سیستم‌های فازی و کاربردها
شاپای چاپی: ۴۴۰۹-۲۷۱۷
سال پنجم، شماره دوم (پائیز و زمستان ۱۴۰۱)
شاپای الکترونیکی: ۳۹۸۴-۲۷۱۷
صص. ۲۷۱ تا ۲۹۲
DOI:10.22034/JFSA.2022.330542.1112

آزمون آماری براساس فرضیه‌های فازی شهودی

زهرا اصغری، حسن زارعی* و محمد قاسم اکبری

دانشگاه سیستان و بلوچستان، دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر، گروه آمار، زاهدان، ایران
دانشگاه سیستان و بلوچستان، دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر، گروه آمار، زاهدان، ایران
دانشگاه بیرجند، دانشکده علوم ریاضی و آمار، گروه آمار، بیرجند، ایران

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۱۲/۱ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۹/۱۵
نوع مقاله: علمی-پژوهشی

چکیده

آزمون فرضیه‌ها نقش مهمی در استنباط‌های آماری ایفا می‌کنند. روش‌های کلاسیک در آزمون فرضیه مبتنی بر مفروضاتی از قبیل دقیق بودن مشاهدات، دقیق بودن فرضیات آزمون، دقیق بودن پارامتر مجهول و ... می‌باشد، ولی در جهان واقعی گاهی این مفروضات برقرار نیستند. نظریه‌ی مجموعه های فازی و نظریه‌ی مجموعه‌های فازی شهودی، راه‌های مناسب برای صورت بندی و تحلیل این‌گونه مفاهیم و موضوعات نادقیق می‌باشند.

در این مقاله پس از تعریف متغیر تصادفی فازی شهودی براساس α -شک و فرضیه‌های فازی شهودی روشی برای آزمودن یک نمونه تصادفی کلاسیک و فرضیه فازی شهودی ارائه می‌دهیم.

عبارات و کلمات کلیدی: مجموعه فازی شهودی، آزمون آماری، فرضیه فازی شهودی، α-شک

Email(s): zarei@math.usb.ac.ir, g_z_akbari@birjand.ac.ir.

Mathematics Subject Classification:

۱۴۰۱ انجمن سیستم‌های فازی ایران

۱ سرآغاز

نظریه مجموعه‌های فازی توسط افراد بسیاری در زمینه‌های مختلف بسط و توسعه داده شده است. یکی از این نظریه‌های توسعه یافته، نظریه مجموعه فازی شهودی (یا فازی فاصله‌ای مقدار) است که توسط آتاناسوف [1] [۵] معرفی شد. گایو [2] و بوهرر [3] [۱۱] ، با رویکردی متفاوت، مجموعه‌های مبهم را به عنوان تعمیمی از مجموعه‌های فازی پیشنهاد دادند. نظریه مجموعه‌های فازی شهودی نیز به عنوان تعمیم دیگری از نظریه مجموعه‌های فازی توسط آتاناسوف و گارگوف [4] [۸] و گورزالسزنی [5] [۱۲] مطرح شد. در هر سه رویکرد میزان عضویت هر عنصر در یک مجموعه توسط یک بازه بسته از $[۰,۱]$ (به جای یک عدد از فاصله $[۰,۱]$)مشخص می‌شود. تفاوت مجموعه‌های تعمیم یافته از مجموعه‌های فازی به صورت‌بندی و نمایش آن‌ها بر می‌گردد و تعریف این مجموعه‌ها اساساً تفاوتی با هم ندارند [۹].

در نظریه مجموعه‌های فازی درجه عضویت عنصر x در مجموعه $\tilde{A}$ با $\tilde{A}_\mu(x)$ مشخص می‌شود. بنابراین، درجه عدم عضویت عنصر x به مجموعه $\tilde{A}$ برابر $۱-\tilde{A}_\mu(x)$ است. مثلاً فردی با طول قد ۱۷۰ سانتی متر، به میزان ۰٫۷ بلند قد است و به میزان ۰٫۳ بلند قد نیست. اما همیشه نیز عدم عضویت x به مجموعه $\tilde{A}$ برابر با $۱-\tilde{A}_\mu(x)$ نیست. [۱۸]

۲ مجموعه فازی شهودی

در این قسمت بر پایه رویکرد آتاناسوف و گارگوف و گورزالسزنی، به معرفی مجموعه‌های فازی شهودی می‌پردازیم. مطالب این قسمت بر اساس مراجع [۱۳]، [۱۵] و [۱۰] می باشد.

تعریف ۱.۲. یک مجموعه فازی شهودی $\tilde{A}$، از مجموعه مرجع X، به صورت سه تایی

$$\tilde{A}=\{(x,\tilde{A}_\mu(x),\tilde{A}_\nu(x)):x\in X\},$$

[1] Atanassov
[2] Gau
[3] Buehrer
[4] Gargov
[5] Gorzalczany

تعریف می‌شود که $\tilde{A}_\mu(x) : X \to [۰,۱]$ تابع عضویت و $\tilde{A}_\nu(x) : X \to [۰,۱]$ تابع عدم عضویت x در $\tilde{A}$ هستند و در شرط زیر صدق می‌کنند:

$$۰ \leqslant \tilde{A}_\mu(x) + \tilde{A}_\nu(x) \leqslant ۱, \qquad \forall x \in X$$

و همچنین به $\pi_{\tilde{A}}(x) = ۱ - \tilde{A}_\mu(x) - \tilde{A}_\nu(x)$ درجه عدم قطعیت x در مجموعه فازی شهودی $\tilde{A}$ گویند.

ملاحظه ۲.۲. اگر در یک مجموعه فازی شهودی برای هر x ، $\tilde{A}_\nu(x) = ۱ - \tilde{A}_\mu(x)$ باشد، آنگاه مجموعه $\tilde{A}$ به یک مجموعه فازی معمولی کاهش می‌یابد.
در حالت گسسته تابع عضویت یک مجموعه شهودی $\tilde{A}$ از x را به صورت زیر نمایش می‌دهند:

$$\tilde{A} = \left\{ \frac{[\tilde{A}_\mu(x_۱), ۱ - \tilde{A}_\nu(x_۱)]}{x_۱}, ..., \frac{[\tilde{A}_\mu(x_n), ۱ - \tilde{A}_\nu(x_n)]}{x_n} \right\}$$

مثال ۳.۲. فرض کنید $X = ۱,۲,...,۱۰$ باشد. مجموعه فازی شهودی « $\tilde{A}$: اعداد کوچک» را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$\tilde{A} = \left\{ \frac{[۱,۱]}{۱}, \frac{[۰/۹,۱]}{۲}, \frac{[۰/۶,۰/۸]}{۳}, \frac{[۰/۳,۰/۵]}{۴}, \frac{[۰/۱,۰/۲]}{۵} \right\}$$

برای نمونه $\frac{[۰/۶,۰/۸]}{۳}$ به این معنی است که عدد ۳، حداقل به اندازه‌۰/۶ و حداکثر به میزان ۰/۸ عضو مجموعه اعداد کوچک می‌باشد.

تعریف ۴.۲. فرض کنید $\tilde{A}$ یک مجموعه فازی شهودی ازX باشد. آنگاه α ‌-برش $\tilde{A}$ به صورت مجموعه‌ی زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{cases} \tilde{A}^{\mu}_{[\alpha]} = \{x : \tilde{A}_\mu(x) \geqslant \alpha\}, & \alpha \in [۰,۱] \\ \\ \tilde{A}^{۱-\nu}_{[\alpha]} = \{x : ۱ - \tilde{A}_\nu(x) \geqslant \alpha\}. & \alpha \in [۰,۱] \end{cases}$$

در این قسمت مفاهیمی در مورد اعداد فازی شهودی و نوع ویژه‌ای از آن‌ها، موسوم به اعداد فازی شهودی LR را مرور می‌کنیم.

تعریف ۵.۲. یک مجموعه فازی شهودی $\tilde{A}$ را یک عدد فازی شهودی گویند، اگر و تنها اگر $\tilde{A}_{\mu}(.)$ و $۱ - \tilde{A}_{\nu}(.)$ توابع عضویت مربوط به یک عدد فازی باشند. مجموعه همه اعداد فازی شهودی را با $\mathcal{IF}(\mathcal{R})$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۶.۲. [۱۳] عدد فازی شهودی $\tilde{A}$ را یک عدد فازی شهودی LR نامند، اگر توابع عضویت و عدم عضویت آن به شکل زیر باشند:

$$\tilde{A}_{\mu}(x) = \begin{cases} L(\frac{\mu - x}{l}), & \mu - l \leqslant x < \mu, \\ ۱ & x = \mu, \\ R(\frac{x - \mu}{r}), & \mu < x < \mu + r, \\ ۰ & \text{جاهای دیگر} \end{cases}$$

$$\tilde{A}_{\nu}(x) = \begin{cases} ۱ - L(\frac{\mu - x}{l'}), & \mu - l' \leqslant x < \mu, \\ ۰ & x = \mu, \\ ۱ - R(\frac{x - \mu}{r'}), & \mu < x < \mu + r', \\ ۱ & \text{جاهای دیگر} \end{cases}$$

که $L(.)$ و $R(.)$ توابعی اکیداً نزولی از $[۰, \infty)$ به $[۰, ۱]$ می‌باشند و $R(۰) = L(۰) = ۱$. $l, r \in [۰, \infty)$ به ترتیب پهنای چپ و پهنای راست تابع $\tilde{A}_{\mu}(x)$ و $l', r' \in [۰, \infty)$ نیز به ترتیب پهنای چپ و پهنای راست تابع $\tilde{A}_{\nu}(x)$ هستند. بنابراین یک عدد فازی شهودی LR را می‌توان به صورت $\tilde{A} = (\mu, l, r, l', r')_{LR}$ نشان داد.

ملاحظه ۷.۲. عدد فازی شهودی $\tilde{A} = (\mu; l, r, l', r')$ را یک عدد فازی شهودی مثلثی (TIFN) می‌نامیم. اگر برای هر $L(x) = R(x) = ۱ - x, x \in [۰, ۱]$
و به صورت $\tilde{A} = (\mu; \ell, r, l', r')_{T}$ نشان می‌دهیم در حالت خاص زمانی که $l_۱ = r_۱$ و

$l_۲ = r_۲$ باشد، $\tilde{A}$ را عدد فازی شهودی مثلثی متقارن می‌نامیم.

ملاحظه ۸.۲. فرض کنید $\tilde{A} = (\mu; l, r, l', r')$ یک عدد فازی شهودی مثلثی باشد آنگاه $l' \geq l$ و $r' \geq r$ می‌باشد.

ملاحظه ۹.۲. اگر $\tilde{A} = (\mu, l, r, l^{'}, r^{'})_{LR}$ یک عدد فازی شهودی LR باشد، آنگاه α-برش $\tilde{A}$ به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\tilde{A}[\alpha] = \{[\tilde{A}^{\mu L}_{[\alpha]}, \tilde{A}^{\mu U}_{[\alpha]}], [\tilde{A}^{۱-\nu L}_{[\alpha]}, \tilde{A}^{۱-\nu U}_{[\alpha]}]\}$$

که در آن

$$\begin{cases} [\tilde{A}^{\mu L}_{[\alpha]}, \tilde{A}^{\mu U}_{[\alpha]}] = \left(\mu - lL^{-۱}(\alpha), \mu + rR^{-۱}(\alpha)\right), \\ [\tilde{A}^{۱-\nu L}_{[\alpha]}, \tilde{A}^{۱-\nu U}_{[\alpha]}] = \Big(\mu - l^{'}L^{-۱}(\alpha), \mu + r^{'}R^{-۱}(\alpha)\Big). \end{cases}$$

تعریف ۱۰.۲. اگر $\tilde{A} = (\mu, l, r, l^{'}, r^{'})_{LR}$ یک عدد فازی شهودی LR باشد، درجه اعتبار آن به ترتیب برای $\tilde{A}_{mu}(x)$ و $۱ - \tilde{A}_{\nu}(x)$ به صورت زیر

$$C\{\tilde{A} \leq x\} = \begin{cases} \frac{۱}{۲}L(\frac{\mu - x}{l}) & x \leq \mu, \\ \\ ۱ - \frac{۱}{۲}R(\frac{x - \mu}{r}) & x \geq \mu, \end{cases}$$

$$C\{\tilde{A} \leq x\} = \begin{cases} \frac{۱}{۲}L(\frac{\mu - x}{l^{'}}) & x \leq \mu, \\ \\ ۱ - \frac{۱}{۲}R(\frac{x - \mu}{r^{'}}) & x \geq \mu, \end{cases}$$

و α-شک $\tilde{A}$ به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\tilde{A}_\alpha = \begin{cases} \dfrac{\mu - l(۱+۲\alpha) + \mu - l'(۱+۲\alpha)}{۲} & ۰ \leqslant \alpha < ۰/۵, \\ \\ \dfrac{\mu - r(۱-۲\alpha) + \mu - r'(۱-۲\alpha)}{۲} & ۰/۵ \leqslant \alpha < ۱. \end{cases}$$

$$\tilde{A}^{\mu}_{\alpha}(x) = \begin{cases} L(\frac{\mu-x}{l}) & \mu - l \leqslant x < \mu \\ ۱ & x = \mu \\ R(\frac{x-\mu}{r}) & \mu < x < \mu + r \\ ۰ & \text{جاهای دیگر} \end{cases}$$

تعریف ۱۱.۲. هرگاه $A = \{(x, \tilde{A}_\mu(x), \tilde{A}_\nu(x))\}$ و $B = \{(x, \tilde{B}_\mu(x), \tilde{B}_\nu(x)\}$ دو عدد فازی شهودی باشند داریم:

$$\tilde{A}^{\nu}_{\alpha}(x) = \begin{cases} ۱ - L(\frac{\mu-x}{l'}) & \mu - l' \leqslant x < \mu \\ ۰ & x = \mu \\ ۱ - R(\frac{x-\mu}{r'}) & \mu < x < \mu + r \\ ۱ & \text{جاهای دیگر} \end{cases}$$

۱) $A = B$ اگر $(\tilde{A}^{\mu})_\alpha = (\tilde{B}^{\mu})_\alpha$ و $(\tilde{A}^{۱-\nu})_\alpha = (\tilde{B}^{۱-\nu})_\alpha$ برای هر $\alpha \in [۰, ۱]$

۲) $A < B$ اگر $(\tilde{A}^{\mu})_\alpha < (\tilde{B}^{\mu})_\alpha$ و $(\tilde{A}^{۱-\nu})_\alpha < (\tilde{B}^{۱-\nu})_\alpha$ برای هر $\alpha \in [۰, ۱]$

۳) $A > B$ اگر $(\tilde{A}^{\mu})_\alpha > (\tilde{B}^{\mu})_\alpha$ و $(\tilde{A}^{۱-\nu})_\alpha > (\tilde{B}^{۱-\nu})_\alpha$ برای هر $\alpha \in [۰, ۱]$

۴) $A \neq B$ اگر $\tilde{A} < \tilde{B}$ یا $\tilde{A} > \tilde{B}$ آنگاه $(\tilde{A}^{\mu})_\alpha \neq (\tilde{B}^{\mu})_\alpha$ و $(\tilde{A}^{۱-\nu})_\alpha \neq (\tilde{B}^{۱-\nu})_\alpha$ برای هر $\alpha \in [۰, ۱]$

ملاحظه ۱۲.۲. برای عدد فازی شهودی $A = \{\langle x, \tilde{A}_\mu(x), \tilde{A}_\nu(x) : x \in R\rangle\}$ زمانیکه

$$\tilde{A}^\beta_\alpha = A(\alpha,\beta) = \begin{cases} \beta \tilde{A}^\mu_\alpha + (۱-\beta)\tilde{A}^{۱-\nu}_\alpha & ۰ \leqslant \alpha \leqslant ۰/۵, \\ \beta \tilde{A}^{۱-\nu}_\alpha + (۱-\beta)\tilde{A}^\mu_\alpha & ۰/۵ \leqslant \alpha \leqslant ۱, \end{cases}.$$

وقتی

$$\beta \in [۰,۱] \quad , \tilde{A}^\mu[\alpha] = [A^۱_{\frac{\alpha}{۲}}, A^۰_{۱-\frac{\alpha}{۲}}], \quad \tilde{A}^{۱-\nu}[\alpha] = [A^۰_{\frac{\alpha}{۲}}, A^۱_{۱-\frac{\alpha}{۲}}]$$

همچنین $\tilde{A}^\beta_\alpha$ نسبت به α و β صعودی می باشد.
آنگاه برای دو عدد فازی شهودی $\tilde{B}$ و $\tilde{A}$ که مطابق تعریف ۱۱.۲ به راحتی میتوان نشان داد:

۱) $A = B$ ، اگر $A^\beta_\alpha = A(\alpha,\beta) = B^\beta_\alpha = B(\alpha,\beta)$ برای هر $\alpha,\beta \in [۰,۱]$.

۲) $A < B$ ، اگر $A(\alpha,\beta) < B(\alpha,\beta)$ برای هر $\alpha,\beta \in [۰,۱]$.

۳) $A > B$ ، اگر $A(\alpha,\beta) > B(\alpha,\beta)$ برای هر $\alpha,\beta \in [۰,۱]$.

۴) $A \neq B$ ، اگر $A(\alpha,\beta) \neq B(\alpha,\beta)$ برای هر $\alpha,\beta \in [۰,۱]$.

لم ۱۳.۲. *(طاهری و زارعی [۱۵]، پراد و دابیوس [۱۰]) اگر $\tilde{A}_i = (\mu_i, l_i, r_i, l'_i, r'_i)_{LR}$ دو عدد فازی شهودی LR باشند و $\lambda \in R - \{۰\}$ آنگاه داریم:*

$$\begin{aligned} \tilde{A}_۱ \oplus \tilde{A}_۲ &= (\mu_۱, l_۱, r_۱, l'_۱, r'_۱)_{LR} \oplus (\mu_۲, l_۲, r_۲, l'_۲, r'_۲)_{LR} \\ &= (\mu_۱+\mu_۲; l_۱+l_۲; r_۱+r_۲; l'_۱+l'_۲; r'_۱+r'_۲) \end{aligned} \qquad (۱)$$

$$\tilde{A}_۱ \ominus \tilde{A}_۲ = (\mu_۱, l_۱, r_۱, l'_۱, r'_۱)_{LR} \oplus (-\mu_۲, r_۲, l_۲, r'_۲, l'_۲)_{LR}$$
$$= (\mu_۱ - \mu_۲; l_۱ + r_۲; r_۱ + l_۲; l'_۱ + r'_۲; r'_۱ + l'_۲) \qquad (۲)$$

$$\lambda \otimes \tilde{A}_۱ = \begin{cases} (\lambda\mu_۱; \lambda l_۱; \lambda r_۱; \lambda l'_۱; \lambda r'_۱), & \lambda > ۰ \\ (\lambda\mu_۱; -\lambda r_۱; -\lambda l_۱; -\lambda r'_۱; -\lambda l'_۱). & \lambda < ۰. \end{cases} \qquad (۳)$$

لم ۱۴.۲. *(طاهری و زارعی [۱۵]) اگر $\tilde{A}, \tilde{B} \in I\mathcal{F}(\mathcal{R})$ دو عدد فازی شهودی باشند، آنگاه*

$$\begin{cases} (\tilde{A}^{\mu} \oplus \tilde{B}^{\mu})_{\alpha} = \tilde{A}^{\mu}_{\alpha} + \tilde{B}^{\mu}_{\alpha} \\ (\tilde{A}^{۱-\nu} \oplus \tilde{B}^{۱-\nu})_{\alpha} = \tilde{A}^{۱-\nu}_{\alpha} + \tilde{B}^{۱-\nu}_{\alpha} \end{cases}$$

۳ متغیر تصادفی فازی شهودی بر اساس α -شک

در این بخش ابتدا متغیر تصادفی فازی شهودی را بر اساس زینلی و همکاران [۱۹] تعریف نموده و سپس نمونه تصادفی فازی را مورد بررسی قرار خواهیم داد.

تعریف ۱.۳. (زینلی [۱۹])، $\tilde{X} : \Omega \to \mathcal{F}_{LR}(\mathcal{R})$ یک متغیر تصادفی فازی شهودی از فضای احتمال (Ω, A, p) است اگر برای هر $\alpha \in (۰, ۱]$ ، $\frac{\tilde{X}^{\mu}_{\alpha} + \tilde{X}^{۱-\nu}_{\alpha}}{۲} : \Omega \to \mathcal{R}$ یک متغیر تصادفی کلاسیک باشد.

فرض کنید $\tilde{X}$ یک متغیر تصادفی فازی شهودی باشد امید ریاضی آن را با $\tilde{E}(\tilde{X})$ نشان داده و

$$\begin{aligned} \tilde{E}(\tilde{X})_{\alpha} &= E(\tilde{X}_{\alpha}) \\ &= \int_{\Omega} \tilde{X}_{\alpha} dp \\ &= \int_{\Omega} \frac{\tilde{X}^{\mu}_{\alpha} + \tilde{X}^{۱-\nu}_{\alpha}}{۲} dp. \end{aligned}$$

تعریف ۲.۳. [۴] اگر $\tilde{X}$ و $\tilde{Y}$ دو متغیر تصادفی فازی شهودی باشند، $\tilde{X}$ و $\tilde{Y}$ را مستقل

گوییم اگر و فقط اگر هر متغیر تصادفی $\tilde{X}_\alpha$ از هر متغیر تصادفی دیگر $\tilde{Y}_\alpha$ به ازای هر $۱ \leqslant \alpha < ۰$ مستقل باشد.

اگر $\tilde{X}$ و $\tilde{Y}$ دو متغیر تصادفی فازی شهودی باشند، $\tilde{X}$ و$\tilde{Y}$ را هم‌توزیع گوییم اگر و فقط اگر متغیرهای تصادفی معمولی $\{\tilde{X}^{\mu}_{\alpha}, \tilde{X}^{۱-\nu} : ۰ < \alpha \leqslant ۱\}$ و $\{\tilde{Y}^{\mu}_{\alpha}, \tilde{Y}^{۱-\nu} : ۰ < \alpha \leqslant ۱\}$ هم‌توزیع باشند.

۴ فرضیه‌های فازی شهودی

در ادامه حالات فرضیه فازی شهودی که حالت کلی تر از فرضیه‌های فازی است را بیان می‌کنیم.

یکی از مسائل مهم در آزمون‌های آماری، تنظیم و صورت‌بندی فرضیه‌هاست. گاهی، ماهیت فرضیه‌ها به گونه‌ای می‌باشد که به شکل یک فرضیه دقیق فرمول‌بندی نمی‌شود. به عنوان مثال فرض کنید می‌خواهیم درباره‌ی قطر واشرهای تولیدی یک کارخانه، و این که آیا متوسط طول قطر واشرها در حد استاندارد $\mu_۰$ است یا خیر، تحقیقی انجام بدهیم طبق شیوه رایج در آمار استنباطی، برای آزمون استاندارد بودن قطرواشرها از آزمون فرضیه $H_۰ : \mu = \mu_۰$ در برابر فرضیه $H_۱ : \mu \neq \mu_۰$ استفاده می‌شود. اما واضح است که در این مسئله، اگر متوسط قطر واشرها اندکی با $\mu_۰$ تفاوت داشته باشد، واشرها همچنان پذیرفتنی اند و خط تولید خارج از استاندارد تلقی نمی‌شود. مثلا قطر استاندارد برای واشرهای تولید شده این کارخانه ۱/۲ میلی متر است. اما اگر قطر واشر تولیدی حداقل ۱ و حداکثر ۱/۴ میلی متر باشد و همچنان مورد استفاده قرار می گیرد و پذیرفتنی است. با این تفاوت که واشری با قطر ۱ میلی متر خیلی راحت اما واشری با قطر ۱/۴ میلی متر سخت بسته می شود. بنابراین، واشرهای تولیدی با قطر حداقل ۱ و حداکثر ۱/۴ میلی متر با درجه عضویت یکسان به مجموعه واشرهای استاندارد تعلق ندارند. در حالت فازی واشری مثلا با قطر ۱/۳ میلی متر به میزان ۰/۵ به مجموعه واشرهای استاندارد تعلق دارد اما، گاهی نمی توان درجه عضویت را با یک عدد مشخص کرد به عبارتی درجه عضویت در یک بازه تغییر می کند. مثلاً واشری با قطر ۱/۳ میلی متر دست کم ۰/۶ و حداکثر ۰/۹ به مجموعه واشرهای استاندارد تعلق دارد. بنابراین طبیعی است که اگر μ تقریباً برابر با $\mu_۰$ باشد محصولات کارخانه پذیرفته شوند و در غیر این صورت استاندارد بودن خط تولید و

لذا محصولات کارخانه رد شود. از این رو فرضیه‌های واقعی در این مسئله عبارتند از:

$$\begin{cases} H_0 : \ \mu \ \text{تقریباً} \ \mu_0 \ \text{است} \\ H_1 : \mu \ \text{از} \ \mu_0 \ \text{دور است} \end{cases}$$

در زیر به بیان برخی از حالات فرضیه‌های فازی شهودی (که فرضیه‌های آن به صورت عدد فازی شهودی بیان می‌شوند) را می‌آوریم.

الف)
$$\begin{cases} H_0 : \ \theta \ \text{تقریباً برابر} \ \theta_0 \ \text{است} \ (\tilde{\theta} = \tilde{\theta}_0) \\ H_1 : \ \theta \ \text{تقریباً برابر} \ \theta_1 \ \text{است} \ (\tilde{\theta} \neq \tilde{\theta}_1) \end{cases}$$

ب)
$$\begin{cases} H_0 : \ \theta \ \text{تقریباً برابر} \ \theta_0 \ \text{است} \ (\tilde{\theta} = \tilde{\theta}_0) \\ H_1 : \ \theta \ \text{تقریباً برابر} \ \theta_0 \ \text{نیست} \ (\tilde{\theta} \neq \tilde{\theta}_0) \end{cases}$$

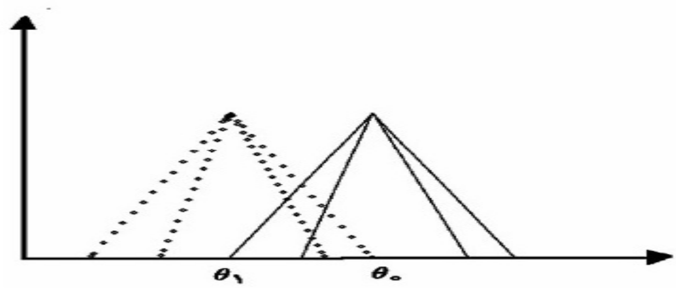
ج)
$$\begin{cases} H_0 : \ \theta \ \text{تقریباً برابر} \ \theta_0 \ \text{است} \ (\tilde{\theta} = \tilde{\theta}_0) \\ H_1 : \ \theta \ \text{اساساً بزرگتر از} \ \theta_0 \ \text{است} \ (\tilde{\theta} \geq \tilde{\theta}_0) \end{cases}$$

د)
$$\begin{cases} H_0 : \ \theta \ \text{تقریباً برابر} \ \theta_0 \ \text{است} \ (\tilde{\theta} = \tilde{\theta}_0) \\ H_1 : \ \theta \ \text{اساساً کوچکتر از} \ \theta_0 \ \text{است} \ (\tilde{\theta} \leq \tilde{\theta}_0) \end{cases}$$

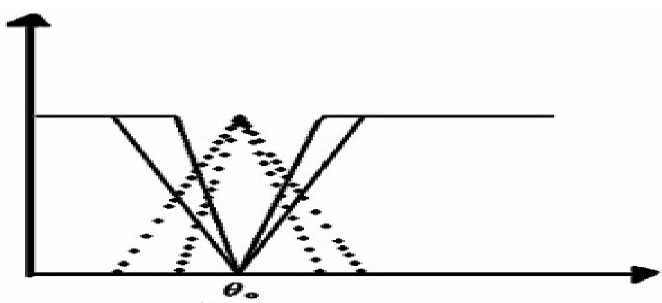
و)
$$\begin{cases} H_0 : \ \theta \ \text{اساساً بزرگتر از} \ \theta_0 \ \text{است} \ (\tilde{\theta} \geq \tilde{\theta}_0) \\ H_1 : \ \theta \ \text{اساساً بزرگتر از} \ \theta_0 \ \text{نیست} \ (\tilde{\theta} \geq \tilde{\theta}_0) \end{cases}$$

ه)
$$\begin{cases} H_0 : \ \theta \ \text{اساساً کوچکتر از} \ \theta_0 \ \text{است} \ (\tilde{\theta} \leq \tilde{\theta}_0) \\ H_1 : \ \theta \ \text{اساساً کوچکتر از} \ \theta_0 \ \text{نیست} \ (\tilde{\theta} \leq \tilde{\theta}_0) \end{cases}$$

فرضیات بالا به ترتیب در شکل‌های زیر نمایش داده می‌شوند



شکل ۱: *نمودار تابع عضویت فرضیه الف*

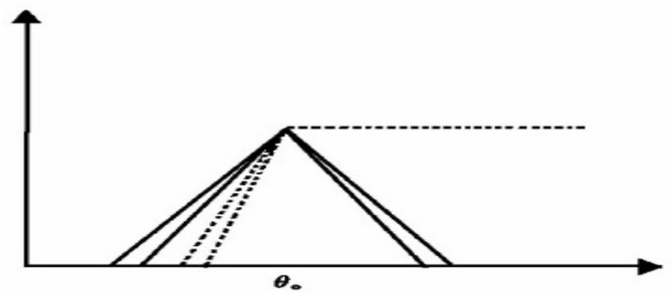


شکل ۲: *نمودار تابع عضویت فرضیه ب*

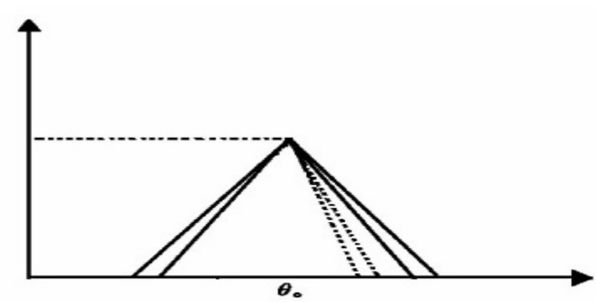
۵ آزمون آماری براساس فرضیه‌های فازی شهودی

در این بخش بر پایه یک نمونه تصادفی کلاسیک، و فرضیه فازی شهودی یک روش را برای آزمودن آن ارائه می‌دهیم.

در ابتدا مروری به اختصار در مورد آزمودن فرضیه در حالت کلاسیک داریم [۳]، [۱۴].
فرض کنید $\chi = (X_۱, X_۲, ..., X_n)$ یک نمونه تصادفی، با مقادیر مشاهده شده $x = (x_۱, ..., x_n)$ از جامعه‌ای با تابع چگالی f_θ که در آن $\theta \in \Theta \subseteq R$ باشد. فرضیه‌های آماری برای بررسی آزمون $H_۰ : \tilde{\theta} = \tilde{\theta}_۰$ در مقابل $H_۱ : \tilde{\theta} = \tilde{\theta}_۱$ را در نظر گرفته، که $\tilde{\theta}_۱ \neq \tilde{\theta}_۰$ است. تابع توان $\varphi(\chi)$ بوسیله $\pi_\varphi(\theta) = P_{\tilde{\theta}}(T(\chi) \in \Re)$ نشان داده می‌شود که $\Re \subseteq R$ ناحیه بحرانی می‌باشد. برای $\pi_\varphi(\tilde{\theta}_۰)$ خطای نوع اول می‌باشد که با α نشان داده شده و $\beta = ۱ - \pi_\varphi(\tilde{\theta}_۱)$ خطای نوع دوم می‌باشد، در نتیجه در یک سطح معنی داری δ فرضیه $H_۰$ رد می‌شود اگر و تنها اگر $p - value < \delta$ که، $p - value = \inf\{\delta \in [۰, ۱]; T(X) \in R\}$. بنابراین، برای پذیرش یا رد فرضیه $H_۰$،



شکل ۳: *نمودار تابع عضویت فرضیه ج*



شکل ۴: *نمودار تابع عضویت فرضیه د*

تابع آزمونی وجود دارد که در زیر نمایش داده شده است.

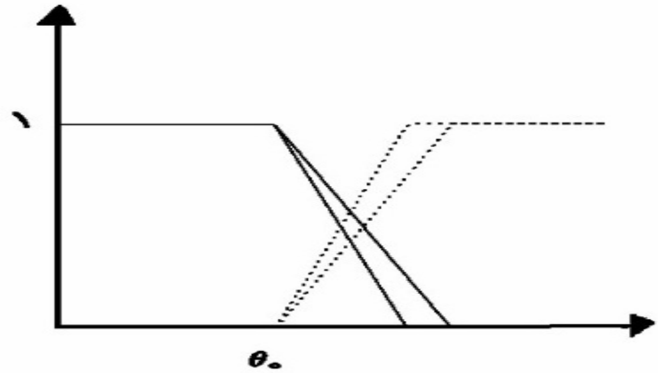
$$\psi(x) = \begin{cases} ۱ \quad if \quad p - value < \delta; \\ ۰ \quad if \quad p - value > \delta \end{cases}$$

تعریف ۱.۵. فرض کنید $\chi = (X_۱, ..., X_n)$ یک نمونه تصادفی کلاسیک با مقادیر مشاهده شده $x = (x_۱, ..., x_n)$ از جامعه ای با تابع چگالی f_θباشد، بطوریکه $R \supseteq \Theta \ni \theta$. در اینصورت باتوجه به تعریف ۱۱.۲

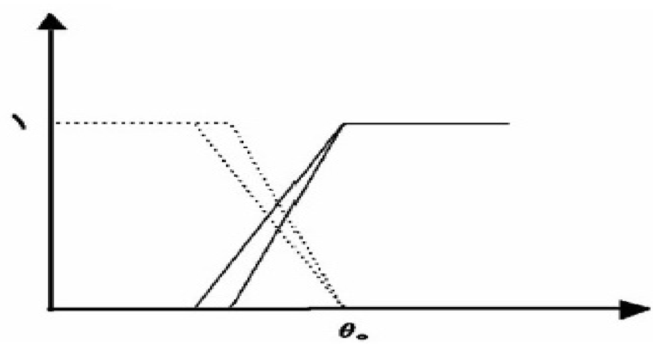
۱. هر فرضیه به شکل

$$\begin{cases} H_۰ : \tilde{\theta} = \tilde{\theta}_۰, \\ H_۱ : \tilde{\theta} = \tilde{\theta}_۱ \end{cases}$$

فرضیه فازی شهودی یک طرفه خوانده می‌شود که $\tilde{\theta}_۰$ و $\tilde{\theta}_۱$ پارامترهای فازی شهودی



شکل ۵: *نمودار تابع عضویت فرضیه و*



شکل ۶: *نمودار تابع عضویت ه*

هستند که $\tilde{\theta}_\circ \leq \tilde{\theta}_1$ یا $\tilde{\theta}_1 \leq \tilde{\theta}_\circ$ می‌باشد.

۲. هر فرضیه به شکل

$$\begin{cases} H_\circ : \tilde{\theta} = \tilde{\theta}_\circ, \\ H_1 : \tilde{\theta} = \tilde{\theta}_1 \text{ یا } H_1 : \tilde{\theta} \neq \tilde{\theta}_\circ \end{cases} \qquad (۴)$$

فرضیه فازی شهودی دوطرفه نامیده می‌شود که در آن $\tilde{\theta}_1 \neq \tilde{\theta}_\circ$ می‌باشد.

تعریف ۲.۵. مسئله آزمون فرضیه‌های فازی شهودی $H_\circ : \tilde{\theta} = \tilde{\boldsymbol{\theta}}_\circ$ در مقابل $H_1 : \tilde{\theta} = \tilde{\boldsymbol{\theta}}_1$ در تعریف ۱.۵، را در نظر بگیرید. بر اساس آماره آزمون $T(\mathcal{X})$ و ناحیه رد مخصوص $\mathcal{R}$ خطای نوع ۱ و خطای نوع ۲ و توان آزمون به صورت زیر تعریف می‌شود

۱- خطای نوع ۱

$$\boldsymbol{\alpha}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{\circ}) = \int_{\circ}^{۱}\int_{\circ}^{۱} P(T(\mathcal{X}) \in \mathcal{R} \mid H_{\circ} : \tilde{\theta} = \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{\circ}(\alpha,\beta))d\beta d\alpha. \qquad (۵)$$

۲- خطای نوع ۲

$$\boldsymbol{\beta}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{۱}) = \int_{\circ}^{۱}\int_{\circ}^{۱} P(T(\mathcal{X}) \notin \mathcal{R} \mid H_{۱} : \tilde{\theta} = \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{۱}(\alpha,\beta))d\beta d\alpha. \qquad (۶)$$

۳- توان آزمون

$$\boldsymbol{\pi}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{۱}) = \int_{\circ}^{۱}\int_{\circ}^{۱} P(T(\mathcal{X}) \in \mathcal{R} \mid H_{۱} : \tilde{\theta} = \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{۱}(\alpha,\beta))d\beta d\alpha = ۱-\boldsymbol{\beta}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{۱}). \qquad (۷)$$

همچنین بر اساس سطح معناداری δ، فرض $H_{\circ}$ رد می‌شود اگر و تنها اگر $p - value < \delta$که

$$p - value = \int_{\circ}^{۱}\int_{\circ}^{۱} \inf\{\delta \in [\circ,۱] : T(\mathcal{X}) \in (\mathcal{R}_{\delta})_{\beta}^{\alpha}\}d\beta d\alpha, \qquad (۸)$$

که در آن $(\mathcal{R}_{\delta})_{\beta}^{\alpha}$ ناحیه بحرانی برای آزمون $H_{\circ} : \tilde{\theta} = \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{\circ}(\alpha,\beta)$ در مقابل $H_{۱} : \tilde{\theta} = \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{۱}(\alpha,\beta)$ در سطح معناداری δ تعریف می‌شود.
این نکته حائز اهمیت است که بر اساس فرضیات فازی شهودی اصولی، معیارهای فوق ممکن است مقادیر منتظره از خطاهای نوع ۱ و نوع ۲ کلاسیک، $p-$مقدار و توان آزمون با توجه به توزیع یکنواخت روی $[\circ,۱] \times [\circ,۱]$ در نظر گرفته شود.
اکنون با استفاده از لم زیر می‌توان نشان داد که مفهوم پرتوانترین آزمون کلاسیک برای فرضیات فازی شهودی معتبر است.

لم ۳.۵. *فرض کنید مسئله آزمون $H_{\circ} : \tilde{\theta} = \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{\circ}$ در مقابل $H_{۱} : \tilde{\theta} = \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{۱}$ بر اساس نمونه تصادفی کلاسیک $\mathcal{X} = (X_{۱},...,X_{n})$ از خانواده چگالی‌های $\{f_{\theta}(x); x \in \mathbb{R}, \tilde{\theta} \in \Theta\}$ باشد. اگر خانواده توابع چگالی $\{f_{\theta}(x); x \in \mathbb{R}, \tilde{\theta} \in \Theta\}$ دارای ویژگی MLR در T باشد و $\varphi(\mathcal{X}) = I(T(\mathcal{X}) \in \mathcal{R}_{\delta})$ (که در آن $I(A)$، تابع نشانگر A می‌باشد) . یک*

تابع غیر صعودی از T باشد آنگاه $\boldsymbol{\pi}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}_۱) \leq \boldsymbol{\pi}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}_۲)$ برای هر $\tilde{\theta}_۱, \tilde{\theta}_۲ \in \mathcal{IF}(\Theta)$ که $\tilde{\theta}_۲ < \tilde{\theta}_۱$ می‌باشد.

اثبات. اثبات این لم بی درنگ از تعریف ۲.۵ و تعریف ۱۱.۲ پیروی می‌کند. بنابراین داریم

$$P\left(T(\mathcal{X}) \in \mathcal{R} \mid H_۱ : \theta_۱ = (\boldsymbol{\theta}_۱)(\alpha,\beta)\right) \leq P\left(T(\mathcal{X}) \in \mathcal{R} \mid H_۱ : \theta_۲ = (\boldsymbol{\theta}_۲)(\alpha,\beta)\right),$$
$$\forall \alpha, \beta \in [۰, ۱].$$

□

ملاحظه ۴.۵. اگر $\mathcal{X} = (X_۱, ..., X_n)$ نمونه‌ای تصادفی کلاسیک از جامعه‌ای با پارامترهای دقیق $\theta \in \mathbb{R}$ برای آزمون $H_۰ : \theta = \boldsymbol{\theta}_۰$ در مقابل $H_۱ : \theta = \boldsymbol{\theta}_۱$ در سطح معناداری δ باشد، این نکته حائز اهمیت است که اگر پارامترهای فازی شهودی و $\boldsymbol{\theta}_۱$ به مقادیر دقیق $\theta_۰$ و $\theta_۱$ ساده (تبدیل) شوند آنگاه بررسی خطای نوع ۱ و خطای نوع ۲، توان آزمون و $p-$ مقدار که ساده شده همان حالت کلاسیک می‌باشد، راحت است.

بنابراین روش پیشنهادی برای آزمون فرضیه‌های فازی شهودی با مشاهدات دقیق تعمیم‌یافته آزمون فرضیه‌های کلاسیک است در حالتیکه فرضیه‌های فازی شهودی ساده شده حالت کلاسیک هستند.

۶ چندین کاربرد

همانطور که قبلا اشاره شد، در مطالعات کاربردی فرضیه‌های فازی شهودی نسبت به حالت‌های دقیق یا به تنهایی فازی ترجیح داده می‌شود. شبیه حالت‌هایی که اغلب در علوم انسانی، مخصوصا در روانشناسی، مطالعات اجتماعی، مدیریت و موارد مشابه رخ می‌دهد. در این بخش چندین مثال کاربردی از آزمون آماری برای حالت پارامتری و ناپارامتری در کاربردهای جهان واقعی ارائه شده است.

مثال ۱.۶. اداره کنترل کیفیت از شرکت بزرگ ساخت سخت‌افزار در دو زمان بیشترین شکایت را نسبت به برگشت تغییر

پذیری قطر واشرها از ۴ سانتیمتر دریافت کرده است. در مواردی از شکایت، مدیر کنترل کیفیت خواسته آزمون کند آیا هیچ تفاوتی در تغییرپذیری قطر واشرهای تولید شرکت این ماه در برابر ماه پیشین وجود دارد یا نه؟ در حالیکه واریانس ۰٫۰۰۴ سانتیمترمربع است. مدیر یک نمونه تصادفی از ۲۰ واشر ساخت این ماه گرفته است. نتایج در جدول (۱) ثبت شده است و در قالب داده‌های واشر طبقه‌بندی شده است. قبلا از یک آزمون که نسبت به انحراف از نرمال بودن بسیار حساس بوده، استفاده می‌شد با استفاده از نمودار چندک-چندک تصمیم می‌گرفته آیا واشرها از توزیع نرمال هستند یا نه؟ در اینجا فرضیه فازی شهودی زیر در سطح معناداری ۰٫۰۵ آزمون می‌شود.

$$\begin{cases} H_0 : \sigma^2 = \boldsymbol{\sigma}_0^2 = (0.004; 0.001, 0.001; 0.002, 0.002)_T \\ H_1 : \sigma^2 \neq \boldsymbol{\sigma}_0^2 \end{cases}$$

ابتدا بر اساس داده‌های کلاسیک که در جدول (۱) آمده است، مقدار آماره‌های آزمون بوسیله $s^2 = 0.0053186$ بدست می‌آید. بنابراین با توجه به رابطه ۸، $p-$ مقدار از رابطه زیر سنجیده می‌شود

$$p\text{–}value = \int_0^1 \int_0^1 2 \min\{P_{H_0:\sigma^2=\boldsymbol{\sigma}_0^2(\alpha,\beta)}(S^2 \geq s^2), P_{H_0:\sigma^2=\boldsymbol{\sigma}_0^2(\alpha,\beta)}(S^2 \leq s^2)\} d\beta d\alpha,$$

که $(\tilde{\sigma_0^2})_\alpha^\mu = 0.004 - 0.001(1-2\alpha)$ و $(\tilde{\sigma_0^2})_\alpha^{1-v} = 0.004 - 0.002(1-2\alpha)$ و

$$\boldsymbol{\sigma}_0^2(\alpha,\beta) = \begin{cases} \beta(\tilde{\sigma_0^2})_\alpha^\mu + (1-\beta)(\tilde{\sigma_0^2})_\alpha^{1-v} & 0.0 \leq \alpha \leq 0.5, \\ \beta(\tilde{\sigma_0^2})_\alpha^{1-v} + (1-\beta)(\tilde{\sigma_0^2})_\alpha^\mu & 0.5 \leq \alpha \leq 1.0. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0.002 + 0.004\alpha + 0.001\beta - 0.002\alpha\beta \\ 0.003 + 0.002\alpha - 0.001\beta + 0.002\alpha\beta \end{cases}$$

از آنجا که $\chi^{۲}_{n-۱} = \frac{(n-۱)S^{۲}}{\boldsymbol{\sigma}^{۲}_{\circ}(\alpha,\beta)}$ از توزیع خی-دو با $n-۱$ درجه آزادی برای همه $\alpha,\beta \in [\circ,۱]$ پیروی می‌کند، داریم

$$p-value = \int_{\circ}^{۱}\int_{\circ}^{۱} ۲\min\{P(\chi^{۲}_{۱۹} \geq \frac{۱۹s^{۲}}{\boldsymbol{\sigma}^{۲}_{\circ}(\alpha,\beta)}), P(\chi^{۲}_{۱۹} \leq \frac{۱۹s^{۲}}{\boldsymbol{\sigma}^{۲}_{\circ}(\alpha,\beta)})\}d\beta d\alpha,$$
$$= \circ/۳۷۱۹$$

چون $p-value >> \circ/\circ۵$ نتیجه می‌گیریم که شواهد کافی وجود ندارد تا بگوییم که واریانس واشرهای ساخته شده این ماه متفاوت از تولیدات ماه پیشین است.
بنابراین توان آزمون در $\boldsymbol{\sigma}^{۲}_{۱} = (\circ/\circ\circ۷; \circ/\circ\circ\circ۵, \circ/\circ\circ\circ۵; \circ/\circ\circ۱, \circ/\circ\circ۱)$ با استفاده از رابطه ۶ به شکل زیر ارزیابی می‌شود

$$\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\sigma}^{۲}_{۱}) = \int_{\circ}^{۱}\int_{\circ}^{۱}(P(\chi^{۲}_{۱۹} \geq (\frac{\boldsymbol{\sigma}^{۲}_{\circ}(\alpha,\beta)}{\boldsymbol{\sigma}^{۲}_{۱}(\alpha,\beta)})\chi^{۲}_{\circ/\circ۲۵,۱۹})+$$
$$۱-P(\chi^{۲}_{۱۹} \leq (\frac{\boldsymbol{\sigma}^{۲}_{\circ}(\alpha,\beta)}{\boldsymbol{\sigma}^{۲}_{۱}(\alpha,\beta)})\chi^{۲}_{\circ/۹۷۵۱۹}))d\beta d\alpha,$$
$$= \circ/۴۹۳۶.$$

که در آن $\chi^{۲}_{\circ/\circ۲۵,۱۹} = ۳۲/۸۵۲$ و $\chi^{۲}_{\circ/۹۷۵,۱۹} = ۸/۹\circ۷$. برای مقایسه روش پیشنهادی با توجه به آزمون فرضیه‌های کلاسیک که در اینجا آزمون $H_{\circ}: \sigma^{۲} = \circ/\circ\circ۴$ در مقابل $H_{۱}: \sigma^{۲} \neq \circ/\circ\circ۴$ در سطح معناداری $\delta = \circ/\circ۵$ می‌باشد، چون

$$p-value = ۲\min\{P(\chi^{۲}_{۱۹} \geq \frac{۱۹s^{۲}}{\sigma^{۲}_{\circ}}, P(\chi^{۲}_{۱۹} \leq \frac{۱۹s^{۲}}{\sigma^{۲}_{\circ}})\} = \circ/۳\circ۴۱ >> \circ/\circ۵.$$

نتیجه می‌گیریم که دلایل کافی برای رد فرض $H_{\circ}$ وجود ندارد. بعلاوه توان آزمون برای $H_{\circ}: \sigma^{۲} = \circ/\circ\circ۴$ در مقابل $H_{۱}: \sigma^{۲} = \circ/\circ\circ۷$ بصورت زیر ارزیابی می‌شود

$$\boldsymbol{\pi} = P(\chi^{۲}_{۱۹} \geq (\frac{\boldsymbol{\sigma}^{۲}_{\circ}}{\boldsymbol{\sigma}^{۲}_{۱}})\chi^{۲}_{\circ/\circ۲۵,۱۹}) + ۱ - P(\chi^{۲}_{۱۹} \leq (\frac{\boldsymbol{\sigma}^{۲}_{\circ}}{\boldsymbol{\sigma}^{۲}_{۱}})\chi^{۲}_{\circ/۹۷۵۱۹})) = \circ/۴۷۲۲$$

جدول ۱: *قطر ۲۰ واشر طبقه‌بندی شده*

واحد	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
قطر	۴٫۰۶	۴٫۰۲	۴٫۰۴	۴٫۰۴	۳٫۹۷	۳٫۸۷	۴٫۰۳	۳٫۸۵	۳٫۹۱	۳٫۹۸
واحد	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰
قطر	۳٫۹۶	۳٫۹۰	۳٫۹۵	۴٫۱۱	۴٫۰۰	۴٫۱۲	۴٫۰۰	۳٫۹۸	۳٫۹۲	۴٫۰۲

مثال ۲.۶. یک تولید کننده لاستیک معتقد است که تولید لاستیک‌ها با میانگین عمر مورد انتظار ۲۶۰۰۰ مایل است. اکنون شرکت ادعا کرده است که عمر مورد انتظار لاستیک‌های جدید حدود ۲۸۰۰۰ مایل افزایش یافته است. برای آزمون درستی ادعا به عنوان آزمون مستقل به نمایندگی روی یک نمونه شامل ۱۰ عدد لاستیک آزمایش شده و نتایج در جدول (۲) گزارش شده است. فرض کنید که جامعه مورد مطالعه توزیع نرمال دارد. فرضیات فازی شهودی زیر در سطح معناداری $\delta = 0.01$ بایستی آزمون شوند

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \boldsymbol{\mu}_0 = (26000; 500, 500; 1000, 1000)_T, \\ H_1 : \mu = \boldsymbol{\mu}_1 = (28000; 500, 500; 1000, 1000)_T. \end{cases}$$

برای داده‌های این مثال $\bar{x} = 27500$، $s = 1810.5$ و $t_{0.01,9} = 2.82$ بنابراین طبق رابطه ۸ داریم

$$p - value = \int_0^1 \int_0^1 P(T_9 \geq \frac{\sqrt{10}(27500 - \boldsymbol{\mu}_0(\alpha, \beta))}{1810.5}) d\beta d\alpha = 0.1932.$$

که در آن T_v توزیع$t-$استیودنت با v درجه آزادی می‌باشد. بنابراین شواهد کافی برای تایید ادعای تولید کننده وجود ندارد چرا که $p - value > 0.01$. بنابراین فرض صفر پذیرفته می‌شود. بعلاوه خطای نوع ۲ با توجه به تعریف ۲.۵ از رابطه زیر بدست می‌آید

$$\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\mu}_1) = \int_0^1 \int_0^1 P(T_9 \geq \frac{\sqrt{10}(\boldsymbol{\mu}_0(\alpha, \beta) - \boldsymbol{\mu}_1(\alpha, \beta))}{1810.5} + 2.82) d\beta d\alpha = 0.1456.$$

مثال ۳.۶. مجموعه داده‌های جدول طول عمر لنت ترمز (در ۱۰۰۰ کیلومتر) نشان می دهد که بطور تصادفی از بین ۱۶ ماشین (با مدل یکسان) انتخاب شده‌اند که توسط

جدول ۲: عمر مورد انتظار در مثال (۲.۶)

واحد	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
طول عمر	۲۸۵۰۰	۲۷۵۰۰	۲۵۰۰۰	۲۶۰۰۰	۲۵۰۰۰	۳۰۰۰۰	۲۹۰۰۰	۲۸۰۰۰	۲۶۵۰۰	۲۹۵۰۰

مجموعه فروشندگان آن گزارش شده است. فرض کنید M میانه جامعه باشد. فرضیات فازی شهودی زیر باید در سطح معناداری $\delta = ۰/۰۵$ آزمون شوند.

$$\begin{cases} H_۰ : M = \boldsymbol{M}_۰ = (۴۰; ۱۰, ۱۰; ۱۵, ۱۵)_T, \\ H_۱ : M \neq \boldsymbol{M}_۰. \end{cases}$$

اینجا آزمون ناپارامتری رتبه‌ای علامت‌دار ویلکاکسون برای بررسی فرضیه‌های فوق بکار گرفته شده است. فرض کنید یک نمونه تصادفی از مشاهدات $\mathcal{X} = (x_۱, ..., x_n)$ از تابع توزیع پیوسته و متقارن با میانه M وجود دارد. فرض صفر راجع به مقدار میانه به شکل $H_۰ : M = M_۰$ نوشته می‌شود که $M_۰$ میانه جامعه است. اگر $r(\cdot)$ رتبه مشاهدات باشد، آماره رتبه‌ای علامت‌دار ویلکاکسون به شکل $T^+ = \sum_{i=۱}^n r(|d_i|)I(d_i > ۰)$ می‌باشد که $d_i = x_i - M_۰$ و I تابع نشانگر است.

روش میان رتبه‌ای با شرایط و الزامات خود استفاده شده است. برای یک نمونه بزرگ $(n > ۱۵)$ آماره ازمون از $Z = \frac{T^+ - n(n+۱)/۴}{\sqrt{۲n(n+۱)(۲n+۱)/۴۸}}$ بدست می‌آید که توزیع تحت فرض صفر تقریبا نرمال استاندارد فرض می‌شود. اکنون بر اساس روش پیشنهادی $p-$مقدار به شکل زیر محاسبه می‌شود.

$$p - value =$$
$$\int_۰^۱ \int_۰^۱ ۲ \min\{P(Z < \frac{(T^+)_\beta^\alpha - a_n + ۰/۵}{b_n}, P(Z > \frac{(T^+)_\beta^\alpha - a_n - ۰/۵}{b_n}\} d\beta d\alpha,$$
$$= ۰/۰۷۹۹$$
$$p - value = \int_۰^۱ \int_۰^۱ ۲ \min\{P(T^+ \geq t) \leq \frac{\delta}{۲}, P(T^+ \leq t) \leq \frac{\delta}{۲}\}$$

که در آن $a_n = n(n+۱)/۴$، $b_n = ۲n(n+۱)(۲n+۱)/۴۸$ و

$$(T^+)_\beta^\alpha = \sum_{i=۱}^n r(|x_i - \mathbf{M}_۰(\alpha, \beta)|) I(x_i > \mathbf{M}_۰(\alpha, \beta)).$$

این بیان می‌کند که چون $p - value > ۰/۰۵$ دلایل کافی برای رد $H_۰$ در سطح معناداری $\delta = ۰/۰۵$ وجود ندارد.

جدول ۳: *داده‌های طول عمر لنت ترمز در ۱۰۰۰ کیلومتر*

واحد	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
طول عمر	۳۸/۴	۴۰/۵	۴۵/۰	۳۹/۰	۳۶/۷	۴۷/۷	۴۳/۰	۳۷/۶
واحد	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶
طول عمر	۴۱/۴	۳۸/۰	۳۲/۷	۳۵/۸	۳۴/۵	۴۲/۰	۴۶	۳۵/۰

۷ نتیجه‌گیری

این مقاله یک روش آماری برای آزمون فرضیات فازی شهودی با استفاده از توسعه مفاهیم خطای نوع ۱، نوع ۲، توان آزمون و $p-$مقدار پیشنهاد می‌کند. نتایج نشان می‌دهد که روش پیشنهادی در حالتیکه فرضیات فازی شهودی هستند نسبت به حالت کلاسیک و یا نقطه فازی (فازی معمولی) برای مدلهایی با فرض صفر و فرض مقابل عملکرد بهتری داشته است و معقول‌تر و واقع بینانه‌تر بوده است. بنابراین روش پیشنهادی انعطاف پذیر و قابل تغییر است و می‌تواند هم برای آزمون‌های آماری پارامتری و هم آزمون‌های آماری ناپارامتری با فرضیه‌های فازی شهودی استفاده شود. روش پیشنهادی توسعه یافته حالت کلاسیک است بصورتیکه اگر فرضیه‌های فازی شهودی به حالت کلاسیک ساده (تبدیل) شوند آنگاه روشهای پیشنهادی با آزمون آماری کلاسیک منطبق است.

مراجع

[1] Akbari, M.G., and Rezaei, A., Statistical inference about the variance of fuzzy random variables, Sankhya: The Indian Journal of Statistics, 71. B, Part. 2, 206–221, 2009.

[2] Akbari, M.G., and Rezaei, A. Bootstrap testing fuzzy hypotheses and observations on fuzzy statistic, Expert Systems with Applications, 37, 5782–5787, 2010.

[3] Akbari, M.G., and Hesamian, G. Neyman–Pearson lemma based on intuitionistic fuzzy parameters, 23:5905-5911, 2019.

[4] Akbari, M.G., and Hesamian, G., Linear model with exact inputs and interval-valued fuzzy outputs, IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 26, 518–530, 2017.

[5] Atanassov, K,. Intuitionistic fuzzy sets, Fuzzy Sets and Systems, 20, 87-96, 1986.

[6] Atanassov, K., New operations defned over the intuitionistic fuzzy sets, Fuzzy Sets and Systems, 61, 137-142, 1994.

[7] Atanassov, K. Gargov, G., Interval vaued intuionstic fuzzy sets, Fuzzy sets and systems, 31:343-349, 1981

[8] Atanassov, K. Gargov, G., Interval vaued intuionstic fuzzy sets, Fuzzy sets and systems, 31:343-349, 1981

[9] Bustince, H., and burillo P., Vague sets are intutionistic fuzzy sets. Fuzzy Sets and Systems, 79, 403-405, 1996.

[10] Dubois, H., Prade, H., Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications. Academic Press, Waltham, 1980.

[11] Gau, WL., Buehrer, DJ., Vague sets. IEEE Transactions on systems Man and Cybernetics 23(2):610-614, 1993.

[12] Grzegorzewski, P., K-sample median test for vague data, International Journal of Intelligent Systems, 24:529–539, 2009.

[13] Guha, D., Chakraborty, D., A theoretical development of distance measure for intuitonistic fuzzy numbers, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 2011.

[14] Hesamian, G., Akbari, M.G., Testing hypotheses for multivariate normal distribution with fuzzy random variables, 53:14-54, 2022.

[15] Taheri, S. M., and Zarei, R., Extension principle of vague sets and its applications, Advances in Fuzzy Mathematics, 6, 17-28, 2011.

[16] Wu, H.C., Statistical hypotheses testing for fuzzy data, Information Sciences, 175, 30–57, 2005.

[17] Wu, H. Ch., The central limit theorem for fuzzy random variables. Information Sciences, 120, 239-256, 1999.

[18] Zadeh, L. A., Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility, Fuzzy Sets and Systems, 1, 3-28, 1978.

[19] Zainali, Z., and Akbari M. Gh.and Alizadeh Noughabi H., Intuitionistic fuzzy random variable and testing hypothesis. 2014.

[20] Walmsley, A.L.E. (2003) A History of the "New Mathemtics" Movement and its Relations with Current Mathematical Reform. University Press of America: Maryland, USA

[21] B. O'Neill, *Semi-Riemannian geometry*, Academic Press, 1986.

[22] J. Oprea, *Differential geometry and its applications*, Prentice Hall, second ed., 2004.

[۲۳] طاهری، م. و ماشین‌چی، م. (۱۳۸۱). مقدمه‌ای بر احتمال و آمار فازی، انتشارات دانشگاه شهید باهنر کرمان.

[۲۴] طاهری، س. م. (۱۳۷۵). آشنایی با نظریه مجموعه های فازی، انتشارات جهاد دانشگاهی دانشگاه فردوسی مشهد.