)\tilde{x}_{۲} \leq (۸, ۹, ۱۱, ۱۲)$$

$$\tilde{x}_{۱}, \tilde{x}_{۲} \geq ۰.$$

با حل مسئله فوق جواب‌های بهینه بصورت زیر بدست می‌آیند:

$$\tilde{y}_۱^* = \{(y_۱^*)^n, (y_۱^*)^m, (y_۱^*)^r, (y_۱^*)^s\} = (۰, ۰, ۰/۰۶, ۰/۰۶)$$

$$\tilde{y}_۲^* = \{(y_۲^*)^n, (y_۲^*)^m, (y_۲^*)^r, (y_۲^*)^s\} = (۰, ۰, ۰/۱۵, ۰/۱۵)$$

$$t^* = \{(t_۱, t_۲, t_۳, t_۴)\} = (۰, ۰, ۰/۶, ۰/۶)$$

در نتیجه جواب بهینه برابر است با:

$$\tilde{x}_۱^* = \{(x_۱^*)^n, (x_۱^*)^m, (x_۱^*)^r, (x_۱^*)^s\} = (۰, ۰, ۰/۱, ۰/۱)$$

$$\tilde{x}_۲^* = \{(x_۲^*)^n, (x_۲^*)^m, (x_۲^*)^r, (x_۲^*)^s\} = (۰, ۰, ۰/۲, ۰/۲)$$

$$\tilde{z}^* = \{(z^*)^n, (z^*)^m, (z^*)^r, (z^*)^s\} = (۰, ۰, ۰/۹۳, ۱/۰۸)$$

ورامانی و سماتی [۳۷] جواب مسئله فوق را $\tilde{z} = (۰, ۰/۲۷, ۰/۲۷, ۰/۹۹)$ بدست آوردند. با توجه به روش رتبه‌بندی تعریف ۵ داریم:

$$R(۰, ۰, ۰/۹۳, ۱/۰۸) = ۰/۵$$

$$R(۰, ۰/۲۷, ۰/۲۷, ۰/۹۹) = ۰/۴$$

لذا مشاهده می‌شود که روش پیشنهادی در این مقاله نسبت به روش ورامانی از مطلوبیت بهتری در جواب تابع هدف برخوردار است.

۶ نتیجه‌گیری و پیشنهادات آتی

تاکنون، محققین مدل‌ها و راه‌حل‌های مختلفی برای حل برنامه‌ریزی کسری فازی ارائه دادند. در این مقاله روش جدیدی برای حل مسائل برنامه‌ریزی کسری خطی تماما فازی با اعداد فازی ذوزنقه‌ای پیشنهاد شد که در آن، برنامه‌ریزی کسری خطی تماما فازی با

استفاده از حساب فازی و رتبه‌بندی به برنامه‌ریزی خطی چند هدفه تبدیل شد سپس با حل مسئله برنامه‌ریزی خطی چندهدفه جواب مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی تماما فازی بدست آمد. در ادامه روش پیشنهادی با روش‌های دیگر مقایسه گردید و مشخص شد علی‌رغم اینکه روش پیشنهادی نسبت به روش‌های دیگر از پیچیدگی کمتری برخوردار است، جواب آن نیز در مقایسه با دیگر روش‌ها بهتر می‌باشد. پیشنهاد برای کارهای بعدی در نظر گرفتن اعداد فازی LR و استفاده از الگوریتم‌های فرا ابتکاری می‌باشد.
به هر حال، در این مقاله از روش الفبایی برای حل مسئله بهینه‌سازی چندهدفه استفاده شد. استفاده از روش الفبایی محدودیت‌هایی دارد از جمله اینکه در روش الفبایی اگر تابع هدف اول جواب بهینه منحصربفرد داشته باشد، بقیه توابع هدف مورد بررسی قرار نمی‌گیرند و نادیده گرفته می‌شوند. در واقع در روش الفبایی وزن‌دهی توابع هدف به گونه‌ای است که تابع هدف اول بی‌نهایت بار از تابع هدف دوم و تابع هدف دوم بی‌نهایت بار از تابع هدف سوم و .... مهم‌تر هستند. به‌علاوه، برای حل یک مسئله با روش الفبایی ممکن است مجبور باشیم تعداد زیادی مسئله بهینه‌سازی تک هدفه حل کنیم. لذا استفاده از تکنیک‌های دیگر حل مسائل بهینه‌سازی چندهدفه، از جمله تکنیک‌های اسکالرسازی و روش‌های تعاملی می‌تواند زمینه تحقیقات برای کارهای آتی باشد. به‌علاوه، در این مقاله از رتبه‌بندی های موجود استفاده شد. ارائه یک تابع رتبه‌بندی جدید که بتواند هم برای تابع هدف و هم محدودیت‌ها به کار رود می‌تواند یک موضوع جذاب برای تحقیقات آتی باشد. پیشنهاد دیگر برای کارهای بعدی در زمینه بهینه‌سازی فازی، در نظر گرفتن اعداد فازی LR، تعمیم روش به مسائل با پارامترهای فازی شهودی و استفاده از الگوریتم های فراابتکاری می باشد.

مراجع

[۱] ابراهیم نژاد، ع. (۱۳۹۸) بازبینی یک مدل ریاضی برای حل مساله‌ی برنامه‌ریزی خطی تماما فازی با اعداد ذوزنقه‌ای. پژوهش‌های نوین در ریاضی.

[2] Alharbi, M. G. and Khalifa, H. A. (2021). On solutions of fully fuzzy linear fractional programming problems using close interval approximation for normalized heptagonal fuzzy numbers. Applied Mathematics and Information Sciences, 15(4), 471-477.

[3] Arya, R., Singh, P., Kumari, S. and Obaidat, M. (2019). An approach for solving fully fuzzy multi-objective linear fractional optimization problems. Soft Computing, 24, 9105–9119.

[4] Ben-Tal, A., El-Ghaoui, L. and Nemirovski, A. (2009). Robust Optimization. Princeton Series in Applied Mathematics, Princeton University Press.

[5] Bhatia, T. K., Kumar, A., Sharma, M. K. and Appadoo, S. S. (2022). Mehar approach to solve fuzzy linear fractional minimal cost flow problems. Journal of Intelligent and Fuzzy Systems, In Press, DOI: 10.3233/JIFS-212909.

[6] Borza, M. and Rambely, A. S. (2021). A new method to solve multi-objective linear fractional problems, Fuzzy Information and Engineering, 13(3), 323-334.

[7] Chinnadurai, V. and Muthukumar, S. (2016). Solving the linear fractional programming problem in a fuzzy environment: Numerical approach. Applied Mathematical Modelling, 40(11-12), 6148-6164.

[8] Das, S. K., Edalatpanah, S. A. and Mandal, T. (2018). A proposed model for solving fuzzy linear fractional programming problem: Numerical Point of View. Journal of Computational Science, 25, 367-375.

[9] Das, S. K., Mandal, T. and Edalatpanah, S. A. (2017). A new approach for solving fully fuzzy linear fractional programming problems using the multi-objective linear programming. RAIRO-Operations research, 51(1), 285-297.

[10] Das, S. K. and Mandal, T. (2017). A new model for solving fuzzy linear fractional programming problem with ranking function. Journal of applied research on industrial engineering, 4(2), 89-96.

[11] Deb, M. (2018). A study of fully fuzzy linear fractional programming problems by signed distance ranking technique. In Optimization Techniques for Problem Solving in Uncertainty (pp. 73-115). IGI Global.

[12] Dutta, D., Tiwari, R.N. and Rao, J.R. (1992). Multiple objective linear fractional programming- A fuzzy set theoretic approach. Fuzzy Sets Syst, 52, 39-45.

[13] Ebrahimnejad, A., Ghomi, S. J. and Mirhosseini-Alizamini, S. M. (2017). A new approach for solving fully fuzzy linear fractional programming problems. In 2017 IEEE 4th International Conference on Knowledge-Based Engineering and Innovation (pp. 862-865). IEEE.

[14] Ebrahimnejad, A., Verdegay, J. L. (2018). Fuzzy Sets-Based Methods and Techniques for Modern Analytics. Studies in Fuzziness and Soft Computing, vol. 364. Springer, Cham.

[15] Ebrahimnejad, A. (2019). An effective computational attempt for solving fully fuzzy linear programming using MOLP problem. Journal of Industrial and Production Engineering, 36(2), 59-69.

[16] Ehrgott, M. (2005). Multicriteria Optimization Springer, Berlin.

[17] Farnam, M., and Darehmiraki, M. (2020). Hesitant Fuzzy Linear Fractional Programming Problem. In International Online Conference on Intelligent Decision Science (pp. 864-872). Springer, Cham.

[18] Kumar, A., Kaur, J., Singh, P. (2011). A new method for solving fully fuzzy linear programming problems. Applied Mathematical Modelling, 35, 817–823.

[19] Kumar, A., Kaur, J. (2014). Fuzzy optimal solution of fully fuzzy linear programming problems using ranking function. Journal of Intelligent Fuzzy Systems, 16(1), 337-344.

[20] Kumar, A., Kaur, A. (2014). Optimal way of selecting cities and conveyances for supplying coal in uncertain environment, adhana, 39(1), 165-187.

[21] Kumar-Das, S. (2019). A new method for solving fuzzy linear fractional programming problem with new ranking function. International Journal of Research in Industrial Engineering, 8(4), 384-393.

[22] Li, D. F. and Chen, S. (1996). A fuzzy programming approach to fuzzy linear fractional programming with fuzzy coefficients. The Journal of Fuzzy Mathematics, 4, 829-834.

[23] Loganathan, T., and Ganesan, K. (2019). A solution approach to fully fuzzy linear fractional programming problems. In Journal of Physics: Conference Series (Vol. 1377, No. 1, p. 012040). IOP Publishing.

[24] Loganathan, T., and Ganesan, K. (2021). Solution of fully Fuzzy Linear Fractional Programming Problem-A Simple Approach. In IOP Conference Series: Materials Science and Engineering (Vol. 1130, No. 1, p. 012047). IOP Publishing.

[25] Mahmoodirad, A., Garg, H., and Niroomand, S. (2020). Solving fuzzy linear fractional set covering problem by a goal programming based solution approach. Journal of Industrial Management Optimization.

[26] Mehlawat, M. K. and Kumar, S. (2012). A solution procedure for a linear fractional programming problem with fuzzy numbers. In Proceedings of the International Conference on Soft Computing for Problem Solving (SocProS 2011) December 20-22, 2011 (pp. 1037-1049). Springer, India.

[27] Pop, B. and Stancu-Minasian, I.M. (2008). A method of solving fuzzy fuzzified linear fractional programming problems. J. Appl. Math. Comput, 27, 227-242.

[28] Pramy, F. A. (2018). An approach for solving fuzzy multi-objective linear fractional programming problems. International Journal of Mathematical, Engineering and Management Sciences, 3(3), 280-293.

[29] Safaei, N. (2014). A new method for solving fully fuzzy linear fractional programming with a triangular fuzzy numbers. Applied Mathematics and Computational Intelligence, 3(1), 273-281.

[30] Sakawa, M. and Yano, H. (1988). An interactive fuzzy satisficing method for multi objective linear fractional programming problems. Fuzzy Sets Syst, 28, 129-144.

[31] Sakawa, M., Yano, H. and Takahashi, J. (1992). Pareto optimality for multi objective linear fractional programming problems with fuzzy parameters. Inf. Sci, 63, 33-53.

[32] Shapiro, A., Dentcheva, D. and Ruszczynski, A. (2021). Lectures on Stochastic Programming. Modeling and Theory. SIAM.

[33] Stancu-Minasian, I.M. and Pop, B. (2003). On a fuzzy set approach to solving multiple objective linear fractional programming problem. Fuzzy Sets Syst, 134, 397-405.

[34] Stanojevic, B. and Stancu-Minasian, I.M. (2009). On solving fuzzified linear fractional programs. Adv.Model.Optim, 11, 503-523.

[35] Stanojevic, B. and I.M. Stancu-Minasian, I.M. (2012). Evaluating fuzzy inequalities and solving fully fuzzified linear fractional programs. Yugoslav J. Oper. Res, 1, 41 -50.

[36] Toksari, M.D. (2008). Taylor series approach to fuzzy multi objective linear fractional programming. Inf. Sci, 178, 1189-1204.

[37] Veeramani, C. and Sumathi, M. (2014). Fuzzy mathematical programming approagh for solving fuzzy linear fractional Programming Problems. RAIRO-Operations research, 48(1), 109-122.

[38] Veeramani, C. and Sumathi, M. (2016). A new method for solving fuzzy linear fractional Programming Problems. Journal Of Intelligent Fuzzy Systems, 31(3), 1831-1843.

[39] Veeramani, C., Sharanya, S. and Ebrahimnejad, A. (2020). Optimization for multi-objective sum of linear and linear fractional programming problem. Fuzzy nonlinear programming approach. Mathematical Sciences, 1-15.

[40] Wang, Y. M., Yang, J. B., Xu, D. L. and Chin, K. S. (2006). On the centroids of fuzzy numbers. Fuzzy Sets Syst, 157(7), 919-926.

[41] Younsi-Abbaci, L., and Moulai, M. (2021). Solving the Multi-Objective Stochastic Interval-Valued Linear Fractional Integer Programming Problem. Asian-European Journal of Mathematics.

[42] Zadeh, L.A. (1965). Fuzzy Sets. Inf. Control, 8, 338-353.