سیستم‌های فازی و کاربردها
شاپای چاپی: ۲۷۱۷-۴۴۰۹
سال پنجم، شماره دوم (پائیز و زمستان ۱۴۰۱)
شاپای الکترونیکی: ۲۷۱۷-۳۹۸۴
صص. ۱۵۵ تا ۱۷۹
DOI:10.22034/JFSA.2022.363771.1147

ماتریس مجاورت نرم و گراف های نرم مسطح و کاربردهای آن

مهرک باقرنژاد و رجبعلی برزویی*

گروه ریاضی، واحد تهران مرکز، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران
گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه شهید بهشتی، تهران، ایران

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۷/۷ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۹/۲۷
نوع مقاله: علمی-پژوهشی

چکیده

استفاده از گراف‌های نرم در کنار گراف‌های فازی، گراف‌های فازی بازه‌ای مقدار، گراف‌های دو قطبی و گراف‌های مبهم یکی دیگر از راه‌های حل مسایلی است که با عدم قطعیت‌ها مواجه هستند. از آن‌جا که یک گراف نرم مجموعه‌ای از زیرمجموعه‌های یک گراف ساده است پس لازم است که برخی از مفاهیم گراف‌های ساده را به گراف‌های نرم تعمیم داد. از این رو محققین زیادی بر روی گراف‌های نرم مطالعه کرده‌اند و بعضی از مفاهیم و عملگرها مانند اجتماع، اشتراک و متمم را برای آن تعریف نموده‌اند. در ادامه این تحقیقات ما در این مقاله ابتدا به بیان تعریف ماتریس مجاورت نرم پرداخته و اجتماع، اشتراک، جمع و تفاضل را برای ماتریس‌های مجاورت نرم تعریف می‌کنیم و رابطه‌ی بین این مجموعه‌ها را به‌دست می‌آوریم. سپس مرتبه، اندازه و درجه را برای گراف‌های نرم تعریف کرده و به بیان مفهوم گراف نرم مسطح و گراف نرم دوگان می‌پردازیم و سپس رابطه‌ی بین مرتبه و اندازه را در گراف نرم مسطح بررسی می‌نماییم. در پایان مقاله نمونه‌ای از کاربرد گراف‌های مسطح نرم در کنترل جریان‌های ترافیک شهری بیان شده است.

عبارات و کلمات کلیدی: گراف نرم، ماتریس مجاورت نرم، گراف نرم مسطح، گراف نرم دوگان.

Email(s): mehrakbaghernejad5@gmail.com, borzooei@sbu.ac.ir.

Mathematics Subject Classification: 05C72 ; 94D05

۱ سرآغاز

برخلاف سایر شاخه های ریاضیات، نظریه گراف نقطه شروع مشخصی دارد. شروع نظریه گراف با مقاله ای از لئونارد اویلر [۱] (مسئله هفت پل کونیگسبرگ) بود که او در سال ۱۷۳۶ آن را حل کرد. پیشرفت های اخیر در ریاضیات، به ویژه درکاربردهای آن، منجر به گسترش چشمگیر نظریه گراف شده است، به طوری که نظریه گراف، یک ابزار بسیار مفید در حل مسائل ترکیبیات در حوزه‌های مختلف مانند هندسه، جبر، نظریه اعداد، توپولوژی، تحقیق درعملیات، زیست شناسی، سیستم‌های اجتماعی و ... در نظرگرفته می‌شود. یک گراف، ارتباط بین اعضای یک مجموعه را نشان می‌دهد. به طورکلی، هر سیستمی که شامل نقاط و خطوط بین آنها باشد، می‌تواند به عنوان یک گراف نشان داده شود.

مدل‌سازی ریاضی، تجزیه و تحلیل و محاسبه مسائل با عدم قطعیت یکی از داغ‌ترین حوزه‌ها در تحقیقات بین‌رشته‌ای شامل ریاضیات کاربردی، هوش محاسباتی و علوم تصمیم‌گیری است. شایان ذکر است که عدم قطعیت ناشی از حوزه های مختلف ماهیت بسیار متفاوتی دارد و نمی توان آن را در یک چارچوب ریاضی واحد به تصویر کشید. مجموعه‌های نرم مولودسوف [۲] راه جدیدی برای مقابله با عدم قطعیت‌ها از دیدگاه پارامترسازی به ما ارائه می‌دهند. در سال ۱۹۹۹ مولودسف [۱۵]، نظریه مجموعه‌های نرم را به عنوان یک ابزار ریاضی برای مقابله با عدم قطعیت‌ها و مفاهیم و اشیائی که به طور دقیق تعریف نشده‌اند، مطرح کرد. وی معتقد بود که نظریه مجموعه‌های نرم به اندازه کافی پارامتر دارد تا بتواند توصیف تقریبی از مسائل را ارائه دهد و مشکل نظریه‌های قبلی را ندارد و در عمل بسیار آسان و قابل اجرا است. وی مجموعه‌های نرم را به عنوان یک خانواده پارامتری شده از زیرمجموعه‌های مجموعه مرجع در نظرگرفت. این نظریه در سال‌های اخیر در بین محققان محبوبیت یافته است و سالانه تعداد زیادی مقاله در این موضوع منتشر می‌شود. ماجی[۳] و همکارانش [۱۳]، در مورد جنبه نظری مجموعه‌های نرم بحث کردند و چندین عملگر را برای مجموعه‌های نرم معرفی کردند. برخی از کاربردهای مجموعه نرم در [۱۴] مورد بحث قرار گرفته است. تامباکارا[۴] و همکارش [۱۷]، مفهوم

[1] Leonhard Euler
[2] Molodtsov
[3] Maji
[4] Thumbakara

گراف‌های نرم را تعریف کردند. از طرف دیگر، اکرم[5] و همکارش [۱]، مفاهیم گراف نرم و گراف نرم رأس القایی را معرفی کردند. در سال ۲۰۰۱، ماجی [۱۲]، با استفاده از ترکیب مجموعه نرم و مجموعه فازی، مفهوم مجموعه نرم فازی را تعریف کرد. در واقع، مفهوم مجموعه نرم فازی، تعمیمی از مجموعه نرم و مجموعه فازی است. پس از آن، بسیاری از محققان این مفهوم را در شاخه‌های مختلف ریاضیات مانند نظریه گروه، مسائل تصمیم‌گیری، توپولوژی و غیره اعمال کرده‌اند. روی [6] و ماجی [۱۶]، کاربردی از مجموعه‌های نرم فازی ارائه دادند. علی [7] و همکارانش [۵]، مطالعات بیشتری را روی مجموعه‌های نرم فازی انجام دادند. سپس، اکرم و همکارش [۲، ۳]، مفهوم مجموعه‌های نرم فازی را روی گراف‌ها به‌کار بردند و گراف نرم فازی را معرفی کردند. آنها مفهوم گراف‌های نرم فازی و روش‌های مختلف ساخت آنها را ارائه داده و برخی از خصوصیات مربوط به آنها را بررسی کردند. اینک ما در این مقاله مفادهیم ماتریس مجاورت نرم و گراف نرم مسطح را معرفی و برخی از ویژگی‌های آن‌ها را ارائه می‌کنیم.

۲ پیشنیازها

در این بخش به معرفی نظریه گراف می‌پردازیم که از مرجع [۷] اقتباس شده‌است ولی تنها به بیان تعریف‌های مورد نیاز در این مقاله اکتفا می‌کنیم.
فرض کنید $G = (V, E)$ یک گراف ساده باشد که در آن V مجموعه رأس‌ها و E مجوعه یال‌های G هستند. تعداد رأس‌ها و یال‌های گراف G را به ترتیب مرتبه و اندازه گراف G می‌نامیم و آن‌ها را با $p(G)$ و $q(G)$ نمایش می‌دهیم. فرض کنید n عددی طبیعی باشد، دراین‌صورت گراف کامل مرتبه n که آن را با نماد K_n نمایش می‌دهیم گرافی است که در آن هر دو رأس مجاور هستند. همچنین G را k−منتظم گوییم هرگاه درجه همه‌ی رأس‌های آن k باشد. متمم گراف G که آن را با G^c نمایش می‌دهیم گرافی است با مجموعه رأس‌های V، که در آن $uv \in E(G^c)$، هرگاه $uv \notin E(G)$.

تعریف ۱.۲. فرض کنید $G = (V_۱, E_۱)$ و $H = (V_۲, E_۲)$ دو گراف باشند.

[5] Akram

[6] Roy

[7] Ali

دراین‌صورت

۱. گراف H را یک زیرگراف G نامیده و می‌نویسیم $H \subseteq G$، هرگاه $V_۱ \subseteq V_۲$ و $E_۱ \subseteq E_۲$ باشند.

۲. گراف H را یک زیرگراف فراگیر G نامیم هرگاه $V_۱ = V_۲$ و $E_۱ \subseteq E_۲$ باشد.

۳. اجتماع دو گراف G و H را با نماد $G \cup H = (V, E)$ نمایش داده می‌شود به‌طوری‌که $V = V_۱ \cup V_۲$ و $E = E_۱ \cup E_۲$.

۴. اشتراک دو گراف G و H را با نماد $G \cap H = (V, E)$ نمایش داد می‌شود به‌طوری‌که $V = V_۱ \cap V_۲$ و $E = E_۱ \cap E_۲$.

تعریف ۲.۲. فرض کنید $G = (V, E)$، گرافی ساده از مرتبه n باشد که $V = \{v_۱, v_۲, ..., v_n\}$. ماتریس مجاورت وابسته به گراف G، ماتریسی $n \times n$ است که با $M(G) = [m_{ij}]_{n\times n}$ نمایش داده می‌شود و درایه (i, j) -ام آن یعنی m_{ij}، مجاورت رأس v_i و v_j را مشخص می‌کند. به‌این‌صورت که اگر v_i و v_j مجاور باشند، آن‌گاه $m_{ij} = ۱$ و درغیراین‌صورت $m_{ij} = ۰$.

تعریف ۳.۲. گراف G را **دو بخشی** [8] گویند هرگاه بتوان مجموعه رأس‌های V را به دو زیرمجموعه $V_۱$ و $V_۲$ چنان افراز کرد که هر یال G دارای یک انتها در $V_۱$ و یک انتها در $V_۲$ باشد. چنین افراز $(V_۱, V_۲)$ را دو بخشی کردن گراف G نامند.

تعریف ۴.۲. یک گراف را نشاندنی در صفحه یا **مسطح** [9] نامند اگر بتوان آن را در صفحه چنان رسم کرد که یال‌های گراف تنها در دو انتهایشان یکدیگر را قطع کنند. چنین ترسیمی از گراف G را نشاندن سطحی G در صفحه نامند. گراف مسطح G صفحه را به تعدادی ناحیه همبند افراز می‌کند. بستارهای این ناحیه‌ها را وجه‌های G نامند. هر گراف مسطح دارای یک وجه بی‌کران است که آن را وجه بیرونی می‌نامند. مجموعه وجه‌ها و تعداد وجه‌ها را در گراف مسطح G به ترتیب با $F(G)$ و $\phi(G)$ نشان می‌دهند.

[8] bipartite

[9] planar

تعریف ۵.۲. در گراف مسطح G می‌توان گراف $\widetilde{G}$ را به ترتیب زیر تعریف کرد:
متناظر با هر وجه f از G، رأس $\widetilde{f}$ از $\widetilde{G}$ وجود دارد و متناظر با هر یال e از G یک یال $\widetilde{e}$ از $\widetilde{G}$ وجود دارد. دو رأس $\widetilde{f}$ و $\widetilde{g}$ با یال $\widetilde{e}$ به هم متصل هستند اگروتنهااگر وجه‌های متناظر آن‌ها به وسیله یال e در G از هم جدا شده باشند. گراف $\widetilde{G}$ را گراف دوگان G می‌نامند. به آسانی می‌توان مشاهده کرد که $\widetilde{G}$ نیز یک گراف مسطح است.

قضیه ۶.۲. *(فرمول اویلر) اگر G یک گراف مسطح همبند باشد، آن‌گاه*

$$p(G) + q(G) - \phi(G) = ۲.$$

فرض کنید U یک مجموعه مرجع و E مجموعه‌ای از پارامترها باشد. دو تایی مرتب (F, A) یک **مجموعه نرم** [۱۰] روی U نامیده می‌شود هرگاه $A \subseteq E$ و $F : A \longrightarrow P(U)$. تابع مجموعه مقادیر باشد. به عبارت دیگر، یک مجموعه نرم روی U، یک خانواده پارامتری شده از زیرمجموعه‌های U است، به‌طوری‌که به هر پارامتر $e \in A$ یک زیرمجموعه از U را نسبت می‌دهد. مجموعه تمام مجموعه‌های نرم را با $S(U)$ نشان می‌دهند. متمم مجموعه نرم (F, A) روی U، یک مجموعه نرم روی U است که با (F^c, A) نشان داده می‌شود به‌طوری‌که $F^c : A \longrightarrow P(U)$ و برای هر $e \in A$، $F^c(e) = U - F(e)$.([۱۵])

تعریف ۷.۲. [۱۴] فرض کنید $(F_۱, A)$ و $(F_۲, B)$ دو مجموعه نرم روی U باشند، دراین‌صورت

۱. $(F_۱, A)$ زیرمجموعه نرم $(F_۲, B)$ نامیده می‌شود هرگاه $A \subseteq B$ و برای هر $e \in A$، $F_۱(e) \subseteq F_۲(e)$. در این حالت می‌نویسند $(F_۱, A) \Subset (F_۲, B)$.

۲. اجتماع $(F_۱, A)$ و $(F_۲, B)$ را با $(F, C) = (F_۱, A)\widetilde{\cup}(F_۲, B)$ نشان داده به‌طوری‌که $C = A \cup B$ و برای هر $e \in C$،

$$F(e) = \begin{cases} F_۱(e) & e \in A - B \\ F_۲(e) & e \in B - A \\ F_۱(e) \cup F_۲(e) & e \in A \cap B \end{cases}.$$

[10] softset

۳. اشتراک (F_1, A) و (F_2, B) را با $(F, C) = (F_1, A)\widetilde{\cap}(F_2, B)$ نشان داده به‌طوری‌که $C = A \cup B$ و برای هر $e \in C$،

$$F(e) = \begin{cases} F_1(e) & e \in A - B \\ F_2(e) & e \in B - A \\ F_1(e) \cap F_2(e) & e \in A \cap B \end{cases}.$$

تعریف ۸.۲. [۱] فرض کنید $G^* = (V, E)$ یک گراف ساده باشد. دراین‌صورت $G = (F, K, A)$ یک **گراف نرم** [11] روی G^* نامیده می‌شود هرگاه شرایط زیر برقرار باشد:

۱. A یک مجموعه ناتهی از پارامترها باشد.

۲. (F, A) یک مجموعه نرم روی V باشد.

۳. (K, A) یک مجموعه نرم روی E باشد.

۴. $H(e) = (F(e), K(e))$ یک زیرگراف از G^* باشد.

مجموعه همه گراف‌های نرم روی G^* را با $SG(G^*)$ نشان می‌دهند.

تعریف ۹.۲. [۱] فرض کنید $G_1 = (F_1, K_1, A)$ و $G_2 = (F_2, K_2, B)$ دو گراف نرم روی G^* باشند. دراین‌صورت:

۱. G_2 زیرگراف نرم G_1 گفته می‌شود و می‌نویسند $G_2 \sqsubseteq G_1$ هرگاه $A \subseteq B$ و برای هر $e \in B$، $H_2(e)$ زیرگراف $H_1(e)$ باشد.

۲. اجتماع G_1 و G_2 را با $G_1 \sqcup G_2 = (F_1 \sqcup F_2, K_1 \sqcup K_2, A \cup B)$ نشان داده به‌طوری‌که برای هر $e \in A \cup B$،

$$(F_1 \sqcup F_2)(e) = \begin{cases} F_1(e) & e \in A - B \\ F_2(e) & e \in B - A \\ F_1(e) \cup F_2(e) & e \in A \cap B \end{cases},$$

[11] softgraph

$$(K_۱ \sqcup K_۲)(e) = \begin{cases} K_۱(e) & e \in A - B \\ K_۲(e) & e \in B - A \\ K_۱(e) \cup K_۲(e) & e \in A \cap B \end{cases}.$$

زیرگراف $\Big((F_۱ \sqcup F_۲)(e), (K_۱ \sqcup K_۲)(e)\Big)$ از $G_۱ \sqcup G_۲$ به صورت $(H_۱ \sqcup H_۲)(e)$ نشان داده می‌شود.

۳. اشتراک $G_۱$ و $G_۲$ را با $G_۱ \sqcap G_۲ = (F_۱ \sqcap F_۲, K_۱ \sqcap K_۲, A \cup B)$ نشان داده به‌طوری‌که برای هر $e \in A \cup B$،

$$(F_۱ \sqcap F_۲)(e) = \begin{cases} F_۱(e) & e \in A - B \\ F_۲(e) & e \in B - A \\ F_۱(e) \cap F_۲(e) & e \in A \cap B \end{cases},$$

$$(K_۱ \sqcap K_۲)(e) = \begin{cases} K_۱(e) & e \in A - B \\ K_۲(e) & e \in B - A \\ K_۱(e) \cap K_۲(e) & e \in A \cap B \end{cases}.$$

زیرگراف $\Big((F_۱ \sqcap F_۲)(e), (K_۱ \sqcap K_۲)(e)\Big)$ از $G_۱ \sqcap G_۲$ به صورت $(H_۱ \sqcap H_۲)(e)$ نشان داده می‌شود.

۳ نتایج جدید در گراف‌های نرم

توجه: در این بخش ما $G^* = (V, E)$ را یک گراف ساده‌ی همبند و $G = (F, K, A)$ را یک گراف نرم روی G^* در نظر می‌گیریم.

۱.۳ ماتریس مجاورت در گراف‌های نرم

در گراف‌های ساده ویژگی‌های زیادی مانند درجه رأس، منظم بودن و... را می‌توان با

استفاده از ماتریس مجاورت به دست آورد. چون در گراف‌های نرم نیز با زیرگراف‌هایی از یک گراف ساده مواجه هستیم، پس تعریف ماتریس مجاورت نرم برای گراف‌های نرم و استفاده از آن می‌تواند بسیار مهم باشد و می‌توان ویژگی‌های مهمی از گراف‌های نرم را به کمک آن بررسی کرد. بنابراین ابتدا ماتریس مجاورت نرم را برای یک گراف نرم تعریف کرده وسپس بعضی از ویژگی‌های آن را بررسی می‌کنیم.

تعریف ١.٣. فرض کنید G یک گراف نرم روی $G^* = (V, E)$ بوده به‌طوری‌که $V = \{x_۱, x_۲, ..., x_n\}$ و A یک خانواده از پارامترها باشد. دراین‌صورت برای هر زیرگراف $H(e)$ از G^*، ماتریس $M_{_G}(e) = [m_{x_ix_j}]_{n\times n}$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

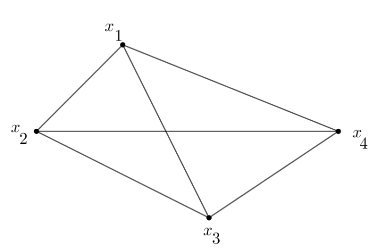
١. اگر $x_i \in F(e)$، آنگاه برای هر $x_ix_j \in K(e)$، $m_{x_ix_j} = m_{x_jx_i} = ١$ و اگر $x_ix_j \notin K(e)$، آنگاه $m_{x_ix_j} = m_{x_jx_i} = ۰$.

٢. اگر $x_i \notin F(e)$، آنگاه برای هر $j = ١, ٢, ..., n$، $m_{x_ix_j} = m_{x_jx_i} = ۰$.

حال ماتریس مجاورت نرم G را با $M(G)$ نشان داده و به‌صورت ذیل تعریف می‌کنیم؛

$$M(G) = \{M_{_G}(e) \mid e \in A\}.$$

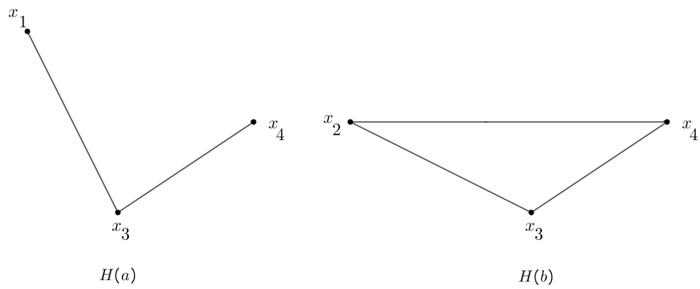
گراف G^* در شکل ١ را در نظر بگیرید.



شکل ١: *گراف* G^*

فرض کنید $A = \{a, b\}$ مجموعه پارامترها باشد و داشته باشیم؛

$$F_١(a) = \{x_١, x_٣, x_۴\}, \quad K_١(a) = \{x_١x_٣, x_٣x_۴\},$$
$$F_١(b) = \{x_٢, x_٣, x_۴\}, \quad K_١(b) = \{x_٢x_٣, x_٢x_۴, x_٣x_۴\}.$$



شکل ۲: *زیرگراف‌های* $H(a)$ و $H(b)$

زیرگراف‌های $H(a)$ و $H(b)$ در شکل ۲ نشان داده شده‌اند. پس

$$M(G)=\left\{M_{G_1}(a), M_{G_1}(b)\right\}=\left\{\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&0\\1&0&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}\quad,\quad\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&1\\0&1&0&1\\0&1&1&0\end{bmatrix}\right\}.$$

تعریف ۲.۳. اگر $M(G_1)$ ماتریس مجاورت نرم $G_1=(F_1,K_1,A)$ و $M(G_2)$ ماتریس مجاورت نرم $G_2=(F_2,K_2,B)$ باشند، آن‌گاه

۱. **اجتماع** $M(G_1)$ و $M(G_2)$ را مجموعه‌ی

$$M(G_1)\sqcup M(G_2)=\left\{\big(M(G_1)\sqcup M(G_2)\big)(c)\ \mid\ c\in A\cup B\right\}$$

تعریف می‌کنیم به‌طوری‌که برای هر $c\in A\cup B$،

$$\big(M(G_1)\sqcup M(G_2)\big)(c)=\begin{cases}M_{G_1}(c) & c\in A-B\\ M_{G_2}(c) & c\in B-A\\ M_{H_1(c)\cup H_2(c)} & c\in A\cap B\end{cases}.$$

۲. **اشتراک** $M(G_1)$ و $M(G_2)$ را مجموعه‌ی

$$M(G_1)\sqcup M(G_2)=\left\{\big(M(G_1)\sqcap M(G_2)\big)(c)\ \mid\ c\in A\cup B\right\}$$

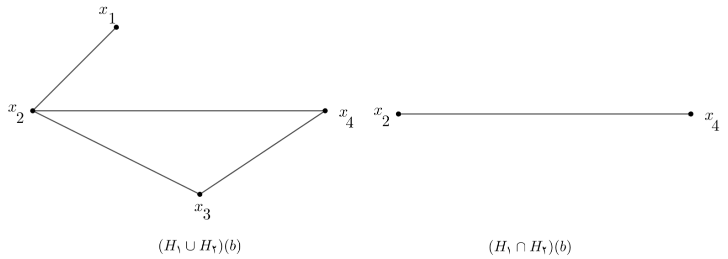
تعریف می‌کنیم به‌طوری‌که برای هر $c \in A \cup B$،

$$\big(M(G_۱) \sqcap M(G_۲)\big)(c) = \begin{cases} M_{G_۱}(c) & c \in A - B \\ M_{G_۲}(c) & c \in B - A \\ M_{H_۱(c) \cap H_۲(c)} & c \in A \cap B \end{cases}.$$

در مثال ۱.۳ اگر $B = \{b, c\}$ و

$$F_۲(c) = \{x_۱, x_۲\}, \quad K_۲(b) = \{x_۱x_۲, x_۲x_۴\}, \quad F_۲(b) = \{x_۱, x_۲, x_۴\},$$
$$K_۲(c) = \{x_۱x_۲\}،$$

آن‌گاه زیرگراف‌های $(H_۱ \cup H_۲)(b)$ و $(H_۱ \cap H_۲)(b)$ مانند شکل ۳ می‌باشند. بنابراین



شکل ۳: زیرگراف‌های $(H_۱ \cup H_۲)(b)$ و $(H_۱ \cap H_۲)(b)$

$$M(G_۱) \sqcup M(G_۲) = \Big\{M_{G_۱}(a), M_{H_۱(b) \cup H_۲(b)}, M_{G_۲}(c)\Big\} =$$

$$\left\{ \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \right\}$$

و

$$M(G_۱) \sqcap M(G_۲) = \Big\{M_{G_۱}(a), M_{H_۱(b) \cap H_۲(b)}, M_{G_۲}(c)\Big\} =$$

$$\left\{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right\}.$$

قضیه ۳.۳. *اگر $M_1(G_1)$ ماتریس مجاورت نرم $G_1 = (F_1, K_1, A)$ و $M_2(G_2)$ ماتریس مجاورت نرم $G_2 = (F_2, K_2, B)$ باشند، آن‌گاه*

۱. $M(G_1) \sqcup M(G_2) = M(G_1 \sqcup G_2)$.

۲. $M(G_1) \sqcap M(G_2) = M(G_1 \sqcap G_2)$.

اثبات.

۱. اگر $c \in A - B$، آن‌گاه $(H_1 \sqcup H_2)(c) = H_1(c)$. پس $M_{G_1 \sqcup G_2}(c) = M_{G_1}(c)$. همچنین اگر $c \in B - A$، آن‌گاه $(H_1 \sqcup H_2)(c) = H_2(c)$ ودرنتیجه $M_{G_1 \sqcup G_2}(c) = M_{G_2}(c)$ و اگر $c \in A \cap B$، آن‌گاه $(H_1 \sqcup H_2)(c) = H_1(c) \cup H_2(c)$. پس برای هر $c \in A$، $M_{G_1 \sqcup G_2}(c) = M_{H_1(c) \cap H_2(c)}$. بنابراین $M(G_1) \sqcup M(G_2) = M(G_1 \sqcup G_2)$.

۲. اثبات (۲) مشابه (۱) است.

□

تعریف ۴.۳. فرض کنید $G_1 = (F_1, K_1, A)$ و $G_2 = (F_2, K_2, B)$ دو گراف نرم روی G^* باشند، به‌طوری‌که $V = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. اگر برای هر $e \in A$، $M_{G_1}(e) = [m_{1x_ix_j}(e)]_{n\times n}$ و برای هر $d \in B$، $M_{G_2}(d) = [m_{2x_ix_j}(d)]_{n\times n}$ باشند، آن‌گاه

۱. جمع $M(G_1)$ و $M(G_2)$ را مجموعه‌ی

$$M(G_1) \boxplus M(G_2) = \Big\{\big(M(G_1) \boxplus M(G_2)\big)(c) \;\big|\; c \in A \cup B\Big\}$$

تعریف می‌کنیم به‌طوری‌که برای هر $c \in A \cup B$،

$$\big(M(G_۱) \boxplus M(G_۲)\big)(c) = \begin{cases} M_{G_۱}(c) & c \in A - B \\ M_{G_۲}(c) & c \in B - A \\ M_{G_۱}(c) \boxplus M_{G_۲}(c) & c \in A \cap B \end{cases}$$

که $M_{G_۱}(c) \boxplus M_{G_۲}(c) = [(m_۱ \boxplus m_۲)_{x_ix_j}(c)]_{n\times n}$ و

$$(m_۱ \boxplus m_۲)_{x_ix_j}(c) = \begin{cases} ۱ & ۱ \leqslant m_{۱x_ix_j}(c) + m_{۲x_ix_j}(c) \leqslant ۲ \\ ۰ & m_{۱x_ix_j}(c) + m_{۲x_ix_j}(c) = ۰ \end{cases}.$$

۲. تفاضل $M(G_۱)$ و $M(G_۲)$ را مجموعه‌ی

$$M(G_۱) \boxminus M(G_۲) = \Big\{\big(M(G_۱) \boxminus M(G_۲)\big)(c) \ \big|\ c \in A \cup B\Big\}$$

تعریف می‌کنیم به‌طوری‌که برای هر $c \in A \cup B$،

$$\big(M(G_۱) \boxminus M(G_۲)\big)(c) = \begin{cases} M_{G_۱}(c) & c \in A - B \\ M_{G_۲}(c) & c \in B - A \\ M_{G_۱}(c) \boxminus M_{G_۲}(c) & c \in A \cap B \end{cases}$$

که $M_{G_۱}(c) \boxminus M_{G_۲}(c) = [(m_۱ \boxminus m_۲)_{x_ix_j}(c)]_{n\times n}$ و

$$(m_۱ \boxminus m_۲)_{x_ix_j}(c) = \begin{cases} ۱ & m_{۱x_ix_j}(c) + m_{۲x_ix_j}(c) = ۲ \\ ۰ & ۰ \leqslant m_{۱x_ix_j}(c) + m_{۲x_ix_j}(c) \leqslant ۱ \end{cases}.$$

در مثال ۱.۳،

$$M_{G_۱}(b) \boxplus M_{G_۲}(b) = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۰ \end{bmatrix} \boxplus \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

و

$$M_{G_۱}(b) \boxminus M_{G_۲}(b) = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۰ \end{bmatrix} \boxminus \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}.$$

قضیه ۵.۳. *با شرایط تعریف ۴.۳؛*

۱. $M(G_۱) \boxplus M(G_۲) = M(G_۱ \sqcup G_۲)$.

۲. $M(G_۱) \boxminus M(G_۲) = M(G_۱ \sqcup G_۲)$.

اثبات.

۱. اگر $c \in A - B$ یا $c \in B \cap A$، حکم بدیهی است. فرض کنید $c \in A \cap B$. دراین‌صورت

$$\big(H_۱ \cup H_۲\big)(c) = H_۱(c) \cup H_۲(c) = \Big(F_۱(c) \cup F_۲(c), K_۱(c) \cup K_۲(c)\Big).$$

اگر $x_ix_j \in K_۱(c) \cup K_۲(c)$، آن‌گاه حداقل یکی از $m_{۱x_ix_j}$ یا $m_{۲x_ix_j}$ برابر با یک است. یعنی $m_{۱x_ix_j} = ۱$ یا $m_{۲x_ix_j} = ۱$ و درنتیجه $m_{H_۱(c)\cup H_۲(c)} = ۱$. از طرفی $۱ \leqslant m_{۱x_ix_j} + m_{۲x_ix_j} \leqslant ۲$. پس $(m_۱ \boxplus m_۲)_{x_ix_j}(c) = ۱$ و درنتیجه

$$m_{H_۱(c)\cup H_۲(c)} = (m_۱ \boxplus m_۲)_{x_ix_j}(c) = ۱.$$

اگر $x_ix_j \notin K_{۱}(c) \cup K_{۲}(c)$، آن‌گاه $m_{۱x_ix_j} = m_{۲x_ix_j} = ۰$، و درنتیجه $m_{H_{۱}(c)\cup H_{۲}(c)} = ۰$. از طرفی $m_{۱x_ix_j} + m_{۲x_ix_j} = ۰$. پس $(m_{۱} \boxplus m_{۲})_{x_ix_j}(c) = ۰$ و درنتیجه

$$m_{H_{۱}(c)\cup H_{۲}(c)} = (m_{۱} \boxplus m_{۲})_{x_ix_j}(c) = ۰.$$

۲. اثبات (۲) مشابه (۱) است.

□

بنابر قضیه‌های ۳.۳ و ۵.۳؛

۱. $M(G_{۱}) \sqcup M(G_{۲}) = M(G_{۱}) \boxplus M(G_{۲})$.

۲. $M(G_{۱}) \sqcap M(G_{۲}) = M(G_{۱}) \boxminus M(G_{۲})$.

۲.۳ گراف نرم مسطح

از آن‌جا که در گراف‌های نرم با زیرگراف‌های یک گراف مواجه هستیم، در این بخش، ابتدا مفاهیم مرتبه،اندازه و درجه‌ی گراف‌های نرم را تعریف کرده و سپس به معرفی گراف‌های نرم مسطح می‌پردازیم و رابطه‌ی بین مرتبه و اندازه را در گراف‌های نرم مسطح بررسی می‌کنیم.

تعریف ۶.۳. فرض کنید G یک گراف نرم روی G^* بوده و A یک خانواده از پارامترها باشد، آن‌گاه

۱. **مرتبه** G را با $O(G)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$O(G) = \sum_{e\in A} O\big(H(e)\big).$$

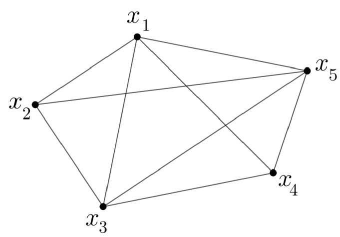
۲. **اندازه** G را با $S(G)$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$S(G) = \sum_{e\in A} S\big(H(e)\big).$$

۳. **درجه رأس** $x \in V$ را با $d_G(x)$ نشان داده و آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$d_G(x) = \sum_{e \in A} d_{H(e)}(x).$$

گراف ساده G^* را به صورت شکل ۴ در نظر بگیرید. فرض کنید $A = \{a, b, c\}$

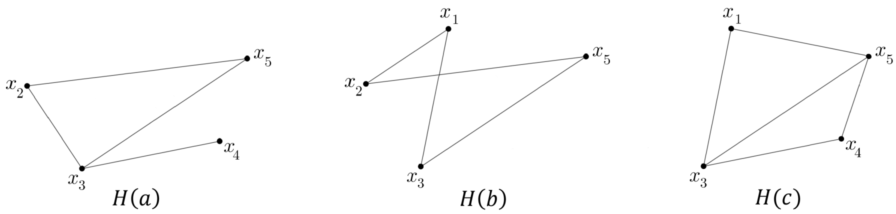


شکل ۴: *گراف ساده* G^*

مجموعه پارامترها باشد و داریم:

$$F(a) = \{x_۲, x_۳, x_۴, x_۵\} \quad , \quad K(a) = \{x_۲x_۳, x_۳x_۴, x_۲x_۵, x_۳x_۵\},$$
$$F(b) = \{x_۱, x_۲, x_۳, x_۵\} \quad , \quad K(b) = \{x_۱x_۲, x_۱x_۳, x_۲x_۵, , x_۳x_۵\},$$
$$F(c) = \{x_۱, x_۳, x_۴, x_۵\} \quad , \quad K(c) = \{x_۱x_۳, x_۱x_۵, x_۳x_۴, x_۳x_۵, x_۴x_۵\}.$$

زیرگراف‌های $H(a)$، $H(b)$ و $H(c)$ در شکل ۵ نشان داده شده‌اند.



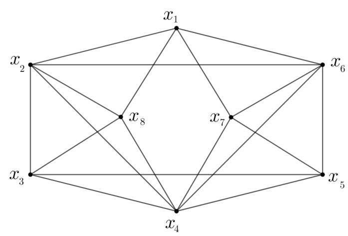
شکل ۵: $H(a)$، $H(b)$، $H(c)$

به آسانی می‌توان مشاهده کرد که،

$$O(G)=\sum_{a\in A}O(H(a))=۴+۴+۴=۱۲,$$
$$S(G)=\sum_{a\in A}S(H(a))=۴+۴+۵=۱۳,$$
$$d_G(x_۱)=۴,\quad d_G(x_۲)=۴,\quad d_G(x_۳)=۸,\quad d_G(x_۴)=۳,\quad d_G(x_۵)=۷.$$

تعریف ۷.۳. G را یک **گراف نرم مسطح** گوییم هرگاه برای هر $e\in A$، $H(e)$ یک گراف مسطح باشد.

گراف G^* که در شکل ۶ نشان داده شده‌است را در نظر بگیرید. فرض کنید



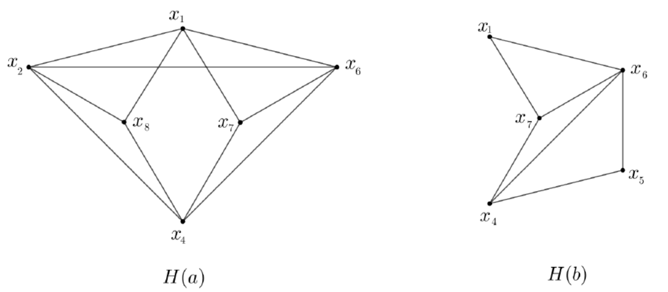
شکل ۶: گراف G^*

$A=\{a,b\}$ یک مجموعه از پارامترها باشد و داشته باشیم؛

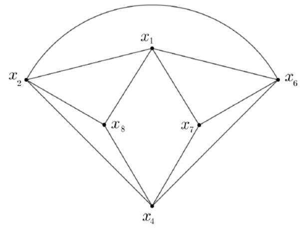
$$F(a)=\{x_۱,x_۲,x_۴,x_۶,x_۷,x_۸\},$$
$$K(a)=\{x_۱x_۲,x_۱x_۶,x_۱x_۷,x_۱x_۸,x_۲x_۴,x_۲x_۶,x_۲x_۸,x_۴x_۶,x_۴x_۷,x_۴x_۸,$$
$$x_۶x_۷\},$$
$$F(b)=\{x_۱,x_۴,x_۵,x_۶,x_۷\},$$
$$K(b)=\{x_۱x_۶,x_۱x_۷,x_۴x_۵,x_۴x_۶,x_۴x_۷,x_۵x_۶,x_۶x_۷\}.$$

پس $H(a)$ و $H(b)$ به صورت شکل ۷ هستند. بدیهی است که $H(a)$ مسطح نیست اما می‌توان آن را طوری رسم کرد که مانند شکل ۸ مسطح شود. با توجه به اینکه $H(b)$ نیز مسطح است، می‌توان نتیجه گرفت که G یک گراف نرم مسطح است.

تعریف ۸.۳. اگر G یک گراف نرم مسطح و A یک خانواده از پارامترها باشد، آن‌گاه



شکل ۷: *گراف‌های* $H(a)$، $H(b)$



شکل ۸: *گراف مسطح* $H(a)$

تعداد سطح‌های G را با $\Gamma(G)$ نشان داده و تعریف می‌کنیم $\Gamma(G) = \sum_{e\in A} \phi(e)$، به‌طوری‌که $\phi(e)$ تعداد سطح‌های $H(e)$ است.

گزاره ۹.۳. *اگر G یک گراف نرم مسطح باشد، آن‌گاه*

$$S(G) - O(G) + ۲|A| = \Gamma(G).$$

اثبات. از آنجا که برای هر $e \in A$، $H(e)$ یک گراف مسطح است پس

$$S(H(e)) - O(H(e)) + ۲ = \phi(e)$$

و درنتیجه

$$\sum_{e\in A} S(H(e)) - \sum_{e\in A} O(H(e)) + \sum_{e\in A} ۲ = \sum_{e\in A} \phi(e).$$

بنابراین $S(G) - O(G) + ۲|A| = \Gamma(G)$.

□

گزاره ۱۰.۳. *فرض کنید G یک گراف نرم مسطح باشد به‌طوری‌که برای هر $e \in A$، $O(H(e)) \geq ۳$ باشد. دراین‌صورت $S(G) \leq ۳\ O(G) - ۶|A|$.*

اثبات. چون برای هر $e \in A$، $O(H(e)) \geq ۳$، پس $H(e)$ یک گراف ساده مسطح است و داریم $S\big(H(e)\big) \leq ۳O\big(H(e)\big) - ۶$. بنابراین

$$\sum_{e\in A} S(H(e)) \leq \sum_{e\in A} ۳O(H(e)) - \sum_{e\in A} ۶$$

و درنتیجه $S(G) \leq ۳\ O(G) - ۶|A|$. □

گزاره ۱۱.۳. *فرض کنید G یک گراف نرم باشد. اگر برای هر $x \in V$، $d_G(x) > ۵|A|$ باشد، آن‌گاه G یک گراف نرم مسطح نیست.*

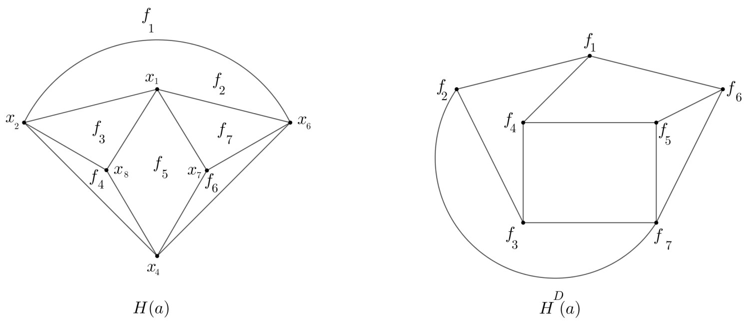
اثبات. می‌دانیم $d_G(x) = \sum_{e\in A} d_{H(e)}(x) > ۵|A|$ پس حداقل یک $e \in A$ وجود دارد که $d_{H(e)}(x) > ۵$. می‌دانیم در هر گراف اگر درجه همه رأس‌ها بزرگ‌تر از ۵ باشد، گراف مسطح نیست. پس $H(e)$ یک گراف مسطح نیست. بنابراین G یک گراف نرم مسطح نیست. □

تعریف ۱۲.۳. اگر G یک گراف نرم مسطح باشد، آن‌گاه گراف نرم دوگان آن را به صورت $G^D = (F^D, K^D, A)$ نشان داده و تعریف می‌کنیم

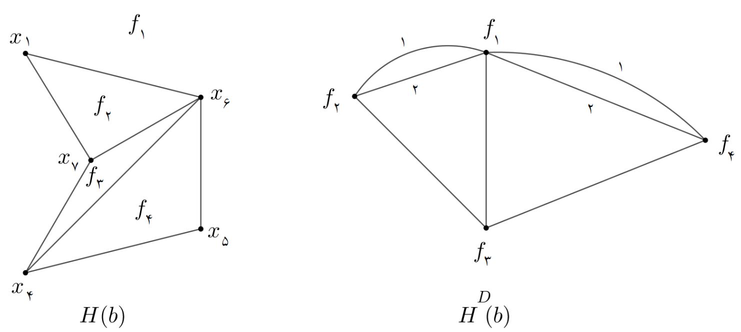
$$G^D = (F^D, K^D, A) = \{H^D(e) \mid\ e \in A\}$$

که $H^D(e)$ گراف دوگان $H(D)$ است.

در مثال ۲.۳، گراف‌های دوگان $H(a)$ و $H(b)$ در شکل‌های ۹ و ۱۰ رسم شده‌اند.



شکل ۹: گراف دوگان $H(a)$



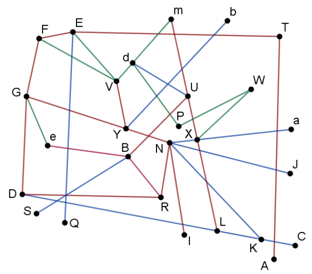
شکل ۱۰: گراف دوگان $H(b)$

به راحتی می‌توان مشاهده کرد که

$$
\begin{aligned}
F^D(a) &= \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7\},\\
K^D(a) &= \{f_1f_2, f_1f_4, f_1f_6, f_2f_3, f_3f_4, f_3f_5, f_3f_7, f_4f_5, f_5f_6, f_5f_7,\\
&\qquad f_6f_7, \},\\
F^D(b) &= \{f_1, f_2, f_3, f_4\},\\
K^D(b) &= \{(f_1f_2)_1, (f_1f_2)_2, (f_1f_4)_1, (f_1f_4)_2, f_1f_3, f_2f_3, f_3f_4\}.
\end{aligned}
$$

۴ کاربردی از گراف‌های نرم در کنترل ترافیک‌های شهری

در این بخش سعی کرده‌ایم تا کاربردی از گراف‌های نرم مسطح را در کنترل جریان‌های ترافیکی شهری نشان دهیم. ابتدا لازم است که نقشه شهر را به کمک یک گراف مدل‌سازی کنیم. برای این منظور هر یک از نقاط مهم شهر را به عنوان یک رأس گراف در نظر می‌گیریم، آنگاه دو رأس مجاور هستند هرگاه بین این دو نقطه یک مسیر وجود داشته باشد. گراف مربوط به مسیرهای مهم یک شهر را مانند شکل ۱۱ در نظر می‌گیریم. واضح است که این گراف مسطح نیست.



شکل ۱۱: *گراف مسیرهای مهم شهر*

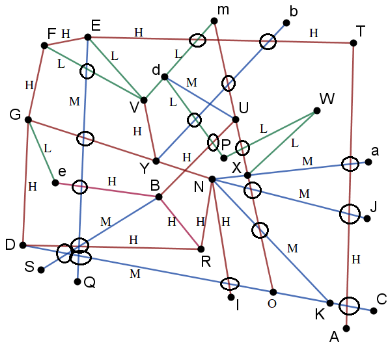
مجموعه پارامترها را $A = \{L, M, H\}$ در نظر می‌گیریم. اگر تعداد وسایل نقلیه در هر مسیر بیشتر یا مساوی ۱۰۰۰ عدد در ساعت باشد، آنگاه پارامتر آن مسیر را (H) در نظر می‌گیریم. اگر تعداد وسایل نقلیه بیشتر یا مساوی ۵۰۰ و کمتر از ۱۰۰۰ عدد در ساعت بود، آنگاه پارامتر آن را (M) و اگر تعداد وسایل نقلیه کمتر از ۵۰۰ عدد در ساعت بود، آنگاه پارامتر آن را (L) در نظر می‌گیریم. پارامتر مربوط به هر یال در جدول زیر نشان داده شده‌است. گراف مربوط به مسیرهای مهم شهر همراه با پارامترهای آن‌ها و نقاطع تقاطع بین مسیرها (یالها) مانند شکل ۱۲ است که شکلی بسیار شلوغ و نامفهوم است.

حال با استفاده از گراف‌های نرم، گراف‌هایی ساده‌تر و مفهوم‌تر به‌دست می‌آوریم. اگر برای هر $a \in A$، $K(a)$ را با توجه به جدول ۱ و $F(a)$ را مجموعه همه رأس‌های انتهایی از یال‌های $K(a)$ تعریف کنیم، آنگاه

$$F(L) = \{e, E, F, G, P, V, W, X, Z\},$$

جدول ۱: *مقادیر پارامتر یال‌ها*

یال	پارامتر	یال	پارامتر	یال	پارامتر	یال	پارامتر
DR	H	DG	H	CK	M	AT	H
EF	H	eG	L	GY	H	FG	H
EQ	M	EV	L	ET	H	FV	L
aX	H	SB	H	mU	H	md	H
BR	H	BU	H	bY	H	hY	H
OK	M	OW	H	hJ	H	hK	M
Zd	M	XZ	M	UW	H	OD	M
PW	L	PZ	L	dX	M	dV	H
NI	H	VY	H	XW	L	OX	H



شکل ۱۲: *گراف مسیرهای مهم شهر و نقاط تقاطع*

$$K(L) = \{eG, FV, EV, PZ, PW, Vd, XW\},$$

$$F(M) = \{C, D, d, E, O, K, N, Q, X, Z\},$$

$$K(M) = \{CK, EQ, NK, OK, OD, XZ, Zd, dX\},$$

$$F(H) = \{A, a, B, b, D, d, E, F, G, J, m, N, O, R, S, T, U, V, W, X, Y\},$$

$$K(H) = \{AT, DG, DR, FG, GY, EF, ET, md, mU, BS, NY, Yb, BU, BR, JN, LW, UW, dV, Xa, IN, VY\}.$$

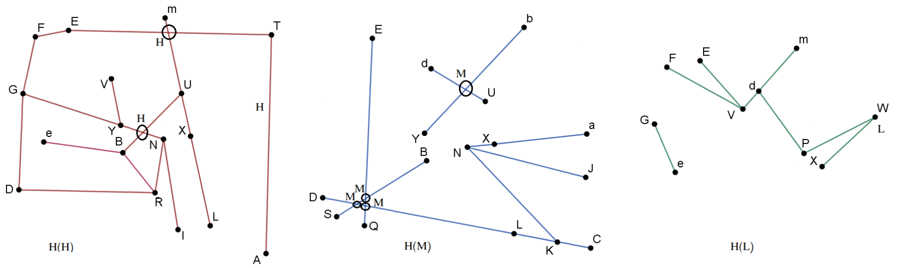
۱- اگر پارامتر هر دو(یا بیشتر) یال متقاطع، (H) باشد، آنگاه پارامتر آن تقاطع را (H) در نظر می‌گیریم.

۲- اگر پارامتر هر دو یال متقاطع (L) باشد، آنگاه پارامتر آن تقاطع را (L) و اگر پارامتر هر سه (یا بیشتر) یال متقاطع (L) باشد آنگاه پارامتر آن تقاطع را (M) در نظر می‌گیریم.

۳- اگر پارامتر هر دو یا سه یال متقاطع (M) باشد، آن‌گاه پارامتر آن تقاطع را (H) در نظر می‌گیریم.

گراف نرم $G=(F,K,A)$ در شکل‌های ۱۳ نشان داده شده‌اند.

همچنین می‌توان گراف نرم جدیدی برای گراف نرم $G=(F,K,A)$ و به‌صورت



شکل ۱۳: گراف نرم G

$G'=(F',K',A')$ تعریف کرد به‌طوری‌که $A'=\{(\alpha,\beta)|(\alpha,\beta)\in A\times A, \alpha\neq\beta\}$ و $F'(\alpha,\beta)=F(\alpha)\cup F(\beta)=F'(\beta,\alpha)$، $K'(\alpha,\beta)=K(\alpha)\cup K(\beta)=K'(\beta,\alpha)$.

برای گراف نرم مطرح شده در بالا:

۱- اگر پارامتر هر دو یال متقاطع (H) یا یکی با پارامتر (H) و دیگری با پارامتر (M) باشد، آن‌گاه پارامتر آن تقاطع را (H) در نظر می‌گیریم.

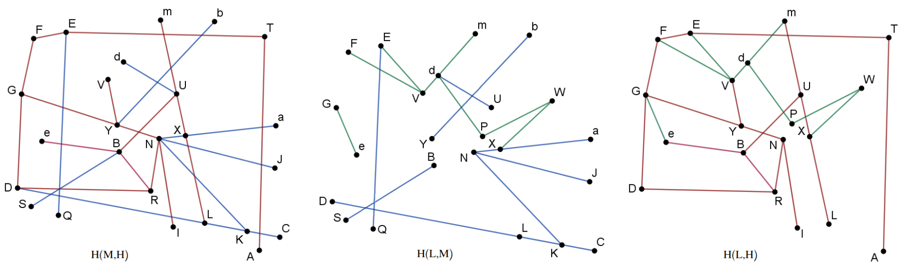
۲- اگر پارامتر هر دو یال متقاطع (L) یا یکی با پارامتر (L) و دیگری با پارامتر (M) باشد، آن‌گاه پارامتر آن تقاطع را (L) در نظر می‌گیریم.

۳- اگر پارامتر هر دو یال متقاطع (M) یا یکی با پارامتر (L) و دیگری با پارامتر H باشد، آن‌گاه پارامتر آن تقاطع را (M) در نظر می‌گیریم. دراین‌صورت داریم:

$$
\begin{aligned}
F(L,M)&=\{C,D,d,e,E,F,G,K,N,O,P,Q,V,W,X,Z\},\\
K(L,M)&=\{eG,FV,EV,PZ,PW,Vd,XW,CK,EQ,NK,OK,\\
&\quad OD,XZ,Zd,dX\},\\
F(M,H)&=\{A,a,B,b,C,D,d,E,F,G,J,K,m,N,O,Q,R,S,T,U,\\
&\quad V,W,X,Z\},\\
K(M,H)&=\{CK,EQ,NK,OK,OD,XZ,Zd,dX,AT,DG,DR,\\
&FG,GY,EF,ET,md,mU,BS,NY,Yb,BU,BR,JN,LW,UW,dV,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& Xa, IN, VY\},\\
F(L,H) = & \{A, a, B, b, D, d, E, e, F, G, J, m, N, O, P, R, S, T, U, V, W,\\
& X, Y, Z\},\\
K(L,H) = & \{eG, FV, EV, PZ, PW, Vd, XW, AT, DG, DR, FG, GY,\\
& EF, ET, md, mU, BS, NY, YbBU, BR, JN, OX, UW, dV,\\
& Xa, IN, VY\}.
\end{aligned}
$$

گراف نرم G' در شکل ۱۴ نشان داده شده‌است. در حالتی که پارامتر تقاطع (H) باشد باید در جهت رفع آن اقدام کنیم. این دسته‌بندی‌ها به ما کمک می‌کند تا جریان‌های



شکل ۱۴: گراف نرم G'

ترافیکی در یک شهر را کنترل کنیم و نقاط تقاطع را در مسیرهای پرترافیک مشخص کرده و در جهت رفع این مشکل برآییم که این کار را می‌توان با حذف چهارراه‌ها و نقاط تقاطع خیابان‌ها با ساختن پل یا مسیرهای زیرگذر انجام داد.

۵ نتیجه گیری

مولودسوف مفهوم مجموعه‌های نرم را به عنوان یک ابزار ریاضی عمومی برای مقابله با عدم قطعیت معرفی کرد و بسیاری از محققان مدل‌های ریاضی دیگری را برای حل مشکلات در تصمیم گیری ایجاد کرده‌اند در ادامه اکرم مفهوم گراف‌های نرم را بیان و برخی اعمال را بر روی آن‌ها تعریف کرد. در ادامه ما برخی از نتایج جدید در گراف‌های نرم مانند ماتریس مجاورت نرم و برخی از اعمال روی ماتریس مجاورت نرم مانند اجتماع، اشتراک، جمع و تفاضل را ارائه کرده‌ایم و سپس مفهوم گراف نرم مسطح را بیان کردیم. علاوه بر این، ما در آینده قصد داریم تحقیقات خود را در مورد متمم گراف‌های نرم،

جورسازی گراف‌های نرم، مجموعه‌های چندگانه نرم فازی، گراف‌های چندگانه نرم فازی، مجموعه‌های چندگانه نرم مبهم و گراف‌های چندگانه نرم مبهم گسترش دهیم. سپس به بررسی برخی از روابط و گزاره‌های آن‌ها می‌پردازیم. همچنین سعی خواهیم کرد کاربردهای آن‌ها را در کنترل ترافیک شهری، شبکه اجتماعی، اقتصادی، علمی، علوم پزشکی و محیط زیست بررسی کنیم.

مراجع

[1] M. Akram, S. Nawaz, Operations on soft graphs, *Fuzzy Information and Engineering*, **7(4)** (2015), 423-449.

[2] M. Akram, S. Nawaz, On fuzzy soft graphs, *Italian Journal of Pure and Applied Mathematics*, **34** (2015), 497-514.

[3] M. Akram, S. Nawaz, Fuzzy soft graphs with applications, *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*, **30(6)** (2016), 3619-3632.

[4] H. Aktas, N.Cagman, Soft sets and soft graphs, *Information Sciences*, **177** (2007), 2727-2735.

[5] M. I. Ali, F. Feng, X. Liu, W. K. Min, M. Shabir, On some new operations in soft set theory, *Computers and Mathematics with Applications*, **57** (2009), 1547-1553.

[6] M. Baghernejad, R. A. Borzooei, Vague multigraph, *Soft Computing*, 23(2019), 12607–12619 .

[7] J. A. Bondy, U. S. R. Murty, **Graph Theory With Applications**, Nurth-Holand, add publisher, 1976.

[8] R. A. Borzooei, Elham Babaei, Y. B. Jun, M. Aaly Kologani, M. Mohseni Takallo, Soft Set Theory Applied to Hoops, *Analele Stiintifice ale Universitatii Ovidius Constanta, Seria Matematica*, **28(1)** (2020), 61-79.

[9] R. A. Borzooei and H. Rashmanlou, Dominating in vague graph and its applications, *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*, **29** (2015) 1933-1940.

[10] R. A. Borzooei and H. Rashmanlou, Cayley interval-valued fuzzy graphs,*UPB Scientific Bulletin*, Series A: Applied Mathematics and Physics**78(3)**(2016)83-94.

[11] R. A. Borzooei, H. Rashmanlou, S. Samanta and M. Pal, A study on fuzzy labeling graphs, *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*, **30(6)** (2016) 3349-3355.

[12] P.K. Maji, A.R. Roy, R. Biswas, Fuzzy soft-sets, *Journal of Fuzzy Mathematics*, **9(3)** (2001), 589-602.

[13] P. K. Maji, A. R. Roy, R. Biswas, An application of soft set in a decision making problem, *Computers and Mathematics with Applications*, **44(8-9)**(2002), 1077-1083.

[14] P. K. Maji, A. R. Roy, R. Biswas, Soft set theory, *Computers and Mathematics with Applications*, **45(4-5)** (2003), 555-562.

[15] D. A. Molodtsov, Soft set theory-first results, *Computers and Mathematics with Applications*, **37** (1999), 19-31.

[16] A. R. Roy, P. K. Maji, A fuzzy soft set theoretic approach to decision making problems, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **203 (2)** (2007) 412-418.

[17] R. K. Thumbakara, B. George, Soft graphs, *General Mathematics Notes*, **21(2)** (2014), 75-86.

[18] B. K. Tripathy, K. R. Arun, A new approach to soft sets, soft multisets and their properties, *International Journal Reasoning, Based Intelligent Systems*, **7(3/4)** (2015), 244-253.