سیستم‌های فازی و کاربردها
سال پنجم، شماره دوم (پائیز و زمستان ۱۴۰۱)
صص. ۳۱۵ تا ۳۳۸

شاپای چاپی: ۴۴۰۹-۲۷۱۷
شاپای الکترونیکی: ۳۹۸۴-۲۷۱۷
DOI:10.22034/jfsa.2023.357282.1143

شمارش تعداد زیرگروه‌های فازی شهودی یک گروه از مرتبه ۱۲

سعید میروکیلی*، حسین نراقی و محمد علی دهقانی‌زاده

گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران
گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران
گروه ریاضی، دانشگاه فنی و حرفه‌ای، یزد، ایران

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۰۵/۳۱ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۱۱/۲۸
نوع مقاله: علمی-پژوهشی

چکیده

یکی از مهمترین مباحث در نظریه گروه‌های فازی رده‌بندی زیرگروه‌های فازی از یک گروه متناهی است. این کار در نظریه گروه‌های فازی با استفاده از رابطه هم‌ارزی تعریف شده توسط مورالی و ماکامبا انجام شده است. با استفاده از این ایده، نراج و شارما شمارش زیرگروه‌های فازی شهودی یک گروه متناهی آبلی را با کمک پرچم‌های پایه‌دار دوگانه مورد مطالعه قرار دادند[۹]. ما در این مقاله با روش دیگری این کار را برای برخی گروه‌های آبلی و غیرآبلی متناهی انجام می‌دهیم. در واقع با کمک یک رابطه هم‌ارزي مناسب روي زیرگروه‌هاي فازي شهودی و مشبکه زیرگروه‌ها، شمارش زیرگروه‌های فازی شهودی گروه‌های متناهی مرتبه ۱۲ را بیان می‌کنیم. همچنین شمارش زیرگروه‌های فازی شهودی گروه‌های متناهی $\mathbb{Z}_{p^k} \times \mathbb{Z}_q$ و $\mathbb{Z}_{p^k}$ با روش متفاوتی از مقاله [۹] بدست می‌آوریم. در انتها، به کمک نتایج بدست آمده در این مقاله تعداد زیرگروه‌های فازی شهودی روی یک گروه با مرتبه کمتر از ۱۶ در یک جدول را ارائه می‌دهیم.

عبارات و کلمات کلیدی: زیرگروه، فازی شهودی، شمارش.

Email(s): saeed_mirvakili@pnu.ac.ir, ho.naraghi@pnu.ac.ir and mdehghanizadeh@tvu.ac.ir.

Mathematics Subject Classification: 08A72; 20N25; 03F55

۱ مقدمه

نظریه مجموعه‌هاي فازي پس از آن‌که توسط زاده [۱] [۱۲] در سال ۱۹۶۵ مطرح گردید، تحول عظيمي در پایه‌هاي رياضيات و منطق ایجاد کرد که دامنه‌هاي آن تا همه علوم مرتبط نیز پیش رفت. او عضویت در این زیرمجموعه‌ها را نادقیق توصیف کرد و معتقد بود که بسیاری از مجموعه‌هایی که در واقعیت با آن‌ها سر و کار داریم، از این نوعند. این مقاله فصل تازه‌ای برای تحقیقات جدید در مورد مجموعه‌ها و کاربردهایش نظیر تصمیم گیری در فضاهای مبهم، تجزیه و تحلیل سیستم‌های نادقیق واستدلال تقریبی پدید آورد.

هر چند نظریه مجموعه‌های فازی از عهده عدم اطمینان‌های ناشی از ابهام یا تعلقات جزئی به یک مجموعه بطور موفق عمل کرده است، ولی نمی‌تواند همه حالات عدم اطمینان که غالباً در مسائل زندگی واقعی و مختلف وجود دارد، مخصوصاً مسائلی که با اطلاعات ناکافی سر و کار دارند را مدل سازی کند. آتاناسوف[۲] [۳] تعمیمی از مجموعه‌های فازی را به نام مجموعه های فازی شهودی معرفی نمود که می‌تواند بعد دیگری از تابع عضویت را نمایان سازد. اسلامی[۳] [۱] تعمیم‌هایی از مجموعه‌های فازی را بیان کرده است.

یکی از کاربردهای نظریه مجموعه‌های فازی و فازی شهودی در نظریه گروه‌ها می‌باشد. روزنفلد[۴] [۱۰] با معرفی زیرگروه‌هاي فازي سرفصل جديدي در ارتباط بين رياضيات فازي و ساختارهای جبری گشود. مورالی[۵] و ماکامبا[۶] [۷، ۸] مفهوم پرچم‌های پایه‌دار را ارائه کردند و از آن در شمارش زیرگروه‌های فازی استفاده کردند. اخیرا کمالی[۷] و دواز[۸] [۶] شمارش زیرگروه‌های فازی از دسته خاصی از گروه‌ها را انجام داده‌اند. هور[۹] و همکاران [۵] مفهوم زیرگروه‌های فازی شهودی را به کمک مجموعه‌های فازی شهودی معرفی کردند.

رده‌بندی و شمارش گروه‌های متناهی اهمیت زیادی برای پژوهشگران و کاربردهای فراوانی در نظریه گروه‌ها و علوم دیگر دارد. بنابراین رده‌بندی و شمارش زیرگروه‌های فازی

[1] Zadeh
[2] Atanassov
[3] Eslami
[4] Rosenfeld
[5] Murali
[6] Makamba
[7] Kamali
[8] Davvaz
[9] Hur

یک گروه متناهی به عنوان تعمیمی از نظریه گروه‌ها موضوع جالبی برای پژوهشگران می‌باشد. در ضمن مطالعه و بررسی مجموعه‌ها و زیرگروه‌های فازی و فازی شهودی حاکم بر پدیده‌های طبیعی مورد توجه تعدادی از پژوهشگران قرار گرفته است، لذا مشخص شدن تعداد و شکل ساختاری این ساختارهای فازی و فازی شهودی برای شناخت بهتر روابط حاکم بر پدیده‌های طبیعی مورد بررسی، مفید خواهند بود. از طرفی با توجه به اینکه موضوع رده‌بندی و شمارش زیرگروه‌های فازی شهودی به تازگی مورد توجه قرار گرفته است، این ایده به ما داده شده تا در زمینه گروه‌های کوچک این شمارش را انجام بدهیم. رابطه هم‌ارزی روی زیرگروه‌های فازی شهودی توسط نراج[10] و شارما[11] [۹] معرفی شده‌اند. آن‌ها شمارش زیرگروه‌های فازی شهودی با کمک پرچم‌های پایه‌دار روی برخی گروه‌های آبلی متناهی انجام داده‌اند. شمارش زیرگروه‌های فازی شهودی توسط مشبکه زیرگروه‌های آن انجام نشده است و ما به کمک این ایده و رسم نمودار هاسه آن به شمارش زیرگروه فازی شهودی برخی گروه‌های متناهی آبلی و غیر آبلی می‌پردازیم.

در این پایان نامه به کمک رابطه هم‌ارزی معرفی شده توسط نراج و شارما روی زیرگروه‌های فازی شهودی یک گروه متناهی و با استفاده از يك قضيه كليدي و نمودار هاسه زیرگروه‌ها، به شمارش زیرگروه‌هاي فازي شهودی گروه دلخواه از مرتبه ۱۲ مي‌پردازیم. در واقع در این پایان نامه علاوه بر شمارش زيرگروه‌هاي فازي شهودی گروه‌های آبلی، شمارش زيرگروه‌هاي فازي شهودی برخی گروه‌های غیر آبلی انجام شده است.

همچنین شمارش زیرگروه‌های فازی شهودی گروه‌های متناهی $\mathbb{Z}_{p^k} \times \mathbb{Z}_q$ و $\mathbb{Z}_{p^k}$ بااستفاده از مشبکه زیرگروه‌ها بدست می‌آوریم. در قسمت نتیجه‌گیری، جدول شمارش تمام زیرگروهای فازی شهودی بر روی گروه‌های از مرتبه کمتر ۱۶ ارائه شده است.

۲ زیرگروه‌های فازی شهودی

آتاناسوف برای اولین بار مفهوم زیرگروه فازی شهودی را تعریف کرد:

تعریف ۱.۲. [۳] نگاشت $\mu : X \to [0,1]$ را یک مجموعه فازی روی مجموعه X

[10] Neeraj

[11] Sharma

گویند. مجموعه فازی شهودی [۱۲] (IFS) در X با A بیان می‌شود که

$$A = \{\langle x, \mu_A(x), \nu_A(x)\rangle | x \in X\}$$

که در آن تابع $\mu_A : X \to [۰, ۱]$ یک مجموعه فازی روی X است که تابع عضویت را نشان می‌دهد و تابع $\nu_A : X \to [۰, ۱]$ نیز یک مجموعه فازی روی X بوده که تابع عدم عضویت نامیده می‌شود. در واقع مجموعه فازی شهودی توسط دو تابع که یکی μ_A و دیگری ν_A برای هر x در X مشخص می‌شود. مقدار $\mu_A(x)$ درجه عضویت x در A را نشان می‌دهد و $\nu_A(x)$ درجه عدم عضویت x در A است و مجموع آن‌ها بین صفر و یک قرار دارند یعنی برای هر x در X داریم:

$$۰ \leq \mu_A(x) + \nu_A(x) \leq ۱$$

ملاحظه ۲.۲. فرض کنید A یک مجموعه فازی شهودی روی X است. درجه عضویت x در مجموعه فازی شهودی A به وسیله زیر فاصله $[\mu_A(x), ۱ - \nu_A(x)]$ از فاصله $[۰, ۱]$ مشخص می‌شود. در حالتی که $\mu_A(x) = ۱ - \nu_A(x)$ باشد، آنگاه تعریف مجموعه فازی شهودی منطبق بر تعریف مجموعه فازی می‌شود.

مثال ۳.۲. فرض کنید A مجموعه فازی شهودی با تابع عضویت μ_A و تابع عدم عضویت ν_A است. اگر برای $x \in X$ داشته باشیم $[mu_A(x), ۱ - \nu_A(x)] = [۰/۵, ۰/۷]$ در این صورت می‌توان گفت x حداقل به اندازه ۰/۵ و حداکثر به اندازه ۰/۷ به A متعلق است.

اگر جایی ابهام ایجاد نشود به جای نماد $A = \{\langle x, \mu_A(x), \nu_A(x)\rangle | x \in X\}$ از نماد $A = (\mu_A, \nu_A)$ استفاده می‌کنیم.

مفهوم زیرگروه فازی شهودی توسط هور و همکاران [۵]، معرفی شد:

تعریف ۴.۲. مجموعه فازی شهودی $A = (\mu_A, \nu_A)$ روی نیم‌گروه S زیرنیم‌گروه فازی شهودی روی S نامیده می‌شود، هرگاه برای هر $x, y \in S$ در دوشرط زیر صدق کند:

$$\mu_A(xy) \geq \mu_A(x) \wedge \mu_A(y), \quad \nu_A(xy) \leq \nu_A(x) \wedge \nu_A(y).$$

[12] Intuitionistic fuzzy set

به‌علاوه، مجموعه فازی شهودی $A=(\mu_A,\nu_A)$ روی گروه G زیرگروه فازی شهودی روی G نامیده می‌شود، هرگاه زیرنیم‌گروه فازی شهودی باشد و برای هر $x\in G$ در شرایط زیر صدق کند:

$$\mu_A(x^{-۱})\geq\mu_A(x),\quad \nu_A(x^{-۱})\leq\nu_A(x).$$

مجموعه تمام زیرگروه‌هاي فازي شهودی از گروه G را با $IF(G)$ نمایش مي‌دهیم.

تعریف ۵.۲. [۱۱] فرض کنید $A=(\mu_A,\nu_A)$ زیرمجموعه فازی شهودی روی X است. مجموعه (s,t)-برش $C_{(s,t)}(A)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$C_{(s,t)}(A)=\{x\in X|\mu_A(x)\geq s \text{ و} \nu_A(x)\leq t\}$$

که در آن $۰\leq s,t\leq ۱$ و $s+t\leq ۱$.

تکیه‌گاه مجموعه فازی μ_A را بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$Supp\ (\mu_A)=\{x\in X|\mu_A(x)>۰\},$$

همچنین، پاد تکیه‌گاه مجموعه فازی ν_A یعنی $Supp^*\ (\nu_A)$ برابر $Supp\ (۱-\nu_A)$ در نظر می‌گیرند. در واقع

$$Supp^*\ (\nu_A)=\{x\in X|\nu_A(x)<۱\}.$$

تکیه‌گاه زیرمجموعه فازی شهودی A را برابر $Supp\ (A)=Supp\ (\mu_A)\cap Supp\ (۱-\nu_A)$ در نظر می‌گیرند. درواقع داریم:

$$Supp\ (A)=\{x\in X|\mu_A(x)>۰ \text{ و } \nu_A(x)<۱\}.$$

زیرگروه فازی شهودی $A=(\mu_A,\nu_A)$ را در نظر بگیرید. می‌گوییم $A(x)>A(y)$

هرگاه

$$\mu_A(x) > \mu_A(y) \text{ و } \nu_A(x) < \nu_A(y),$$

به‌علاوه، $A(x) = 0$ اگر و تنها اگر $\nu_A(x) = 1$ و $\mu_A(x) = 0$ برقرار باشد.

رابطه هم‌ارزی روی زیرگروه‌های فازی توسط نراج و شارما [۹] معرفی شدند.

تعریف ۶.۲. دو زیرگروه فازی شهودی $A = (\mu_A, \nu_A)$ و $B = (\mu_B, \nu_B)$ از گروه G را هم‌ارز می‌نامند و با $A \sim B$ نمایش می‌دهند، هرگاه

الف) به ازاي هر $x, y \in G$،

$$A(x) > A(y) \Leftrightarrow B(x) > B(y). \tag{1}$$

ب) به ازاي هر $x \in G$،

$$\mu_A(x) = 0 \Leftrightarrow \mu_B(x) = 0. \tag{2}$$

ج) به ازاي هر $x \in G$،

$$A(x) = 0 \Leftrightarrow B(x) = 0. \tag{3}$$

به سادگي ملاحظه مي‌شود که رابطه فوق يك رابطه هم‌ارزي بر روي $IF(G)$ تعريف مي‌كند.

ملاحظه ۷.۲. مجموعه تمام زيرگروه‌هاي فازي شهودی از گروه G که تصوير عضو خنثي آن‌ها برابر با $(1, 0)$ باشد، را با $IF^*(G)$ نمايش مي‌دهيم. تعداد رده‌هاي هم‌ارزي $\sim$ روي $IF^*(G)$ (يعنی $IF^*(G)/\sim$) را که تعيين‌کننده تعداد زيرگروه‌هاي فازي شهودی متمايز (غير هم‌ارز) گروه G مي‌باشد، با $r(G)$ نمايش مي‌دهيم.

برای تعریف بعدی نیاز به معرفی مفهوم پرچم داریم. فرض کنید G یک گروه متناهی است. در این صورت پرچم یک زنجیر ماکسیمال از زیرگروه‌های G به فرم زیر است:

$$G_0 \subseteq G_1 \subseteq \ldots \subseteq G_n,$$

که در آن $G_\circ = \{e\}$. هر زیرگروه G_i را یک مولفه پرچم می‌نامند.

تعریف ۸.۲. [۹] مجموعه‌ای از زوج‌های اعداد حقیقی (α_i, β_i) که $\alpha_i + \beta_i \leq ۱$ و $i = \circ, ۱, \dots, n$ در نظر بگیرید.

زنجیر $(\alpha_\circ, \beta_\circ) \geq (\alpha_۱, \beta_۱) \geq \dots \geq (\alpha_n, \beta_n)$ یک زنجیر کلیدی دوگانه نامیده می‌شود اگر و تنها اگر $۱ = \alpha_\circ \geq \alpha_۱ \geq \dots \geq \alpha_n$ و $\circ = \beta_\circ \leq \beta_۱ \leq \dots \leq \beta_n$.

با ترکیب یک پرچم و زنجیر کلیدی دوگانه زنجیر زیر را داریم که به آن پرچم دوگانه پایه‌دار می‌گوییم.

$$P_\circ^{(\alpha_\circ, \beta_\circ)} \subseteq P_۱^{(\alpha_۱, \beta_۱)} \subseteq \dots \subseteq P_n^{(\alpha_n, \beta_n)}$$

که در آن $P_i^{(\alpha_i, \beta_i)}$ها زیرگروه‌های G هستند.

با کمک مفهوم پرچم پایه‌دار، شمارش‌هایی روی زیرگروه‌های فازی شهودی انجام شده است که در زیر به بعضی از آن‌ها اشاره می‌کنیم:

قضیه ۹.۲. *[۹] فرض کنید p و q دو عدد اول متمایز هستند. برای گروه‌های زیر داریم:*

(الف.) اگر $G = \mathbb{Z}_{p^k}$ آنگاه $r(G) = \sum_{i=\circ}^{k} ۲^{۲i}$.

(ب.) اگر $G = \mathbb{Z}_{p^k} \times \mathbb{Z}_q$ آنگاه $r(G) = (k+۱)۲^{۲(k+۱)} + \sum_{i=\circ}^{k} ۲^{۲i}$.

(ج.) اگر $G = \mathbb{Z}_{pq}$ آنگاه $r(G) = ۳۷$.

۳ شمارش زیرگروه‌های فازی شهودی با استفاده از مشبکه زیرگروه‌ها

در این بخش شمارش زیرگروه‌های فازی شهودی با کمک نمودار هاسه(مشبکه) زیرگروه‌ها انجام می‌پذیرد.

لم ۱.۳. *فرض کنید G یک گروه متناهي و $A = (\mu_A, \nu_A)$ زیرگروه فازي شهودی است، آنگاه*

$$|R_۱(G)| = |R_۲(G)| = |R_۳(G)| = |R_۴(G)|. \qquad (۴)$$

که در آن

$$R_۱(G) = \{A/\sim \in IF^*(G)/\sim |Supp\ (\mu_A) \neq G,\ Supp\ (\nu_A) = G\}$$
$$R_۲(G) = \{A/\sim \in IF^*(G)/\sim |Supp\ (\mu_A) = G,\ Supp\ (\nu_A) \neq G\}$$
$$R_۳(G) = \{A/\sim \in IF^*(G)/\sim |Supp\ (\mu_A) \neq G,\ Supp\ (\nu_A) \neq G\}$$
$$R_۴(G) = \{A/\sim \in IF^*(G)/\sim |Supp\ (\mu_A) = G,\ Supp\ (\nu_A) = G\}$$

اثبات. با استفاده از تعریف ۸.۲ و مشابه اثبات قضیه ۳ مرجع [۲] بدست می‌آید. □

قضیه ۲.۳. *فرض کنید G یك گروه متناهي و H زیرگروهي از آن است، در این صورت تعداد زیرگروه‌هاي فازي شهودی متمایز G که تکیه‌گاهشان دقیقاً H است برابر است با تعداد زیرگروه‌هاي فازي شهودی متمایز H که تکیه‌گاهشان دقیقاً H است و این عدد نیز برابر است با:*

$$r'(H) = \frac{۳r(H) + ۱}{۴}. \quad (۵)$$

به‌علاوه

$$r''(H) = \frac{r(H) - ۱}{۴}. \quad (۶)$$

که در آن $r'(H)$ تعداد زیرگروه‌هاي فازي G که تکیه‌گاهشان دقیقا H است و $r''(H)$ تعداد زیرگروه‌هاي فازي G که تکیه‌گاهشان زیرمجموعه‌اي محض از H است.

اثبات. با توجه به تعریف $r(H)$ و $r''(H)$ و فرمول ۴ داریم:

$$r''(H) = |R_۱(H)| = |R_۲(H)| = |R_۳(H)| = |R_۴(H)|,$$
$$r(H) = |R_۱(H)| + |R_۲(H)| + |R_۳(H)| + |R_۴(H)| + ۱.$$

در نتیجه $r(H) = ۴r''(H) + ۱$. پس

$$r''(H) = \frac{r(H) - ۱}{۴}$$

همچنین از $r(H) = r'(H) + r''(H)$ و فرمول ۶ داریم

$$r(H) = r'(H) + \frac{r(H) - ۱}{۴}$$

در نتیجه

$$r'(H) = r(H) - \frac{r(H) - ۱}{۴} = \frac{۳r(H) + ۱}{۴}.$$

□

قضیه ۳.۳. *اگر دوگروه $G_۱$ و $G_۲$ یکریخت باشند، آنگاه خواهیم داشت:*

$$r(G_۱) = r(G_۲).$$

اثبات. از آنجا که $G_۱ \cong G_۲$، پس یک یکریختی مانند $f : G_۱ \to G_۲$ وجود دارد. تابع f^* را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{gathered} f^* : IF^*(G_۱)/\sim \to IF^*(G_۲)/\sim \\ f^*(\mu/\sim) = f(\mu)/\sim, \end{gathered}$$

از آنجا که این تابع یک‌به‌یک است، پس $r(G_۱) \leq r(G_۲)$.
اکنون تابع g^* را با ضابطه زیر در نظر می‌گیریم:

$$\begin{gathered} g^* : IF^*(G_۲)/\sim \to IF^*(G_۱)/\sim \\ g^*(\mu/\sim) = f^{-۱}(\mu)/\sim, \end{gathered}$$

از یک به یک بودن این تابع نیز نتیجه می‌شود $r(G_۱) \geq r(G_۲)$. بنابراین از دو نامساوی اخیر حکم قضیه نتیجه می‌گردد.

□

مثال زیر نشان می دهد که عکس قضیه ۳.۳ درست نیست.

مثال ۴.۳. با توجه به جدول ۱، برای گروه غیر آبلی $\mathbb{Q}_۸$ داریم $r(\mathbb{Q}_۸) = ۲۱۳$ و برای گروه آبلی $\mathbb{Z}_{۱۲}$ داریم $r(\mathbb{Z}_{۱۲}) = ۲۱۳$. بنابراین $r(\mathbb{Q}_۸) = r(\mathbb{Z}_{۱۲})$ ولی این دو گروه یکریخت نیستند. این نشان می‌دهد که عکس قضیه ۳.۳ درست نیست.

ملاحظه ۵.۳. در نمودارهای هاسه در مثال‌ها و قضایای بعدی منظور از H_i^j، i-مین زیرگروه از مرتبه j گروه است. مجموعه اندیس J را اعدادی در نظر می‌گیریم که گروه G از آن مرتبه زیرگروه محض(بغیر از خودش) دارد و عدد n_j را تعداد زیرگروه‌های از مرتبه $j \in J$ در نظر می‌گیریم. در این صورت برای گروه از مرتبه n داریم:

$$r''(G) = \frac{r(G) - ۱}{۴} = \sum_{j \in J} \sum_{i=۱}^{n_j} r'(H_i^j). \tag{۷}$$

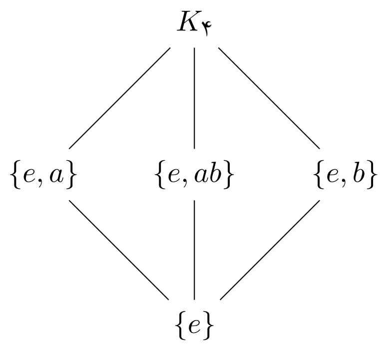
همچنین $r'(H_۱^۱) = ۱$.

مثال ۶.۳. فرض کنید $G = K_۴$ گروه چهارتایی کلاین است، در این صورت $r(G) = ۵۳$. در واقع

$$H_۱^۱ = \{۰\},\ H_۱^۲ = \{e, a\},\ H_۲^۲ = \{e, ab\},\ H_۳^۲ = \{e, b\},\ H_۱^۴ = K_۴.$$

بنا بر نمودار هاسه زیرگروه‌های گروه چهارتایی کلاین (شکل ۱) و با توجه به ۵، ۶ و ۷ داریم:

$$\begin{aligned} r''(H) &= ۱ + r'(H_۱^۲) + r'(H_۲^۲) + r'(H_۳^۲) \\ &= ۱ + \frac{۳ \times ۵ + ۱}{۴} + \frac{۳ \times ۵ + ۱}{۴} + \frac{۳ \times ۵ + ۱}{۴} \\ &= ۱۳. \end{aligned}$$



شکل ۱: *نمودار هاسه زیرگروه‌های* $K_۴$

در نتیجه

$$r''(G) = \frac{r(G) - ۱}{۴} = ۱۳$$

پس $r(G) = ۵۳$.

مثال ۷.۳. اگر $G = \mathbb{S}_۳$ آنگاه $r(\mathbb{S}_۳) = ۶۹$. با توجه به نمودار هاسه گروه جایگشتی $\mathbb{S}_۳$(شکل ۲) داریم:

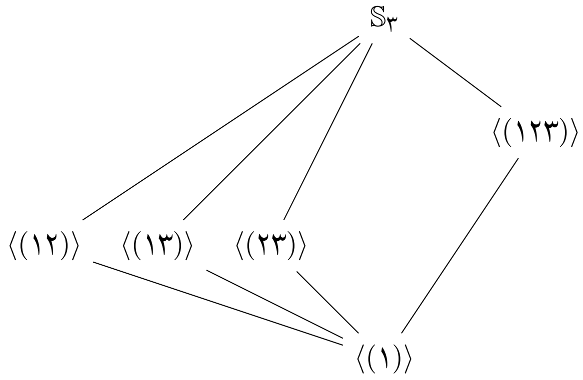
$$H_۱^۲ = \mathbb{Z}_۲,\ H_۲^۲ = \mathbb{Z}_۲,\ H_۳^۲ = \mathbb{Z}_۲,\ H_۱^۳ = \mathbb{Z}_۳.$$

بنابراین با توجه با نمودار هاسه $\mathbb{S}_۳$ و با توجه به ۵، ۶ و ۷ داریم:

$$\begin{aligned} r''(\mathbb{S}_۳) &= ۱ + r'(H_۱^۲) + r'(H_۲^۲) + r'(H_۳^۲) + r'(H_۱^۳) \\ &= ۱ + \frac{۳ \times ۵ + ۱}{۴} + \frac{۳ \times ۵ + ۱}{۴} \\ &\quad + \frac{۳ \times ۵ + ۱}{۴} + \frac{۳ \times ۵ + ۱}{۴} \\ &= ۱۷. \end{aligned}$$

بنابراین $r(\mathbb{S}_۳) = ۶۹$.

قضیه ۸.۳. *اگر G یك گروه دو وجهي از مرتبه $۲p$ باشد، آنگاه* $r(G) = ۱۶p + ۲۱$. *(p عدد اول)*



شکل ۲: *نمودار هاسه زیرگروه‌های* $\mathbb{S}_۳$

اثبات. تعداد زیرگروه‌های از مرتبه ۲ و p گروه دو وجهی G برابر با $p+۱$ می‌باشد. بنابراین تعداد زیرگروه‌های فازی شهودی متمایزی که تکیه‌گاه آن‌ها از مرتبه p باشد، برابر با $۴(p+۱)$ خواهد بود و داریم:

$$r''(G)=\frac{r(G)-۱}{۴}=۴(p+۱)+۱=۴p+۵$$

بنابراین $r(G)=۱۶p+۲۱$. □

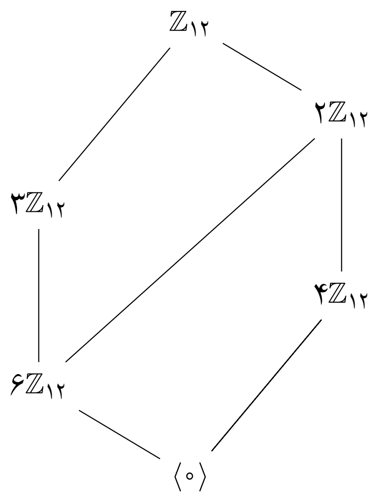
در این قسمت با رسم نمودار هاسه زیرگروه‌های همه گروه‌های از مرتبه ۱۲، به شمارش زیرگروه‌های فازي شهودی آن‌ها می‌پردازیم.

قضیه ۹.۳. *اگر* $G=\mathbb{Z}_{۱۲}$ *آنگاه* $r(G)=۲۱۳$.

اثبات.

با توجه به نمودار هاسه گروه دوری $\mathbb{Z}_{۱۲}$(شکل ۳) داریم

$$H_۱^۲=۶\mathbb{Z}_{۱۲},\ H_۱^۳=۴\mathbb{Z}_{۱۲},\ H_۱^۴=۳\mathbb{Z}_{۱۲},\ H_۱^۶=۲\mathbb{Z}_{۱۲}.$$



شکل ۳: *نمودار هاسه زیرگروه‌های* $\mathbb{Z}_{12}$

بنابراین با توجه به ۵، ۶ و ۷ داریم:

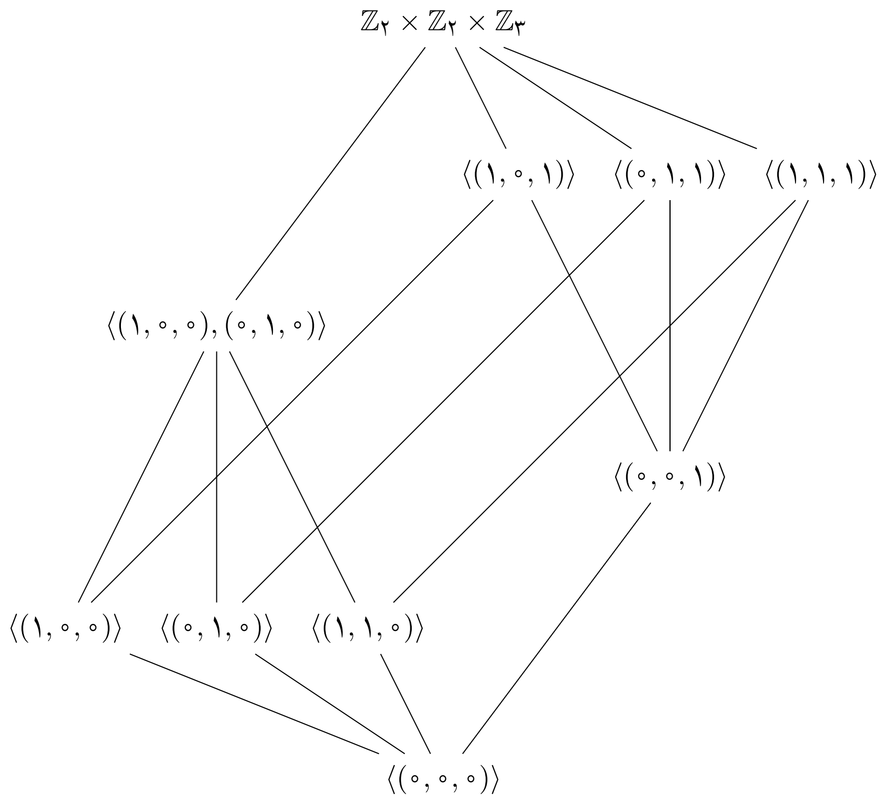
$$\begin{aligned}
r''(\mathbb{Z}_{12}) &= \frac{r(\mathbb{Z}_{12})-1}{4}\\
&= r'(H_1^2)+r'(H_1^3)+r'(H_1^4)+r'(H_1^6)+1\\
&= 1+\frac{3\times 5+1}{4}+\frac{3\times 5+1}{4}\\
&\quad +\frac{3\times 21+1}{4}+\frac{3\times 37+1}{4}\\
&= 53.
\end{aligned}$$

و در نتیجه داریم $r(G)=213$. □

ملاحظه ۱۰.۳. این قضیه به روش سختتری و به کمک پرچم‌های پایه دار در مرجع [۹] اثبات شده است. در واقع کافی است در قسمت (ب) قضیه ۹.۲ قرار دهیم $p=2$، $n=2$ و $q=3$. در نتیجه $r(G)=213$. این عدد در قضیه ۹.۳ با روش قابل فهمتر وآسانتر محاسبه شده است.

قضیه ۱۱.۳. *اگر* $G=\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_3$ *آنگاه* $r(G)=565$.

اثبات.



شکل ۴: *نمودار هاسه زیرگروه‌های* $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$

باتوجه به شکل ۴، داریم

$$
\begin{aligned}
H_i^2 &\cong \mathbb{Z}_2, & i &= 1, 2, 3;\\
H_i^3 &\cong \mathbb{Z}_3, & i &= 1;\\
H_i^4 &\cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, & i &= 1;\\
H_i^6 &\cong \mathbb{Z}_6, & i &= 1, 2, 3.
\end{aligned}
$$

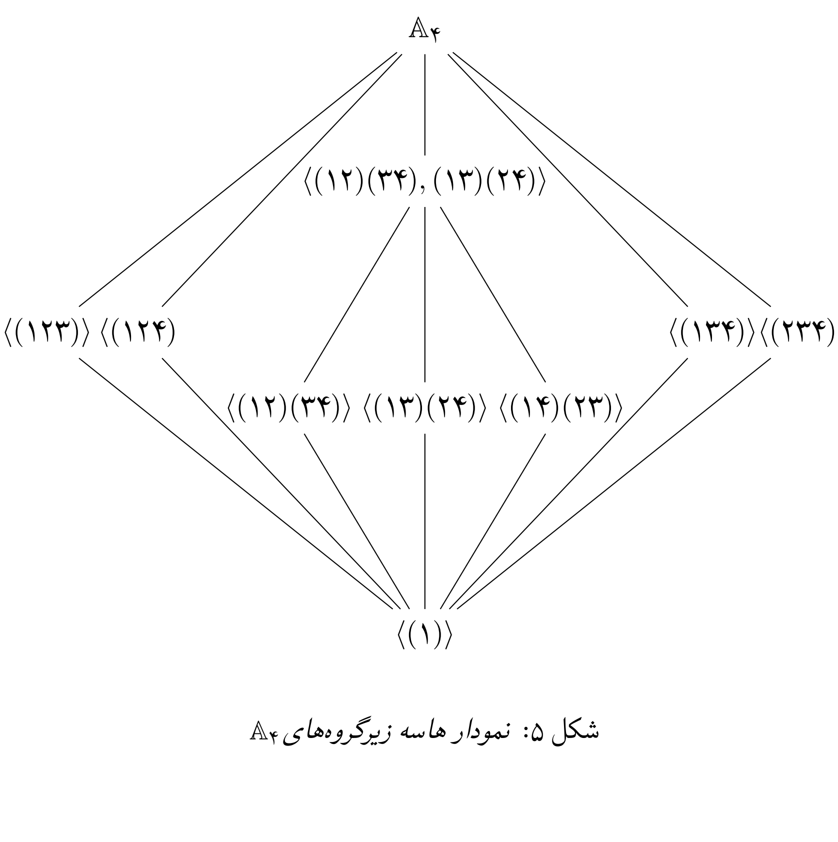
بنابراین

$$\begin{aligned} r''(G) &= \frac{r(G)-۱}{۴} \\ &= \sum_{j\in J}\sum_{i=۱}^{n_j} r'(H_i^j) \\ &= ۱+۳\times\frac{۳\times ۵+۱}{۴}+\frac{۳\times ۵+۱}{۴} \\ &\quad +\frac{۳\times ۵۳+۱}{۴}+۳\times\frac{۳\times ۳۷+۱}{۴} \\ &= ۱۴۱. \end{aligned}$$

در نتیجه داریم $r(G)=۵۶۵$. □

قضیه ۱۲.۳. *اگر* $G=\mathbb{A}_۴$ *آنگاه* $r(G)=۲۷۷$.

اثبات. باتوجه به شکل ۵، داریم



شکل ۵: *نمودار هاسه زیرگروه‌های* $\mathbb{A}_۴$

$$H_1^2 \cong \mathbb{Z}_2, \qquad i = 1,2,3;$$
$$H_i^3 \cong \mathbb{Z}_3, \qquad i = 1,2,3,4;$$
$$H_i^4 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, \quad i = 1.$$

بنابراین

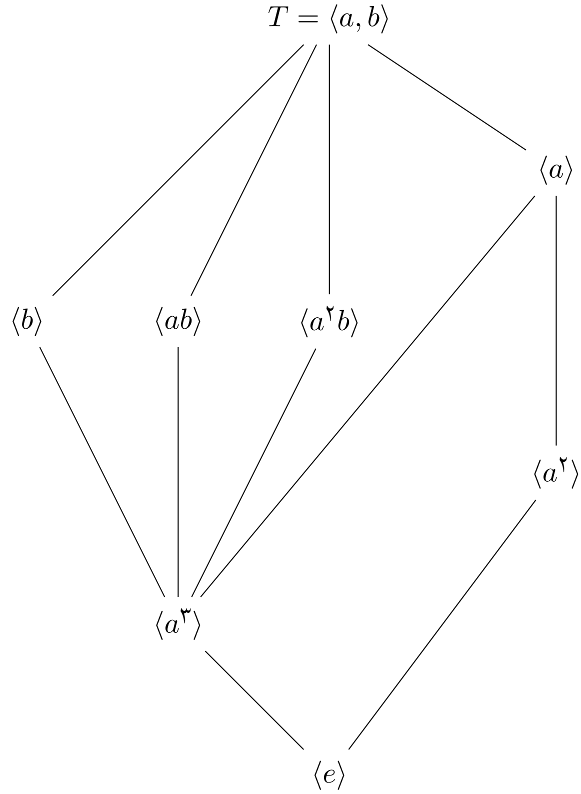
$$\begin{aligned} r''(\mathbb{A}_4) &= \frac{r(\mathbb{A}_4) - 1}{4} \\ &= \sum_{j \in J} \sum_{i=1}^{n_j} r'(H_i^j) \\ &= 1 + 3 \times \frac{3 \times 5 + 1}{4} \\ &\quad + 4 \times \frac{3 \times 5 + 1}{4} + \frac{3 \times 53 + 1}{4} \\ &= 69. \end{aligned}$$

و در نتیجه داریم $r(G) = 277$. □

قضیه ۱۳.۳. اگر $T =< a, b | a^6 = e, a^3 = b^2, ab = ba^{-1} >$ آنگاه $r(T) = 341$.

اثبات. باتوجه به شکل ۶، داریم

$$H_1^2 \cong \mathbb{Z}_2, \quad i = 1;$$
$$H_i^3 \cong \mathbb{Z}_3, \quad i = 1;$$
$$H_i^4 \cong \mathbb{Z}_4, \quad i = 1,2,3;$$
$$H_i^6 \cong \mathbb{Z}_6, \quad i = 1.$$



شکل ۶: *نمودار هاسه زیرگروه‌های* T

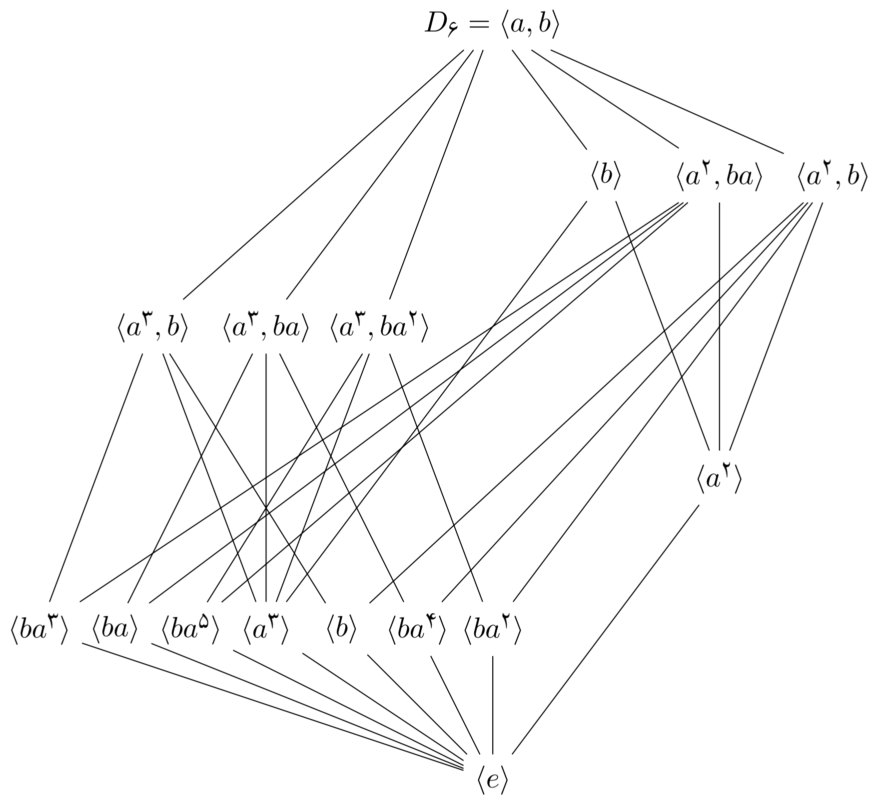
بنابراین

$$\begin{aligned} r''(T) &= \frac{r(T)-۱}{۴} \\ &= \sum_{j\in J}\sum_{i=۱}^{n_j} r'(H_i^j) \\ &= ۱+\frac{۳\times ۵+۱}{۴}+\frac{۳\times ۵+۱}{۴} \\ &\quad +۳\times\frac{۳\times ۲۱+۱}{۴}+\frac{۳\times ۳۷+۱}{۴} \\ &= ۸۵. \end{aligned}$$

و در نتیجه داریم $r(G) = ۳۴۱$. $\square$

قضیه ۱۴.۳. اگر $D_۶ = \langle a, b | a^۶ = b^۲ = ۱, ab = ba^{-۱}\rangle$ آنگاه $r(G) = ۱۱۴۱$.

اثبات. باتوجه به شکل ۷، در مورد زیرگروه‌هاي گروه دو وجهي از مرتبه ۱۲ داريم:



شکل ۷: نمودار هاسه زیرگروه‌های $D_۶$

$$\begin{aligned}
&H_i^۲ \cong \mathbb{Z}_۲, && i = ۱, ۲, \ldots, ۷;\\
&H_i^۳ \cong \mathbb{Z}_۳, && i = ۱;\\
&H_i^۴ \cong \mathbb{Z}_۲ \times \mathbb{Z}_۲, && i = ۱, ۲, ۳;\\
&H_i^۶ \cong \mathbb{Z}_۶, && i = ۱;\\
&H_i^۶ \cong \mathbb{S}_۳, && i = ۲, ۳;
\end{aligned}$$

با توجه به نمودار هاسه و نوع زیرگروه‌های $D_۶$ داریم:

$$\begin{aligned} r''(D_۶) &= \frac{r(D_۶)-۱}{۴} \\ &= \sum_{j\in J}\sum_{i=۱}^{n_j} r'(H_i^j) \\ &= ۱+۷\times\frac{۳\times ۵+۱}{۴}+\frac{۳\times ۵+۱}{۴} \\ &\quad +۳\times\frac{۳\times ۵۳+۱}{۴}+\frac{۳\times ۳۷+۱}{۴}+۲\times\frac{۳\times ۶۹+۱}{۴} \\ &= ۲۸۵. \end{aligned}$$

آنگاه $r(G)=۱۱۴۱$. □

از نظریه گروه‌ها می‌دانیم که:

قضیه ۱۵.۳. *هرگروه از مرتبه ۱۲ با یکی ازگروه‌های* $\mathbb{Z}_{۱۲}$، $\mathbb{Z}_۳\times\mathbb{Z}_۲\times\mathbb{Z}_۲$، $\mathbb{A}_۴$، $D_۶$ *یا* T *یکریخت است.*

قضیه ۱۶.۳. *اگر* G *گروهی از مرتبه ۱۲ باشد، آنگاه* $r(G)\in\{۲۱۳, ۲۷۷, ۳۴۱, ۵۶۵, ۱۱۴۱\}$.

۴ شمارش زیرگروه‌های فازی شهودی گروه‌های $\mathbb{Z}_{p^k}\times\mathbb{Z}_q$ و $\mathbb{Z}_{p^k}$ با استفاده از مشبکه زیرگروه‌ها

با کمک مفهوم پرچم پایه‌دار، شمارش‌هایی روی زیرگروه‌های فازی شهودی انجام شده است. در این بخش با کمک روش های در این مقاله قضایای ۴.۱ و ۴.۲ در مرجع [۹] به روش جدیدی اثبات می‌کنیم.

قضیه ۱.۴. *فرض کنید* p *عدد اول است.*
اگر $G=\mathbb{Z}_{p^k}$ *آنگاه* $r(G)=\sum_{i=۰}^{k}۲^{۲i}$.

اثبات. از آنجاییکه هر گروه دوری از مرتبه p^k تنها یک زیرگروه از مرتبه $p^{k-۱}$ دارد،

بنابراین زنجیر یکتای زیر از زیرگروه‌ها را داریم:

$$\{\circ\} \subset \mathbb{Z}_p \subset \mathbb{Z}_{p^{۲}} \subset \ldots \subset \mathbb{Z}_{p^{n-۱}} \subset \mathbb{Z}_{p^n}$$

به کمک استقرا نشان می‌دهیم $r(G) = \sum_{i=\circ}^{k} ۲^{۲i} = \frac{۴^{n+۱}-۱}{۳}$.

برای $n = ۱$ داریم $r''(G) = r'(\{\circ\}) = ۱$ و با توجه به $r''(G) = \frac{r(G)-۱}{۴}$ داریم $r(G) = ۵ = ۲^{\circ} + ۲^{۲}$. حال فرض کنیم برای هر K کمتر از n حکم درست باشد در این صورت

$$r'(\mathbb{Z}_{p^k}) = \frac{۳r(G)+۱}{۴} = \frac{۳\frac{۴^{k+۱}-۱}{۳}+۱}{۴} = ۴^k.$$

حال نشان می دهیم برای n نیز حکم درست است. با توجه به ملاحظه ۵.۳ و اینکه از هر مرتبه p^k دقیقا یک زیرگروه موجود است، داریم

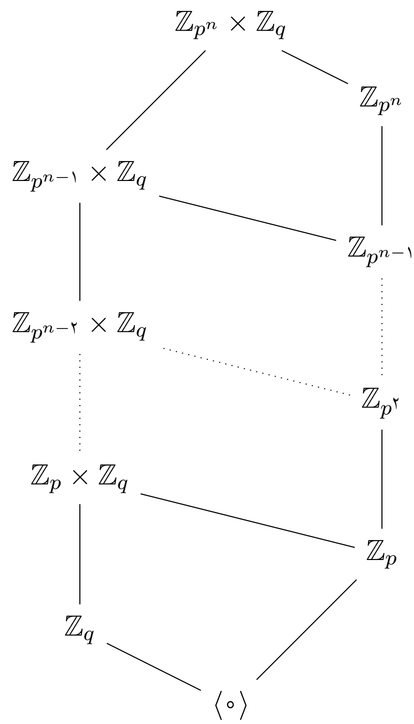
$$\frac{r(G)-۱}{۴} = r''(G) = \sum_{i=\circ}^{n-۱} r'(\mathbb{Z}_{p^i}) = \sum_{i=\circ}^{n-۱} ۴^i$$

در نتیجه $r(G) = \sum_{i=\circ}^{n} ۴^i = \sum_{i=\circ}^{n-۱} ۲^{۲i}$. □

قضیه ۲.۴. *فرض کنید p و q دو عدد اول متمایز هستند. اگر $G = \mathbb{Z}_{p^k} \times \mathbb{Z}_q$ آنگاه* $r(G) = (k+۱)۲^{۲(k+۱)} + \sum_{i=\circ}^{k} ۲^{۲i}$.

اثبات. با توجه به شکل ۸ و ملاحظه۵.۳ داریم

$$r''(G) = \sum_{i=\circ}^{n} r'(\mathbb{Z}_{p^i}) + \sum_{i=\circ}^{n} r'(\mathbb{Z}_{p^i} \times \mathbb{Z}_q).$$



شکل ۸: *نمودار هاسه زیرگروه‌های* $\mathbb{Z}_{p^n} \times \mathbb{Z}_q$

حال با استفاده از استقرا قوی روی n و قضیه ۱.۴ داریم:

$$\begin{aligned}
r''(G) &= \sum_{i=0}^{n} 4^i + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{3[(i+1)2^{2(i+1)} + \frac{4^{i+1}-1}{3}]+1}{4} \\
&= \sum_{i=0}^{n} 4^i + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{3(i+1)2^{2(i+1)} + 4^{i+1} - 1 + 1}{4} \\
&= \sum_{i=0}^{n} 4^i + \sum_{i=0}^{n-1} 3(i+1)4^i + \sum_{i=0}^{n-1} 4^i \\
&= \sum_{i=0}^{n} 4^i + 3\sum_{i=0}^{n-1} i4^i + \sum_{i=0}^{n-1} 4^{i+1} \\
&= \frac{4^{n+1}-1}{3} + \frac{4 - n4^n + (n-1)4^{n+1} - 1}{3} + \frac{4^{n+1}-4}{3} \\
&= \frac{4^{n+1}-1}{3} + n4^n.
\end{aligned}$$

حال با توجه به رابطه $r''(G) = \frac{r(G)-۱}{۴}$ داریم

$$\frac{r(G)-۱}{۴} = \frac{۴^{n+۱}-۱}{۳} + n۴^n$$

در نتیجه

$$r(G) = (n+۱)۴^{n+۱} + \frac{۴^{n+۱}-۱}{۳}.$$

□

۵ نتیجه گیری

روش موجود برای شمارش زیرگروه‌های فازی شهودی دراین مقاله به واسطه استفاده از نمودار هاسه و قضیه ۶، در مقایسه با بعضی اثبات‌هاي حجیم ارائه شده در مرجع [۹]، ایده‌هاي روشن‌تری براي شمارش صریح زیرگروه‌هاي فازي شهودی گروه‌هایي از مرتبه‌هاي بالاتر تحت رابطه‌هاي هم‌ارزي مناسب بدست می‌دهد. در عین حال شیوه‌هاي حل این مثال‌ها به گونه‌ای است که قابل تعمیم براي استفاده در دیگر مثال‌ها و قضایا نیز می‌باشند. با استفاده از قضایای در این مقاله و دو قضیه ۲.۴ و ۱.۴ شمارش زیرگروه‌های فازی شهودی روی یک گروه از مرتبه کمتر از ۱۶ را در جدول ۱ ارائه شده است.

برای کارهای پژوهشی جدید، می‌توان شمارش زیرگروه‌های فازی شهودی با استفاده از نمودار هاسه برای گروه‌های متناهی دیگر، بخصوص گروه‌های متقارن، متناوب و دو وجهی، بدست آورد. همچنین این ایده برای شمارش زیرگروه‌های فازی شهودی نرمال یا سایر زیرگروه‌های تعریف شده قابل انجام است. همچنین، می‌توان این ایده را در جبرهای مرتب شده فازی با برخی شرایط پیاده کرد.

مراجع

[۱] اسلامی، ا. (۱۳۹۷) نظریه مجموعه های فازی و تعمیم های آن. سیستم های فازی و کاربردها، جلد ۱، شماره ۱، صص. ۱ تا ۲۲.

جدول ۱: *تعداد زیرگروه‌های فازی شهودی از مرتبه کمتر ۱۶*

مرتبه گروه	گروه	تعداد	مرتبه گروه	گروه	تعداد
۱	$<۱>$	۱	۹	$\mathbb{Z}_۹$	۲۱
۲	$\mathbb{Z}_۲$	۴	۹	$\mathbb{Z}_۳ \times \mathbb{Z}_۳$	۶۹
۳	$\mathbb{Z}_۳$	۴	۱۰	$\mathbb{Z}_{۱۰}$	۳۷
۴	$\mathbb{Z}_۴$	۲۱	۱۰	$D_۵$	۱۰۱
۴	$\mathbb{Z}_۲ \times \mathbb{Z}_۲$	۵۳	۱۱	$\mathbb{Z}_{۱۱}$	۴
۵	$\mathbb{Z}_۵$	۴	۱۲	$\mathbb{Z}_{۱۲}$	۲۱۳
۶	$\mathbb{Z}_۶$	۳۷	۱۲	$\mathbb{Z}_۲ \times \mathbb{Z}_۲ \times \mathbb{Z}_۳$	۵۶۵
۶	$\mathbb{S}_۳$	۶۹	۱۲	$\mathbb{A}_۴$	۲۷۷
۷	$\mathbb{Z}_۷$	۴	۱۲	$D_۶$	۱۱۴۱
۸	$\mathbb{Z}_۸$	۸۵	۱۲	T	۳۴۱
۸	$\mathbb{Z}_۲ \times \mathbb{Z}_۴$	۳۴۱	۱۳	$\mathbb{Z}_{۱۳}$	۴
۸	$\mathbb{Z}_۲ \times \mathbb{Z}_۲ \times \mathbb{Z}_۲$	۱۲۳۷	۱۴	$\mathbb{Z}_{۱۴}$	۳۷
۸	$\mathbb{Q}_۸$	۲۱۳	۱۴	$D_۷$	۱۳۳
۸	$D_۴$	۴۶۹	۱۵	$\mathbb{Z}_{۱۵}$	۳۷

[۲] نراقی، ح. و ایرانمنش، ع. (۱۳۸۷) مسئله احتمالاتی در زیرگروه‌های فازی متمایز یک گروه. مجله علوم آماری، جلد ۲، شماره ۱، صص. ۱۱۵ تا ۱۲۴. انجمن آمار ایران.

[3] Atanassov, K. (1986) Intuitionistic fuzzy sets. Fuzzy Sets and Systems, Vol. 20, No. 1, 87– 96.

[4] Chen, Y., Jiang, Y. and Jia, S. On the number of fuzzy subgroups of finite Abelian p-groups. International Journal of Algebra, Vol. 6, No. 5, 233-238.

[5] Hur, K., Kang, H.W. and Song, H.K. (2003) Intuitionistic fuzzy subgroups and subrings. Honam Math. J., Vol. 25, No. 1, 19–40.

[6] Kamali, L. and Davvaz, B. (2017) Classifying fuzzy (normal) subgroups of the group $D_{2p} \times \mathbb{Z}_q$ and finite groups of order $n \leq 20$. Journal of Intelligent & Fuzzy Systems, 33, 3615–3627

[7] Murali, V. and Makamba, B.B. (2001)On an equivalence of fuzzy subgroups I. Fuzzy Sets and Systems, Vol. 123, 259–264.

[8] Murali, V. and Makamba, B.B. (2004) Counting the number of fuzzy subgroups of an Abelian group of order pn qm, Fuzzy Sets and Systems, Vol. 144, 2004, 459–470.

[9] Neeraj, D. and Sharma, P.K. (2013) Counting the number of intuitionistic fuzzy subgroups of finite Abelian groups of different order. Notes on Intuitionistic Fuzzy Sets, Vol. 19, No. 4, 42–47.

[10] Rosenfeld, A. (1971) Fuzzy groups. Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 35, 512–517.

[11] Sharma, P.K. (2011) (α, β)-Cut of intuitionistic fuzzy groups. International mathematical forum, Vol. 6, No. 53, 2605–2614.

[12] Zadeh, L.A. (1965) Fuzzy sets. Information and Control, Vol. 8, 338–353.