سیستم‌های فازی و کاربردها
سال ششم، شماره اول (بهار و تابستان ۱۴۰۲)
صص. ۲۳ تا ۴۷
شاپای چاپی: ۲۷۱۷-۴۴۰۹
شاپای الکترونیکی: ۲۷۱۷-۳۹۸۴
DOI:10.22034/JFSA.2023.370810.1153

ساختارهای پیوسته در منطق پایه مرتبه اول ($\mathbf{BL}\forall$)

سید محمد امین خاتمی
گروه علوم کامپیوتر ، دانشگاه صنعتی بیرجند، بیرجند، ایران

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۰۸/۲۹ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۰۲/۰۶
نوع مقاله: علمی-پژوهشی

چکیده
در منطق فازی مبتنی بر یک t-نرم پیوسته، تعبیر همه رابط‌های منطقی لزوماً پیوسته نمی‌باشند. اخیراً دو توپولوژی روی مجموعه‌های $[0,1]$ و $[0,1]^2$ معرفی شده‌اند که تعبیر همه رابط‌های منطقی تحت این توپولوژی‌ها پیوسته می‌باشند. در این مقاله بعد از مطالعه بیشتر خواص این توپولوژی‌ها، با ایده گرفتن از منطق پیوسته مرتبه اول، منطق فازی مرتبه اول پیوسته مبتنی بر یک t-نرم پیوسته را معرفی می‌کنیم و نشان می‌دهیم تعبیر هر فرمول در این منطق، یک تابع پیوسته می‌باشد.

۱ مقدمه

منطق‌های چندارزشی از اوایل قرن بیستم به دلایل مختلفی مورد توجه قرار گرفتند. مهمترین تفاوت این منطق‌ها با منطق کلاسیك این است که مجموعه ارزش‌های درستی فقط شامل دو مقدار «راست» و «دروغ» نیست و با توجه به هدفی که منطق مزبور برای آن منظور طراحی شده است، مجموعه‌های ارزش‌های درستی متنوعی ممکن است در نظر گرفته شوند. بعد از معرفی منطق فازی در سال ۱۹۶۷ برای مطالعه مفهوم ابهام، و نیز از آنجا که بیشتر منطق‌های چندارزشی معرفی شده تا آن زمان برای مطالعه مفهوم ابهام نیز

عبارات و کلمات کلیدی: منطق پایه، t-نرم پیوسته، ساختارهای پیوسته، توپولوژی $*$-گوی باز، توپولوژی تشابه.

Email(s): khatami@birjandut.ac.ir.

Mathematics Subject Classification: 03B50; 03B52; 03C20

مناسب بودند، علاوه بر اینکه واژه منطق فازی تقریباً برای اکثر منطق‌های چندارزشیِ دیگر نیز به کار گرفته شد، بازه بسته واحد [۱ ,۰] نیز به عنوان یکی از متداول‌ترین انواع مجموعه ارزش‌های درستی مورد توجه قرار گرفت.

گرچه متداول‌ترین مجموعه ارزش‌های درستی برای منطق‌های چندارزشی در حالت نامتناهی ارزشی، مجموعه [۱ ,۰] است، ولی انوع مختلفی از مشبکه‌ها و ساختارهای مرتب را می‌توان به عنوان مجموعه ارزش‌های درستی در نظر گرفت. در عین حال در معنی‌شناسی همه منطق‌های چندارزشی، مشابه منطق کلاسیك (و بر خلاف منطق احتمالی و یا منطق وجهی) فرض می‌شود که تابع درستی رابطهای منطقی کاملاً مشخص و تعریف شده باشد.

معنی‌شناسی مبتنی بر [۱ ,۰] برای منطق‌های چندارزشی را معنی‌شناسی «استاندارد» می‌نامند. تنوع رابطهای منطقی موجب پیدایش طیف بسیار گسترده‌ای از معنی‌شناسی‌های استاندارد برای منطق‌های چندارزشی شده است. منطق‌هایی مثل منطق پُست، لوکاسیویچ، گودل، حاصل‌ضربی، گویای پاولکا و منطق پیوسته بن‌یاکوف نمونه‌های از منطق‌های چندارزشیِ استاندارد هستند.

در سال ۱۹۹۸ هایک یک معنی‌شناسی استاندارد برای منطق‌های چندارزشی مبتنی بر t−نرم پیوسته (continuous triangular norm) ارائه کرد که در برگیرنده معنی‌شناسی‌های لوکاسیویچ، گودل و حاصل‌ضربی نیز بود [۱۰، بخش ۲]. منطق چندارزشی معرفی شده توسط هایک را منطق پایه (Basic logic) یا BL می‌نامند و البته برای تاکید ممکن است، در حالت گزاره‌ای آن را با BL و در حالت مرتبه اول آن را با BL∀ نمایش دهند. در سال ۲۰۰۱ گودو توسیعی از BL بنام MTL (monoidal t-norm logic) نیز معرفی کرد [۹]. BL و MTL را به ترتیب می‌توان منطقِ t−نرم‌های پیوسته و منطق t−نرم‌های پیوسته از چپ نامید [۷، ۹].

در منطق لوکاسیویچ که حالت خاصی از BL و نیز MTL محسوب می‌شود، تعبیر همه روابط منطقی با معنی‌شناسی استاندارد پیوسته هستند. این موضوع باعث می‌شود که بعضی از مفاهیم نظریه مدل در منطق کلاسیک نظیر قضیه فشردگی و یا قضیه حذف تایپ و بسیاری نتایج دیگر را برای این منطق بتوان نتیجه گرفت [۸، ۱۶، ۱۸]. توسیع‌هایی از منطق لوکاسیویچ نظیر منطق گویای پاولکا و منطق پیوسته بن‌یاکوف با

مجموعه‌های غنی‌تری از رابطه‌های منطقیِ دارای تعابیر پیوسته نیز معرفی شده‌اند که مجدداً بدلیل پیوستگی تعبیر رابطه‌های منطقی، بعضی از مهمترین قضایای ابتدایی نظریه مدل در این توسیع‌ها نیز برقرار هستند [۵، ۱۷]. ایده گرفتن از منطق لوکاسیویچ، همچنین منجر به معرفیِ منطقی موسوم به منطق پیوسته توسط چنگ و کیسلر شد که منطق لوکاسیویچ، منطق گویای پاولکا و منطق پیوسته بن‌یاکوف را می‌توان به عنوان حالت خاصی از منطق پیوسته چنگ و کیسلر در نظر گرفت [۶].

خاتمی و پورمهدیان در [۱۲] نشان داده‌اند که متریکی روی $[\circ, ۱]$ و $[\circ, ۱]^۲$ وجود دارد که در BL و البته با معنی‌شناسی مبتنی بر هر s–نرم پیوسته‌ای که ضعیف‌تر از s–نرم لوکاسیویچ باشد، تعبیر همه روابط منطقی پیوسته هستند. بعلاوه با کمک ایده‌های [۱۲]، در چند مقاله کنفرانسی سعی شد که نگاه پیوستگی به $\mathrm{BL}\forall$ نیز تعمیم یابد [۲، ۴، ۱۱]. در نهایت خاتمی در [۱۳] نشان داد که در BL با معنی‌شناسی مبتنی بر هر t–نرم پیوسته دلخواه، می‌توان توپولوژی‌هایی روی $[\circ, ۱]$ و $[\circ, ۱]^۲$ ارائه کرد که تعبیر همه روابط منطقی BL پیوسته باشند و بعلاوه توصیفی دقیق‌تر از توپولوژی‌های مذکور در [۱۴] نیز ارائه کرد.

همچنین [۱۳] نشان می‌دهد که در $\mathrm{BL}\forall$، در نظر گرفتن یک رابطه تشابه و اِعمال اصول مصاقیت تشابه روی ساختارها، منجر به نوعی ساختار پیوسته می‌شود. تشابه که تعمیمی از مفهوم تساوی است، نقشی مهم در علوم محض و کاربردی و حتی علوم انسانی دارد. تشابه با طرح نوعی مقایسه بین عناصر یک عالم سخن، امکان دسته‌بندی یا طبقه‌بندی یا خوشه‌بندی را فراهم می‌آورد. اشتباهات قضاوت انسانی در مسئله تشابه و دسته‌بندی، چالش‌های جدی را در بعضی موارد ایجاد می‌کند. توپولوژی تشابهِ برخواسته از یک رابطه تشابه که در [۱۳] معرفی شده است و در اینجا نیز به آن پرداخته شده است، علاوه بر کاربردی که در معرفی ساختارهای پیوسته مورد بحث در این مقاله دارد، درواقع راه‌کار دیگری برای دسته‌بندی به کمک رابطه تشابه را نیز معرفی می‌کند.

در این مقاله که در واقع ادامه‌ای از [۱۳] محسوب می‌شود، بعد از مروری کوتاه بر $\mathrm{BL}\forall$، به تعمیم برخی مفاهیم معرفی شده در [۱۳] می‌پردازیم و در نهایت نشان می‌دهیم که در ساختارهای پیوسته‌ای که در [۱۳] معرفی شده‌اند، تعبیر همه ترمها و فرمول‌ها توابعی پیوسته هستند.

در این راستا در بخش ۲ مفاهیم اولیه مرور می‌شوند. سپس در بخش ۳ توپولوژی‌های

$*$-گوی باز و تشابه معرفی می‌گردند. در بخش ۴ که مشتمل بر نتایج جدید مقاله حاضر است، ابتدا توصیفی بهتر از توپولوژی‌های مذکور نسبت به آنچه قبلا در [۱۳] و [۱۴] آمده است ارائه می‌شود. سپس مفهوم ساختار پیوسته در $BL\forall$ معرفی می‌گردد و در نهایت پیوستگی تعبیر همه ترمها و فرمول‌های یک ساختار پیوسته تحت توپولوژی‌های مذکور، مورد بحث و بررسی قرار می‌گیرد.

۲ منطق پایه و معنی‌شناسی استاندارد آن

در این بخش مروری داریم بر معرفی منطق پایه. برای مطالعه دقیق‌ترِ منطق پایه گزاره‌ای می‌توانید [۱۰، بخش ۱.۲ و ۲.۲] یا [۱، بخش ۳.۵.۳ و ۴.۵.۳] را ببینید و برای منطق پایه مرتبه اول هم می‌توانید [۱۰، بخش ۱.۵] را ببینید.

در BL یا همان منطق پایه گزاره‌ای، رابطه‌های منطقی اصلی عبارتند از $\{\&, \to, \bot\}$ که $\bot$ یک رابط منطقی صفرتایی است و دو رابط منطقی $\&$ و $\to$ دوتایی هستند. در معنی‌شناسی استاندارد $[۰,۱]$ به عنوان مجموعه ارزش‌های درستی در نظر گرفته می‌شود که ۰ داری ارزش «دروغ» است و هر چه از ۰ به سمت ۱ نزدیک شویم مقادیر ارزش راست‌تر می‌شوند و ۱ هم دارای ارزش «راست» می‌باشد. در معنی‌شناسی استاندارد، رابط صفرتایی $\bot$ با تابع ثابت صفر تعبیر می‌شود و رابطه‌های $\&$ و $\to$ به ترتیب با یك t-نرم پیوسته $*$ و مانده t-نرم $*$ تعبیر می‌شوند.

تعریف ۱.۲. [۱۰، بخش ۱.۲] یک t-نرم پیوسته تابعی است پیوسته مثل $* : [۰,۱]^۲ \to [۰,۱]$ که روی هر دو مولفه صعودی است و بعلاوه به ازای هر $x, y, z \in [۰,۱]$، $x * y = y * x$، $(x * y) * z = x * (y * z)$ و $۱ * x = x$. مانده t-نرم پیوسته $*$ تابعی است مثل $\Rightarrow_*$ که با خاصیت زیر تعریف می‌شود:

$$z \le x \Rightarrow_* y \text{ اگر و فقط اگر } z * x \le y \ .$$

پیوستگی $*$ و اینکه هر مجموعه از بالا کراندار در $[۰,۱]$ دارای سوپریمم است نتیجه می‌دهد که $x \Rightarrow_* y = \max\{z : z * x \le y\}$ [۱۰، لم ۴.۱.۲].

معنی‌شناسی مبتنی بر t-نرم پیوسته برای BL به کمک تابع‌های ارزش v از مجموعه همه گزاره‌ها به $[۰,۱]$ که داری خواص زیر هستند، انجام می‌شود [۱۰، تعریف ۱.۲.۲]:

اولاً $v(\perp) = 0$،

ثانیاً $v(p\&q) = v(p) * v(q)$،

ثالثاً $v(p \to q) = v(p) \Rightarrow_* v(q)$.

علی‌رغم اینکه تابع $*$ پیوسته در نظر گرفته شده است، تابع $\Rightarrow_*$ لزوماً یك تابع پیوسته نیست. در بین t-نرم‌های پیوسته مشهور، فقط مانده t-نرم لوکاسیویچ پیوسته است. t-نرم‌های پیوسته مشهور را در زیر می‌بینید:

- t-نرم پیوسته لوکاسیویچ: $\max\{0, x + y - 1\}$،
- t-نرم پیوسته می‌نی‌مم یا گودل: $\min\{x, y\}$،
- t-نرم پیوسته حاصل‌ضربی: $x.y$.

به‌راحتی می‌توان دید مانده t-نرم‌های بالا به صورت زیر است:

- مانده t-نرم لوکاسیویچ: $\begin{cases} 1 & x \leq y \\ 1 + y - x & x > y \end{cases}$،
- مانده t-نرم می‌نی‌مم یا گودل: $\begin{cases} 1 & x \leq y \\ y & x > y \end{cases}$،
- مانده t-نرم حاصل‌ضربی: $\begin{cases} 1 & x \leq y \\ y/x & x > y \end{cases}$.

برخی از خواص تابع t-نرم $*$ و جفت الحاقی آن که در ادامه مقاله بعضاً از آنها استفاده می‌کنیم، در لم زیر آورده شده‌اند.

لم ۲.۲. *[۱۰، بخش ۲.۲] فرض کنید $*$ یک t-نرم پیوسته و $\Rightarrow_*$ جفت الحاقیِ آن باشد. در این صورت به ازای هر $x, y, z \in [0, 1]$*

۱. $z > x \Rightarrow_* y$ *اگر و فقط اگر* $z * x > y$،

۲. $[x * (x \Rightarrow y)] = \min\{x, y\}$، ۳. $[x \Rightarrow_* (y \Rightarrow_* z)] = [(x * y) \Rightarrow_* z]$،

۴. $[(x \Rightarrow_* y) * (y \Rightarrow_* z)] \leq (x \Rightarrow_* z)$،

۵. $x \Rightarrow_* y = 1$ *اگر و فقط اگر* $x \leq y$.

رابط‌های منطقی متداول‌تری که از روی رابط‌های منطقی اصلی قابل تعریف هستند عبارتند از:

- $\neg\varphi := \varphi \to \bot$،
- $\top := \neg\bot$،
- $\varphi \wedge \psi := \varphi \& (\varphi \to \psi)$،
- $\varphi \vee \psi := ((\varphi \to \psi) \to \psi) \wedge ((\psi \to \varphi) \to \varphi)$،
- $\varphi \leftrightarrow \psi := (\varphi \to \psi) \& (\psi \to \varphi)$.

پیوستگی t-نرم $*$ ایجاب می‌کند که تعبیر دو رابط منطقی $\wedge$ و $\vee$ به ترتیب همیشه برابر توابع «می‌نی‌مم» و «ماکزیمم» شود [۱۰، لم ۲.۱.۱۰]. تعبیر رابط منطقیِ $\leftrightarrow$ را با تابع دو متغیره e_* و تعبیر $\neg$ را با تابع یک متغیره n_* نمایش می‌دهیم که با توجه به t-نرم‌های پیوسته مختلف، توابع مختلفی می‌شود. در حالتی که $*$ فقط یک t-نرم پیوسته از چپ است، تعبیر $\wedge$ لزوماً تابع «می‌نی‌مم» نیست [۹]. در MTL که منطق t-نرم‌های پیوسته از چپ می‌باشد، رابط‌های منطقیِ اصلی عبارتند از $\{\&, \wedge, \to, \bot\}$ که $\&$ با یک t-نرم پیوسته از چپ مانند $*$، $\to$ با مانده t-نرمِ $*$، $\wedge$ با تابع می‌نی‌مم، و $\bot$ با تابع ثابت صفر تعبیر می‌شود. لم زیر چند خاصیت دیگر از توابعی که تعبیر روابط منطقی در منطق پایه هستند را نشان می‌دهد.

لم ۳.۲. *[۱۰، بخش ۲.۲] فرض کنید $*$ یک t-نرم پیوسته و $\Rightarrow_*$ جفت الحاقیِ آن باشد. در این صورت به ازای هر* $x, y, z \in [0, 1]$

۱. $e_*(x, y) = 1$ *اگر و فقط اگر* $x = y$،

۲. $e_*(x, y) * e_*(y, z) \leq e_*(x, z)$، ۳. $x \leq n_* \left(n_*(x)\right)$.

نحوِ $\mathrm{BL}\forall$ تعمیمی است از نحو BL که در آن گزاره‌ها با استفاده از نمادهای زبانی شامل نمادهای تابعی، نمادهای محمولی، و نمادهای ثابت ساخته می‌شوند و علاوه بر رابطهای منطقی، استفاده از سورهای عمومی و وجودی نیز در ساختن گزاره‌ها مجاز است. معنی‌شناسیِ BL مبتنی بر توابع ارزش از مجموعه گزارها بتوی مجموعه مقادیر درستی است ولی معنی‌شناسیِ $\mathrm{BL}\forall$ مبتنی بر ساختارها و تعبیر نمادهای زبانی در ساختار می‌باشد که به صورت زیر تعریف می‌شود [۱۰، تعریف ۱.۱.۵ و ۳.۱.۵].

اگر $\mathcal{L}$ یک زبان مرتبه اول شامل نمادهای ثابت، تابعی و محمولی باشد، تعبیر نمادهای ثابت و تابعی در یک ساختار مثل منطق کلاسیک تعبیر می‌شوند. تعبیر هر نماد محمولیِ n تاییِ P، تابعی است مثل $P^{\mathcal{M}}: M^n \to [0,1]$. ساختار $\mathcal{M}$ متشکل است از مجموعه M به همراه تعابیر نمادهای زبانی. اگر nتایی مرتب $(x_1, \cdots, x_n)$ را با $\bar{x}$ نمایش دهیم، آنگاه تعبیر هر فرمول $\varphi(\bar{x})$ در ساختار $\mathcal{M}$، تابعی است مثل $\varphi^{\mathcal{M}}: M^n \to [0,1]$ که به صورت استقرایی با توجه به نوع ساخته شدن فرمول $\varphi(\bar{x})$ بدست می‌آید. به عبارت دقیق‌تر اگر $*$ یک t-نرم پیوسته، $\Rightarrow_*$ مانده $*$ و $\mathcal{M}$ یک ساختار مرتبه اول باشد، آنگاه:

- $\perp^{\mathcal{M}} = 0$،

- برای هر نماد محمولی n تاییِ P،

$$P(t_1, ..., t_n)^{\mathcal{M}}(\bar{a}) = P^{\mathcal{M}}\left(t_1^{\mathcal{M}}(\bar{a}), ..., t_n^{\mathcal{M}}(\bar{a})\right)،$$

- $(\varphi \& \psi)^{\mathcal{M}}(\bar{a}) = \varphi^{\mathcal{M}}(\bar{a}) * \psi^{\mathcal{M}}(\bar{a})$،

- $(\varphi \to \psi)^{\mathcal{M}}(\bar{a}) = \varphi^{\mathcal{M}}(\bar{a}) \Rightarrow_* \psi^{\mathcal{M}}(\bar{a})$،

- اگر $\varphi(\bar{x}) = \forall y\ \psi(y, \bar{x})$ آنگاه $\varphi^{\mathcal{M}}(\bar{a}) = \inf_{b \in M}\{\psi^{\mathcal{M}}(b, \bar{a})\}$،

- اگر $\varphi(\bar{x}) = \exists y\ \psi(y, \bar{x})$ آنگاه $\varphi^{\mathcal{M}}(\bar{a}) = \sup_{b \in M}\{\psi^{\mathcal{M}}(b, \bar{a})\}$.

۳ توپولوژی $*$-گوی باز و توپولوژی تشابه

در قسمت اول این بخش توپولوژی $*$-گوی باز را روی مجموعه مقادیر درستی $[0,1]$ و نیز روی $[0,1]^2$ معرفی می‌کنیم. توپولوژی $*$-گوی باز در حالت کلی‌تر روی BL-جبرها در [۱۴] معرفی شده است. سپس در قسمت دوم این بخش، توپولوژی تشابه برخواسته از یک رابطه تشابه را روی ساختارهای مرتبه اول معرفی می‌کنیم.

۱.۳ توپولوژی $*$-گوی باز و پیوسته بودن روابط منطقی در منطق پایه

به ازای هر t-نرم پیوسته $*$، دو توپولوژیِ T_* و $\mathbf{T}_*$ روی $[0,1]$ و $[0,1]^2$ وجود دارند بطوریکه تعبیر همه روابط منطقی در معنی‌شناسی استانداردِ BL تحت این توپولوژی‌ها توابع پیوسته‌ای هستند. این توپولوژی‌ها اولین بار در [۱۳] معرفی شدند و سپس به شکل عمومی‌تر و با جزئیات بیشتر در [۱۴] مورد مطالعه قرار گرفتند.

تعریف ۱.۳. [۱۳] برای هر t-نرم پیوسته $*$ و هر $x \in [0,1]$ و هر $0 \leq r < 1$، مجموعه

$$B_r(x) = \{y \in [0,1] : e_*(x,y) > r\}$$

را گوی $*$-باز به مرکز x و شعاع r می‌نامیم. زیرمجموعه G از $[0,1]$ را یک مجموعه $*$-باز می‌نامیم هرگاه برای هر $x \in G$، عدد $0 \leq r < 1$ موجود باشد بطوریکه $B_r(x) \subseteq G$.

قضیه زیر نشان می‌دهد که مجموعه‌های $*$-باز، یک توپولوژی روی $[0,1]$ تشکیل می‌دهند که آن را توپولوژی $*$-گوی باز روی $[0,1]$ می‌نامیم و با T_* نمایش می‌دهیم.

قضیه ۲.۳. *[۱۳] برای هر t-نرم پیوسته $*$، گردایه همه زیرمجموعه‌های $*$-بازِ $[0,1]$ یک توپولوژی روی $[0,1]$ تشکیل می‌دهد.*

در منطق کلاسیک به کمک رابط منطقیِ $\leftrightarrow$، "رابطه هم‌ارزیِ منطقی" بین گزاره‌ها تعریف می‌شود و سپس گزاره‌های با ارزش‌های متفاوت توسط کلاس‌های هم‌ارزی گزاره‌های تحت "رابطه هم‌ارزی منطقی" مشخص می‌شوند. در توپولوژی T_* در واقع تعبیر

$\leftrightarrow$ که همان تابع e_* است، تا حدودی یک متر بین تعابیر گزاره‌ها روی مجموعه مقادیر درستی تعریف می‌کند.

مثال ۳.۳. [۱۳، تغییر یافته مثال ۶.۴] منطق پایه با t-نرمِ لوکاسیویچ یا همان منطق لوکاسیویچ را در نظر بگیرید. به‌راحتی می‌توان دید برای هر $x, y \in [0, 1]$، $e_*(x, y) = 1 - |x - y|$ و لذا برای هر $x \in [0, 1]$ و هر $0 \leq r < 1$، اگر قرار دهیم $s = 1 - r$، آنگاه

$$B_r(x) = [0, 1] \cap (x - s, x + s)$$

که نشان می‌دهد T_* همان توپولوژی اقلیدسی روی $[0, 1]$ است. لازم به ذکر است در اینجا $n_*(e_*(x, y)) = |x - y|$ همان متر اقلیدسی روی $[0, 1]$ است.

مثال ۴.۳. [۱۳، مثال ۷.۴] در منطق‌های گودل که همان منطق پایه با t-نرم گودل است،

$$e_*(x, y) = \begin{cases} \min\{x, y\} & x \neq y \\ 1 & x = y \end{cases}$$

و لذا برای هر $x \in [0, 1]$ و هر $0 \leq r < 1$،

$$B_r(x) = \{y : e_*(x, y) > r\} = \begin{cases} (r, 1] & x > r \\ \{x\} & x \leq r \end{cases}.$$

مثلاً در اینجا $B_{0.2}(0.5) = (0.2, 1]$ و $B_{0.2}(0.1) = \{0.1\}$. می‌توان دید T_* روی $(0, 1]$ معادل توپولوژی گسسته است. در عین حال T_* روی $[0, 1]$ معادل توپولوژی گسسته نیست، زیرا $\{1\}$ یک مجموعه باز در T_* نیست. با توجه به ضابطه n_* در اینجا $n_*(e_*(x, y))$ فقط متر گسسته را می‌دهد.

در مثال اول $n_*(e_*(x, y))$ متریکی است که توپولوژی T_* را توصیف می‌کند ولی در مثال دوم $n_*(e_*(x, y))$ در عین اینکه یک متریک است ولی توپولوژی T_* را دقیقاً توصیف نمی‌کند. در عین حال با در نظر گرفتن معنی‌شناسی معکوس در منطق پایه (استفاده از s-نرم بجای t-نرم برای تعبیرِ $\&$) می‌توان توپولوژی T_* را در برخی حالات خاص توسط یک متریک توصیف کرد [۱۴، بخش ۵][۱۲]. در حالت کلی حدس می‌زنیم توپولوژی T_* متریک‌پذیر باشد.

توپولوژی $*$-گوی باز روی $[0,1]$ را می‌توان به یک توپولوژی روی $[0,1]^2$ تعمیم داد. این تعمیم با استفاده از تابع $\mathbf{e}_*$ بجای e_* انجام می‌شود.

تعریف ۵.۳. [۱۳] فرض کنید $*$ یک t-نرم پیوسته باشد و تابع $\mathbf{e}_* : [0,1]^2 \times [0,1]^2 \to [0,1]$ با ضابطه $\mathbf{e}_*(\bar{x},\bar{y}) = e_*(x_1,y_1) * e_*(x_2,y_2)$ تعریف شده باشد که در آن $\bar{x} = (x_1,x_2)$ و $\bar{y} = (y_1,y_2)$. برای هر $\bar{x} \in [0,1]$ و هر $0 \leq r < 1$، مجموعه

$$B_r(\bar{x}) = \{\bar{y} \in [0,1]^2 : \mathbf{e}_*(\bar{x},\bar{y}) > r\}$$

را گوی $*$-باز به مرکز $\bar{x}$ و شعاع r می‌نامیم. زیرمجموعه G از $[0,1]^2$ را یک مجموعه $*$-باز می‌نامیم هرگاه برای هر $\bar{x} \in G$، عدد $0 \leq r < 1$ موجود باشد بطوریکه $B_r(\bar{x}) \subseteq G$. مجموعه همه زیرمجموعه‌های $*$-بازِ $[0,1]^2$ را با $\mathbf{T}_*$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۶.۳. *[۱۳] برای هر t-نرم پیوسته $*$، $\mathbf{T}_*$ یک توپولوژی روی $[0,1]^2$ تشکیل می‌دهد که آن را توپولوژی $*$-گوی باز روی $[0,1]^2$ می‌نامیم.*

در قضیه زیر مزیت در نظر گرفتن توپولوژی‌های T_* و $\mathbf{T}_*$ روی $[0,1]$ و $[0,1]^2$ را مشاهده می‌کنید.

قضیه ۷.۳. *[۱۳] برای هر t-نرم پیوسته $*$، هم $*$ و هم مانده آن توابعی پیوسته از $([0,1]^2,\mathbf{T}_*)$ بتوی $([0,1],T_*)$ هستند.*

با توجه به قضیه فوق برای هر t-نرم پیوسته $*$ در صورت در نظر گرفتن دو توپولوژیِ T_* و $\mathbf{T}_*$ روی $[0,1]$ و $[0,1]^2$، تعبیر دو رابط منطقیِ $\&$ و $\to$ در منطق پایه مبتنی t-نرم پیوسته $*$، توابعی پیوسته خواهند بود و از آنجا که سایر روابط منطقی به کمک این دو رابط منطقی ساخته می‌شوند، تعبیر همه روابط منطقی توابعی پیوسته خواهند بود.

۲.۳ توپولوژی تشابه در ساختارهای مرتبه اول

فرض کنید $\mathcal{L} = \{\{P_k\}_{k\in K}, \{f_j\}_{j\in J}, \{c_i\}_{i\in I}\}$ یك زبان مرتبه اول شامل نمادهای محمولی، نمادهای تابعی، و نمادهای ثابت باشد. همچنین فرض کنید $*$ یک

t-نرم پیوسته و $\Rightarrow_*$ مانده آن باشد. علاوه بر این فرض کنید ρ یک محمول دوتایی باشد که در اصول تشابه به صورت زیر صدق می‌کند.

S۱ $\forall x \rho(x,x)$

S۲ $\forall x \forall y \big(\rho(x,y) \rightarrow \rho(y,x)\big)$

S۳ $\forall x \forall y \forall z \big[\big(\rho(x,y) \& \rho(y,z)\big) \rightarrow \rho(x,z)\big]$

محمول ρ را محمول تشابه و تعبیر آن در یک ساختار را رابطه تشابه می‌نامند. در قضیه زیر، توپولوژی تشابه روی ساختارهایی که دارای یک محمول تشابه ρ هستند، معرفی شده است.

قضیه ۸.۳. *[۱۳] فرض کنید $\mathcal{L}$ یک زبان مرتبه اول و شاملِ یک محمول دوتایی ρ باشد و $\mathcal{M}$ یک $\mathcal{L}$-ساختار مرتبه اول باشد که در اصول تشابه صدق می‌کند. همچنین فرض کنید $*$ یک t-نرم پیوسته و $\Rightarrow_*$ مانده آن باشد.*

- *برای هر $a \in M$ و هر $0 \leq r < 1$، گوی ρ-باز حول a به شعاع r را به صورت $B_r^\rho(a) = \{b \in M : \rho^{\mathcal{M}}(a,b) > r\}$ تعریف کنید و فرض کنید*

  $.T_\rho = \{G \subseteq M :$ *برای هر* $a \in G$ $0 \leq r < 1$ *وجود دارد که* $B_r^\rho(a) \subseteq G\}$

  در این صورت T_ρ یک توپولوژی روی M تشکیل خواهد داد که آن را توپولوژی تشابه روی M می‌نامند. $B_r^\rho(a)$ را گوی ρ-باز حول a و عناصر T_ρ را مجموعه‌های ρ-باز می‌نامند.

- *فرض کنید $\rho_n(\bar{x},\bar{y}) = \rho(x_1,y_1) \& \rho(x_2,y_2) \& \cdots \& \rho(x_n,y_n)$، و بعلاوه برای هر $\bar{a} \in M^n$ و هر $0 \leq r < 1$ فرض کنید $B_r^\rho(\bar{a}) = \{\bar{b} \in M : \rho_n^{\mathcal{M}}(\bar{a},\bar{b}) > r\}$. زیرمجموعه G از M^n را ρ-باز می‌گوییم هرگاه به ازای هر $\bar{a} \in G$، عدد $0 \leq r < 1$ موجود باشد که $B_r^\rho(\bar{a}) \subseteq G$. در این صورت مجموعه همه زیرمجموعه‌های ρ-بازِ M^n یک توپولوژی روی M^n تعریف می‌کنند که آن را با T_ρ^n نمایش می‌دهند و توپولوژیِ تشابه روی M^n خوانده می‌شود.*

مثال ۹.۳. منطق پایه با t-نرم لوکاسیویچ را در نظر بگیرید. جهان سخنِ ساختار $\mathcal{M}$ را مجموعه $M = [\circ, ۲\circ]$ در نظر بگیرید. به‌راحتی میتوان دید $\rho_L^{\mathcal{M}}(a,b) = ۱ - |a/۲\circ - b/۲\circ|$ یک رابطه تشابه روی M است. همچنین

$$\rho_G^{\mathcal{M}}(a,b) = \begin{cases} \min\{a/۲\circ, b/۲\circ\} & a \neq b \\ ۱ & a = b \end{cases}$$

نیز یک رابطه تشابه دیگر روی M است. در توپولوژی تشابه T_{ρ_L} هر گوی ρ_L-باز حول نقطه $a = ۱\circ$ به صورت

$$\begin{aligned} B_r^{\rho_L}(۱\circ) &= \{b \in [\circ, ۲\circ] : ۱ - |۱\circ/۲\circ - b/۲\circ| > r\} \\ &= \{b \in [\circ, ۲\circ] : |۱\circ - b| < ۲\circ(۱ - r)\} \\ &= [\circ, ۲\circ] \cap (۱\circ - ۲\circ(۱ - r), ۱\circ + ۲\circ(۱ - r)) \end{aligned}$$

است و لذا همیشه شامل نقاطی کمتر از ۱۰ و بیشتر از ۱۰ میباشد. اما در توپولوژی تشابه T_{ρ_G} هر گوی ρ_G-باز حول نقطه $a = ۱\circ$ به صورت

$$B_r^{\rho_G}(۱\circ) = \{b \in [\circ, ۲\circ] : \rho_G^{\mathcal{M}}(۱\circ, b) > r\} = \begin{cases} (۲\circ r, ۲\circ] & r < \circ/۵ \\ \{۱\circ\} & r \geq \circ/۵ \end{cases}$$

است که نشان می‌دهد مثلاً $B_{\circ/۲}^{\rho_G}(۱\circ) = (۴, ۲\circ]$ و $B_{\circ/۶}^{\rho_G}(۱\circ) = \{۱\circ\}$.

توپولوژی تشابه را نیز می‌توان با در نظر گرفتن معنی‌شناسی معکوس برای BL که مبتنی بر تعبیر & با یک s-نرم پیوسته بجای t-نرم پیوسته می‌باشد، در برخی حالات خاص به کمک یک شبه متر نیز توصیف کرد. برای مشاهده جزئیات می‌توانید [۴] و یا [۲] را ببینید. خوب است متذکر شویم در منطق لوکاسیویچ با معنی‌شناسی مبتنی بر t-نرم پیوسته، تعبیر $\neg\rho(x,y)$ همان متری را می‌دهد که تعبیر $\rho(x,y)$ در منطق لوکاسیویچ با معنی‌شناسی مبتنی بر s-نرم پیوسته، اما در منطق‌های گودل و حاصل‌ضربی اینطور نیست. برای داشتن درک بهتری از توصیف توپولوژی تشابه به کمک شبه متر، درکنار [۴] و [۲]، خوب است [۱۰، مثال ۳.۶.۵] را نیز ببینید.

رابطه تشابه در منطق‌های فازی و از جمله در BL∀، نقشی مشابه رابطه تساوی در منطق کلاسیک دارد. در منطق کلاسیک وقتی برای دو nتایی $\bar{a}$ و $\bar{b}$ از یک جهان سخنِ

M داریم $\bar{a}=\bar{b}$، آنگاه به ازای هر نماد تابعی n تایی مثل f، تصویر $\bar{a}$ و $\bar{b}$ تحتِ $f^{\mathcal{M}}$ یکسان است، و بعلاوه برای هر نماد محمولی n تاییِ P، $\bar{a}\in P^{\mathcal{M}}$ اگر و فقط اگر $\bar{b}\in P^{\mathcal{M}}$.

در منطق‌های فازی و از جمله در BL$\forall$، اصول تشابه فقط در مورد خواص درونی رابطه تشابه صحبت می‌کنند، اما اگر قرار باشد رابطه تشابه کاری شبیه رابطه تساوی در منطق کلاسیك انجام دهد، باید در اصول دیگری که مصداق‌های بیرونی تساوی را بیان می‌کنند نیز صادق باشد. این خواص بیرونی مرتبط با هر نماد محمولی P و هر نماد تابعی f در زبان مرتبه اول زمینه را «اصول مصداقیت تشابه» می‌نامیم و عبارتند از:

E۱ $\quad \forall\bar{x},\forall\bar{y}\big[\rho_n(\bar{x},\bar{y})\to\big(P(\bar{x})\leftrightarrow P(\bar{y})\big)\big]$،

E۲ $\quad \forall\bar{x},\forall\bar{y}\big[\rho_n(\bar{x},\bar{y})\to\rho\big(f(\bar{x}),f(\bar{y})\big)\big]$.

قضیه زیر نشان می‌دهد چنانچه تعبیر نمادهای تابعی و محمولی در اصول مصداقیت تشابه صادق باشند، تعبیرشان توابعی پیوسته خواهد بود. اثبات این قضیه دقیقاً مشابه نگارشی از آن که در [۱۳، قضیه ۱۱.۵] آمده، می‌باشد ولی چون در ادامه بحث به آن نیاز داریم، مجدداً در اینجا نیز اثبات را می‌آوریم.

قضیه ۱۰.۳. *[۱۳] فرض کنید $\mathcal{L}$ یک زبان مرتبه اول و شاملِ یک محمول دوتاییِ ρ، $\mathcal{M}$ یک $\mathcal{L}$-ساختار مرتبه اولِ صادق در اصول تشابه، $*$ یک t-نرم پیوسته و $\Rightarrow_*$ مانده آن باشد. اگر برای نماد محمولیِ n تاییِ P، ساختار $\mathcal{M}$ اصل مصداقیت تشابه $E۱$ را برآورده سازد، آنگاه تعبیر P در ساختار $\mathcal{M}$ که تابعی مثل $P^{\mathcal{M}}:(M^n,T^n_\rho)\to([۰,۱],T_*)$ است، یك تابع پیوسته است. همچنین اگر برای نماد تابعیِ n تاییِ f، اصل $E۲$ در ساختار $\mathcal{M}$ صادق باشد، آنگاه تابع $f^{\mathcal{M}}:(M^n,T^n_\rho)\to(M,T_\rho)$ نیز یك تابع پیوسته است.*

اثبات. برای اینکه نشان دهیم $P^{\mathcal{M}}$ پیوسته است، به ازای هر زیرمجموعه باز $G\in T_*$ باید نشان دهیم $(P^{\mathcal{M}})^{-۱}(G)\in T^n_\rho$. برای اثبات حکم نشان می‌دهیم برای هر $\bar{a}\in(P^{\mathcal{M}})^{-۱}(G)$، عددی مثل $۰\le r<۱$ وجود دارد که $B^\rho_r(\bar{a})\subseteq(P^{\mathcal{M}})^{-۱}(G)$. چون $\bar{a}\in(P^{\mathcal{M}})^{-۱}(G)$ لذا $P^{\mathcal{M}}(\bar{a})\in G$. اکنون با توجه به تعریف مجموعه‌های $*$-باز، عدد $۰\le r<۱$ پیدا می‌شود که $B_r(P^{\mathcal{M}}(\bar{a}))\subseteq G$. نشان می‌دهیم به ازای

همین r داریم $B^\rho_r(\bar{a}) \subseteq (P^{\mathcal{M}})^{-1}(G)$. اگر $\bar{b} \in B^\rho_r(\bar{a})$ آنگاه $\rho^{\mathcal{M}}_n(\bar{a},\bar{b}) > r$. اکنون چون $\mathcal{M} \models \mathrm{E}1$ لذا

$$\inf_{\bar{a},\bar{b}\in M^n} \left(\rho^{\mathcal{M}}_n(\bar{a},\bar{b}) \Rightarrow_* e_* \left(P^{\mathcal{M}}(\bar{a}), P^{\mathcal{M}}(\bar{b})\right)\right) = 1.$$

بنابراین $e_* \left(P^{\mathcal{M}}(\bar{a}), P^{\mathcal{M}}(\bar{b})\right) \geq \rho^{\mathcal{M}}_n(\bar{b},\bar{a}) > r$. لذا $P^{\mathcal{M}}(\bar{b}) \in B_r(P^{\mathcal{M}}(\bar{a}))$. بنابراین $P^{\mathcal{M}}(\bar{b}) \in G$ که به این معنی است که $\bar{b} \in (P^{\mathcal{M}})^{-1}(G)$. لذا $B^\rho_r(\bar{a}) \subseteq (P^{\mathcal{M}})^{-1}(G)$.

مشابهاً برای اثبات پیوستگیِ $f^{\mathcal{M}}$، باید نشان دهیم برای هر زیرمجموعه باز $G \in T_\rho$، $(f^{\mathcal{M}})^{-1}(G) \in T^n_\rho$. برای اثبات حکم نشان می‌دهیم برای هر $\bar{a} \in (f^{\mathcal{M}})^{-1}(G)$، عددی مثل $0 \leq r < 1$ وجود دارد که $B^\rho_r(\bar{a}) \subseteq (f^{\mathcal{M}})^{-1}(G)$. چون $\bar{a} \in (f^{\mathcal{M}})^{-1}(G)$ پس $f^{\mathcal{M}}(\bar{a}) \in G$ که با توجه به تعریف مجموعه‌های ρ-باز وجود عدد $0 \leq r < 1$ با این خاصیت که $B_r(f^{\mathcal{M}}(\bar{a})) \subseteq G$ را تضمین می‌کند. مشابه قسمت اول در اینجا نیز به ازای همین r داریم $B^\rho_r(\bar{a}) \subseteq (f^{\mathcal{M}})^{-1}(G)$. در واقع اگر $\bar{b} \in B^\rho_r(\bar{a})$ آنگاه $\rho^{\mathcal{M}}_n(\bar{a},\bar{b}) > r$. اکنون چون $\mathcal{M} \models \mathrm{E}2$ لذا

$$\inf_{\bar{a},\bar{b}\in M^n} \left(\rho^{\mathcal{M}}_n(\bar{a},\bar{b}) \Rightarrow_* \rho^{\mathcal{M}} \left(f^{\mathcal{M}}(\bar{a}), f^{\mathcal{M}}(\bar{b})\right)\right) = 1.$$

بنابراین $\rho^{\mathcal{M}} \left(f^{\mathcal{M}}(\bar{a}), f^{\mathcal{M}}(\bar{b})\right) \geq \rho^{\mathcal{M}}_n(\bar{a},\bar{b}) > r$. پس $f^{\mathcal{M}}(\bar{b}) \in B^\rho_r\left(f^{\mathcal{M}}(\bar{a})\right)$. لذا $f^{\mathcal{M}}(\bar{b}) \in G$ که حکم را نتیجه می‌دهد. □

۴ نتایج جدید

فرض کنید $\mathcal{L}$ یک زبان مرتبه اول و شامل یک محمول تشابه ρ باشد. بعلاوه فرض کنید $*$ یک t-نرم پیوسته باشد و $\Rightarrow_*$ مانده $*$ باشد. در این بخش بعد از مطالعه برخی از خواص توپولوژی‌های $*$-باز و تشابه، مفهوم ساختارِ پیوسته مرتبه اول را تعریف می‌کنیم و نشان می‌دهیم تعبیر هر فرمولی در یک ساختار پیوسته مرتبه اول، تحت توپولوژی‌های $*$-باز و تشابه، یک تابع پیوسته است.

۱.۴ چند خاصیت از توپولوژی $*$-گوی باز

قضیه زیر نشان می‌دهد هر گوی $*$-باز، یک مجموعه $*$-باز نیز هست و لذا مجموعه گوی‌های $*$-باز، یک پایه برای توپولوژی T_* روی $[0,1]$ تشکیل می‌دهند. توجه کنید که حکم مشابه در مورد توپولوژی T_* روی هر $\mathbf{BL}$-جبرِ دلخواه درست نیست و ممکن است یک $*$-گوی باز، یک مجموعه $*$-باز نباشد [۱۴، مثال ۷.۳].

قضیه ۱.۴. *به ازای هر t-نرم پیوسته $*$، هر گوی $*$-بازِ $B_r(x)$ یک مجموعه $*$-باز نیز هست.*

اثبات. به ازای $x \in [0,1]$ و $0 \leq r < 1$ فرض کنید $B_r(x)$ یک گوی $*$-باز باشد و $y \in B_r(x)$. چون $e_*(x,y) > r$، اگر قرار دهیم $s = e_*(x,y) \Rightarrow_* r$ آنگاه با توجه به قسمت ۵ لم ۲.۲ داریم $0 \leq s < 1$. نشان می‌دهیم $B_s(y) \subseteq B_r(x)$. برای هر $z \in B_s(y)$ داریم $e_*(y,z) > s$ و لذا $e_*(y,z) > e_*(x,y) \Rightarrow_* r$. بنابراین با توجه به خاصیت الحاقیِ $*$ و $\Rightarrow_*$ که در لم ۲.۲ آمده است و همچنین با توجه به خاصیت جابجاییِ $*$، داریم $e_*(x,y) * e_*(y,z) > r$. اکنون قسمت ۲ لم ۳.۲ نتیجه می‌دهد $e_*(x,z) > r$ که به این معنی است که $z \in B_r(x)$ که حکم را تمام می‌کند. $\square$

قضیه زیر نشان می‌دهد مشابهاً مجموعه گوی‌های $*$-باز یک پایه برای توپولوژی $\mathbf{T}_*$ روی $[0,1]^2$ تشکیل می‌دهند.

قضیه ۲.۴. *برای هر t-نرم پیوسته $*$، هر گوی $*$-باز در $[0,1]^2$ یک مجموعه $*$-باز است.*

اثبات. برای هر $0 \leq r < 1$ و هر گوی $*$-باز $B_r(\bar{x})$ و هر عنصر $\bar{y} \in B_r(\bar{x})$، اگر $s = \mathbf{e}_*(\bar{x},\bar{y}) \Rightarrow_* r$، از اینکه $\mathbf{e}_*(\bar{x},\bar{y}) > r$ نتیجه می‌شود $0 \leq s < 1$. اکنون به‌راحتی مشابه استدلال قضیه ۱.۴ می‌توان نتیجه گرفت $B_s(\bar{y}) \subseteq B_r(\bar{x})$. توجه کنید که

در اینجا برای رسیدن به حکم از واقعیت زیر استفاده می‌شود.

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_*(\bar{x},\bar{z}) &= e_*(x_۱,z_۱)*e_*(x_۲,z_۲)\\ &\geq e_*(x_۱,y_۱)*e_*(y_۱,z_۱)*e_*(x_۲,y_۲)*e_*(y_۲,z_۲)\\ &= \mathbf{e}_*(\bar{x},\bar{y})*\mathbf{e}_*(\bar{y},\bar{z}).\end{aligned}$$

□

قضیه ۲.۴ نشان داد مجموعه گوی‌های $*$-باز حول نقاط $[۰,۱]^۲$، یک پایه برای توپولوژی $\mathbf{T}_*$ روی $[۰,۱]^۲$ تشکیل می‌دهد. اکنون نشان می‌دهیم توپولوژی $\mathbf{T}_*$ روی $[۰,۱]^۲$ در واقع همان توپولوژی حاصل‌ضربیِ ایجاد شده توسط T_* روی $[۰,۱]^۲$ است.

اگر τ یک توپولوژی روی مجموعه A با پایه U و n عددی طبیعی باشد و به ازای هر $۱\leq j\leq n$، تابعِ $\pi_j:A^n\to A$ تابع تصویر روی مولفه jام باشد، آنگاه توپولوژی تولید شده توسط زیرپایه $S=\{\cup_{i=۱}^n\pi_i^{-۱}(G):G\in\tau\}$ را توپولوژی حاصل‌ضربیِ القا شده توسط τ روی A^n می‌نامند و بعلاوه چون n یک عدد طبیعی (و لذا متناهی فرض شده است)، به‌راحتی می‌توان دید مجموعه $U_\pi=\{\Pi_{i=۱}^nB_i:B_i\in U\}$ یک پایه برای توپولوژی حاصل‌ضربیِ القا شده توسط τ روی A^n است.

قضیه ۳.۴. *برای هر t-نرم پیوسته $*$، توپولوژی $\mathbf{T}_*$ روی $[۰,۱]^۲$ همان توپولوژی حاصل‌ضربیِ ایجاد شده توسط T_* روی $[۰,۱]^۲$ است.*

اثبات. عضوِ $B=B_{r_۱}(x_۱)\times B_{r_۲}(x_۲)$ از پایه توپولوژی حاصل‌ضربیِ ایجاد شده توسط T_* روی $[۰,۱]^۲$ و عنصر $(y_۱,y_۲)\in B$ را در نظر بگیرید. چون هر گوی $*$-باز یک مجموعه $*$-باز است، لذا $۰\leq s_۱,s_۲<۱$ وجود دارند که $B_{s_۱}(y_۱)\subseteq B_{r_۱}(x_۱)$ و $B_{s_۲}(y_۲)\subseteq B_{r_۲}(x_۲)$. اکنون برای $s=\max\{s_۱,s_۲\}$، داریم $B_s(\bar{y})\subseteq B$. زیرا برای هر $\bar{z}\in B_s(\bar{y})$ چون $\mathbf{e}_*(\bar{y},\bar{z})>s$، داریم

$$e_*(y_۱,z_۱)=e_*(y_۱,z_۱)*۱\geq e_*(y_۱,z_۱)*e_*(y_۲,z_۲)=\mathbf{e}_*(\bar{y},\bar{z})>s$$

که به این معنی است که $z_۱\in B_{s_۱}(y_۱)\subseteq B_{r_۱}(x_۱)$. مشابهاً داریم $z_۲\in B_{r_۲}(x_۲)$ و لذا $\bar{z}\in B_{r_۱}(x_۱)\times B_{r_۲}(x_۲)=B$.

برعکس اگر $B_r(\bar{x})$ عضوی از پایه توپولوژی $\mathbf{T}_*$ باشد و $\bar{y} \in B_r(\bar{x})$ آنگاه $\mathbf{e}_*(\bar{x}, \bar{y}) > r$ و لذا به ازای $i = ۱, ۲$ داریم

$$e_*(x_i, y_i) = e_*(x_i, y_i) * ۱ \geq e_*(x_۱, y_۱) * e_*(x_۲, y_۲) = \mathbf{e}_*(\bar{x}, \bar{y}) > r$$

که به این معنی است که $\bar{y} = (y_۱, y_۲) \in B_r(x_۱) \times B_r(x_۲)$ که عضوی از پایه توپولوژی حاصل‌ضربیِ حاصل از T_* روی $[۰, ۱]^۲$ است.

□

قضیه زیر نشان می‌دهد که هر دو توپولوژی T_* و $\mathbf{T}_*$ هاسدورف هستند.

قضیه ۴.۴. *برای هر t-نرم پیوسته $*$، توپولوژی T_* روی $[۰, ۱]$ و توپولوژی $\mathbf{T}_*$ روی $[۰, ۱]^۲$ هاسدورف هستند.*

اثبات. دو نقطه متمایز $x, y \in [۰, ۱]$ را در نظر بگیرید. با توجه به قسمت (۱) لم ۳.۲ می‌دانیم $e_*(x, y) < ۱$. لذا عدد حقیقی $۰ \leq r < ۱$ وجود دارد که $e_*(x, y) < r * r$. زیرا در غیر این صورت به ازای هر $r < ۱$ خواهیم داشت $e_*(x, y) \geq r * r$ که با توجه به پیوستگی $*$ منجر به تناقض $e_*(x, y) = ۱$ می‌شود. ادعا می‌کنیم $B_r(x) \cap B_r(y) = \emptyset$. برای اثبات ادعا، به برهان خلف فرض کنید $z \in B_r(x) \cap B_r(y)$. در این صورت با توجه به قسمت (۲) لم ۳.۲ تناقض زیر را خواهیم داشت

$$e_*(x, y) \geq e_*(x, z) * e_*(z, y) > r * r > e_*(x, y).$$

بنابراین $([۰, ۱], T_*)$ یک فضای توپولوژیک هاسدرف است. اثبات هاسدورف بودن $\mathbf{T}_*$ به صورت مشابه قابل انجام است. □

۲.۴ چند خاصیت از توپولوژی تشابه

قضیه زیر نشان می‌دهد همانند توپولوژی $*$-باز، در توپولوژی تشابه هر گوی ρ-باز یک مجموعه ρ-باز است.

قضیه ۵.۴. *فرض کنید $\mathcal{L}$ یک زبان مرتبه اول و شامل یک محمول دوتایی ρ، $\mathcal{M}$ یک $\mathcal{L}$-ساختار مرتبه اول صادق در اصول تشابه، $*$ یک t-نرم پیوسته و $\Rightarrow_*$ مانده آن باشد. در توپولوژی تشابه T_ρ، هر گوی ρ-باز یک مجموعه ρ-باز است.*

اثبات. فرض کنید $B_r^\rho(a)$ یک گوی ρ-باز باشد. برای هر $b \in B_r^\rho(a)$ از آنجایی که $\rho^{\mathcal{M}}(a,b) > r$، لذا اگر قرار دهیم $s = \rho^{\mathcal{M}}(a,b) \Rightarrow_* r$، داریم $۰ \leq s < ۱$. ادعا می‌کنیم $B_s^\rho(b) \subseteq B_r^\rho(a)$. برای اثبات ادعا، می‌دانیم اگر $c \in B_s^\rho(b)$ آنگاه $\rho^{\mathcal{M}}(c,b) > s$ و لذا $\rho^{\mathcal{M}}(c,b) > \rho^{\mathcal{M}}(a,b) \Rightarrow_* r$. بنابراین با توجه به خاصیت الحاقیِ $*$ و $\Rightarrow_*$ که در لم ۲.۲ آمده است، داریم $\rho^{\mathcal{M}}(c,b) * \rho^{\mathcal{M}}(a,b) > r$. اکنون خاصیت سومِ اصول تشابه، S۳، نتیجه می‌دهد $\rho^{\mathcal{M}}(a,c) > r$ که به این معنی است که $c \in B_r^\rho(a)$ و بنابراین $B_s^\rho(b) \subseteq B_r^\rho(a)$. □

مثال زیر نشان می‌دهد که بر خلاف توپولوژی $*$-باز، توپولوژی تشابه لزوماً هاسدورف نیست.

مثال ۶.۴. منطق پایه با t-نرم لوکاسیویچ را در نظر بگیرید. جهان سخنِ ساختار $\mathcal{M}$ را مجموعه $M = [۰, ۲۰]$ در نظر بگیرید. به‌راحتی می‌توان بررسی کرد تابع

$$\rho^{\mathcal{M}}(a,b) = ۱ - \left| (\frac{a-۱۰}{۱۰})^۲ - (\frac{b-۱۰}{۱۰})^۲ \right|$$

یک رابطه تشابه در ساختار $\mathcal{M}$ تعریف می‌کند. از طرفی چون $\rho^{\mathcal{M}}(۹, ۱۱) = ۱$، لذا هر گوی ρ-باز که شامل ۹ باشد، شامل ۱۱ نیز می‌باشد و بنابراین توپولوژی تشابه حاصل از محمول تشابه ρ، حداقل قادر نیست ۹ و ۱۱ را از هم جدا کند و بنابراین هاسدورف نیست.

به ازای محمول تشابه ρ، فرض کنید

$$\rho_{min}(\bar{x}, \bar{y}) = \min\{\rho(x_۱, y_۱), \rho(x_۲, y_۲), \cdots, \rho(x_n, y_n)\}.$$

قضیه زیر توصیف دیگری از توپولوژی تشابه روی n-تایی‌ها ارائه می‌دهد.

قضیه ۷.۴. *فرض کنید $\mathcal{L}$ یک زبان مرتبه اول و شامل یک محمول دوتایی ρ، $\mathcal{M}$ یک $\mathcal{L}$-ساختار مرتبه اول صادق در اصول تشابه، $*$ یک t-نرم پیوسته و $\Rightarrow_*$ مانده آن*

باشد. بعلاوه فرض کنید T_ρ توپولوژیِ تشابه روی M و n یک عدد طبیعی باشد. برای هر $\bar{a} \in M^n$ و هر $\circ \leq r < 1$ فرض کنید

$$B_r^{\rho_{min}}(\bar{a}) = \{\bar{b} : \rho_{min}^{\mathcal{M}}(\bar{a}, \bar{b}) > r\}$$

در این صورت مجموعه $U_{min} = \{B_r^{\rho_{min}}(\bar{a}) : \bar{a} \in M^n, \circ \leq r < 1\}$ پایه دیگری برای توپولوژی تشابه T_ρ^n روی M^n است.

اثبات. فرض کنید U_ρ^n مجموعه همه گوی‌های ρ-باز در M^n باشد. با توجه به تعریف توپولوژی T_ρ^n بوضوح U_ρ^n یک پایه برای T_ρ^n است. ابتدا عضو دلخواهِ $B_r^\rho(\bar{a})$ از U_ρ^n را در نظر بگیرید. برای هر $\bar{b} \in B_r^\rho(\bar{a})$ داریم $\rho^{\mathcal{M}}(a_1, b_1) * \rho^{\mathcal{M}}(a_2, b_2) * \cdots * \rho^{\mathcal{M}}(a_n, b_n) > r$. لذا با توجه به اینکه برای هر $x, y \in [\circ, 1]$ داریم $x = x * 1 \geq x * y$ نتیجه می‌گیریم $\rho_{min}^{\mathcal{M}}(\bar{a}, \bar{b}) \geq \rho^{\mathcal{M}}(a_1, b_1) * \rho^{\mathcal{M}}(a_2, b_2) * \cdots * \rho^{\mathcal{M}}(a_n, b_n) > r$. بنابراین داریم $\bar{b} \in B_r^{\rho_{min}}(\bar{a})$ که نشان می‌دهد توپولوژی تولید شده توسط پایه U_{min} روی M^n ظریف‌تر از توپولوژی تشابه روی M^n است. از طرف دیگر به ازای هر عضو دلخواه U_{min} مثل $B_r^{\rho_{min}}(\bar{a})$ اگر $\bar{b} \in B_r^{\rho_{min}}(\bar{a})$، آنگاه برای هر $1 \leq i \leq n$، $\rho^{\mathcal{M}}(a_i, b_i) \geq \rho_{min}^{\mathcal{M}}(\bar{a}, \bar{b}) \geq r$ که با توجه به صعودی بودن $*$ نتیجه می‌گیریم

$$\rho^{\mathcal{M}}(a_1, b_1) * \rho^{\mathcal{M}}(a_2, b_2) * \cdots * \rho^{\mathcal{M}}(a_n, b_n) \geq \underbrace{r * r * \cdots * r}_{\text{بار } n}.$$

لذا $\bar{b} \in B_{r*r*\cdots*r}^\rho(\bar{a})$. پس $B_r^{\rho_{min}}(\bar{a}) \subseteq B_{r*r*\cdots*r}^\rho(\bar{a})$ که حکم را تمام می‌کند. $\square$

اکنون نشان می‌دهیم اگر $\mathcal{M}$ یک ساختار مرتبه اول و T_ρ توپولوژی تشابه روی M باشد، آنگاه توپولوژی تشابهِ T_ρ^n روی M^n با توپولوژی حاصل‌ضربی حاصل از T_ρ روی M^n برابر است. ما از این واقعیت در اثبات پیوستگی تعبیر ترم‌ها در ساختارهای پیوسته در بخش بعد استفاده خواهیم کرد.

قضیه ۸.۴. *فرض کنید $\mathcal{L}$ یک زبان مرتبه اول و شاملِ یک محمول دوتایی ρ، $\mathcal{M}$ یک $\mathcal{L}$-ساختار مرتبه اولِ صادق در اصول تشابه، $*$ یک t-نرم پیوسته و $\Rightarrow_*$ مانده آن باشد. بعلاوه فرض کنید T_ρ توپولوژیِ تشابه روی M و n یک عدد طبیعی باشد. در این صورت توپولوژی تشابه روی M^n و توپولوژی حاصل‌ضربیِ حاصل از T_ρ روی M^n یکسان هستند.*

اثبات. فرض کنید U_π پایه توپولوژی حاصل‌ضربیِ حاصل از T_ρ روی M^n باشد. بعلاوه نمادهایی که در اثبات قضیه ۷.۴ را به کار بردیم نیز در نظر بگیرید. عضو دلخواهی از U_π مانند $B = B^\rho_{r_1}(a_1) \times \cdots \times B^\rho_{r_n}(a_n)$ و عنصر $\bar{b} \in B$ را در نظر بگیرید. قضیه ۵.۴ ایجاب می‌کند که برای هر $1 \leq i \leq n$، $0 \leq s_i < 1$ وجود دارد که $B^\rho_{s_i}(b_i) \subseteq B^\rho_{r_i}(a_i)$. در این صورت اگر قرار دهیم $s = \max\{s_1, \cdots, s_n\}$، آنگاه به‌راحتی می‌توان دید $B^{\rho_{min}}_s(\bar{b}) \subseteq B$. زیرا برای هر $\bar{c} \in B^{\rho_{min}}_s(\bar{b})$ داریم $\rho_{min}(\bar{c}, \bar{b}) > s$ و در نتیجه برای هر $1 \leq i \leq n$، $\rho(c_i, b_i) > s \geq s_i$ و لذا $c_i \in B^\rho_{s_i}(b_i) \subseteq B^\rho_{r_i}(a_i)$ که نتیجه می‌دهد $\bar{c} \in B$.

از طرفی هر عضوِ پایه معرفی شده برای توپولوژی تشابه در قضیه ۷.۴ مثل $B^{\rho_{min}}_r(\bar{a})$، عضوی از پایه توپولوژی حاصل‌ضربی است. در واقع $B^{\rho_{min}}_r(\bar{a}) = B^\rho_r(a_1) \times \cdots \times B^\rho_r(a_n)$. زیرا

$\bar{b} \in B^{\rho_{min}}_r(\bar{a})$ اگر و فقط اگر $\forall i \in \{1, \cdots, n\}, \rho(b_i, a_i) > r$

اگر و فقط اگر $\forall i \in \{1, \cdots, n\}, b_i \in B^\rho_r(a_i)$

اگر و فقط اگر $\bar{b} \in B^\rho_r(a_1) \times \cdots \times B^\rho_r(a_n)$.

□

۳.۴ ساختارهای پیوسته در منطق پایه مرتبه اول

در این زیربخش بعد از بیان مفهوم ساختار پیوسته در منطق پایه، نشان می‌دهیم تعبیر هر فرمول در منطق پایه، تحت توپولوژی‌های $*$-باز و تشابه، تابعی پیوسته می‌باشد.

تعریف ۹.۴. در BL∀ ساختار مرتبه اول $\mathcal{M}$ را یک ساختار پیوسته می‌نامیم هرگاه به ازای محمولِ تشابه ρ، همه نمادهای محمولی در اصل مصداقیت تشابه E۱ و همه نمادهای تابعی در اصل مصداقیت تشابه E۲ صدق کنند.

با توجه به قضیه ۱۰.۳ می‌دانیم اگر $\mathcal{M}$ یک ساختار مرتبه اول پیوسته باشد، آنگاه

تعبیر همه نمادهای محمولی و تابعی، با در نظر گرفتن توپولوژی $*$-گوی باز روی $[۰,۱]$ و توپولوژی تشابه روی ساختارها، توابعی پیوسته خواهند بود. قضیه‌های زیر نشان می‌دهند که تعبیر همه ترم‌ها، فرمول‌ها و گزاره‌ها نیز در ساختارهای پیوسته، توابعی پیوسته هستند.

قضیه ۱۰.۴. *با مفروضات ابتدای بخش، فرض کنید $\mathcal{M}$ یک ساختار مرتبه اول باشد که به ازای همه نمادهای تابعیِ f، $\mathcal{M} \models E۲$. در این صورت تعبیر همه ترم‌ها در $\mathcal{M}$ توابعی پیوسته خواهند بود.*

اثبات. با استقراء نشان می‌دهیم تعابیر ترمها پیوسته هستند. تعبیر ساده‌ترین ترم‌ها که متغییرها و ثوابت هستند بوضوح پیوسته هستند. اکنون فرض کنید $\{t_i\}_{i=۱}^{m}$ ترمهایی n تایی با تعابیر پیوسته باشند.

ثابت کنیم به ازای هر نماد تابعی m تایی f و nتایی $\bar{x}$، تعبیر $f\left(t_۱(\bar{x}), t_۲(\bar{x}), \cdots, t_m(\bar{x})\right)$ یک تابعِ پیوسته از (M^n, T_ρ^n) بتوی (M, T_ρ) است. با توجه به قضیه ۸.۴، چون توپولوژی تشابه T_ρ^m روی M^m با توپولوژی حاصل‌ضربیِ حاصل از T_ρ روی M^m برابر است، لذا به‌راحتی می‌توان نشان داد تابع $t^{\mathcal{M}} : (M^n, T_\rho^n) \to (M^m, T_\rho^m)$ با ضابطه

$$t^{\mathcal{M}}(\bar{a}) = \left(t_۱^{\mathcal{M}}(\bar{a}), \cdots, t_m^{\mathcal{M}}(\bar{a})\right)$$

یک تابع پیوسته است (مثلا [۱۵، فصل ۲ بخش ۱۹] را ببینید). اکنون از آنجایی که با توجه به قضیه ۱۰.۳، تابع $f^{\mathcal{M}} : (M^m, T_\rho^m) \to (M, T_\rho)$ نیز یک تابع پیوسته است، لذا $f^{\mathcal{M}} \circ t^{\mathcal{M}}$ که همان تعبیر $f\left(t_۱(\bar{x}), t_۲(\bar{x}), \cdots, t_m(\bar{x})\right)$ می‌باشد، یک تابع پیوسته از (M^n, T_ρ^n) بتوی (M, T_ρ) است. $\square$

اکنون می‌توان به بیان و اثبات اصلی‌ترین نتیجه مقاله که در واقع هدف نهایی مقاله است، پرداخت.

قضیه ۱۱.۴. *با مفروضات ابتدای بخش، اگر $\mathcal{M}$ یک ساختار مرتبه اول پیوسته باشد، آنگاه تعبیر همه فرمول‌ها در $\mathcal{M}$ توابعی پیوسته خواهند بود.*

اثبات. با استقراء روی پیچیدگی فرمول‌ها نشان می‌دهیم تعابیر فرمول‌ها توابعی پیوسته هستند. لازم به ذکر است با توجه به قضیه قبل، تعابیر ترم‌ها توابع پیوسته‌ای هستند.

۱. به ازای نماد محمولی m تاییِ P و nتایی $\bar{x}$ فرض کنید

$$\varphi(\bar{x}) = P\big(t_1(\bar{x}), ..., t_m(\bar{x})\big)$$

که تعبیر ترمهای $\{t_i\}$ توابعی پیوسته از (M^n, T_ρ^n) بتوی (M, T_ρ) هستند. مشابه اثبات قضیه ۱۰.۴، پیوستگی تعبیرِ $t(\bar{x}) = (t_1(\bar{x}), \cdots, t_m(\bar{x}))$ و نیز پیوستگی تعبیر P، ایجاب می‌کنند که $P^{\mathcal{M}} \circ t^{\mathcal{M}}$ که تعبیر $\varphi(\bar{x})$ است، یک تابع پیوسته از (M^n, T_ρ^n) بتوی $([0,1], T_*)$ باشد.

۲. فرض کنید $\varphi(\bar{x}) = \psi(\bar{x}) \to \chi(\bar{x})$ که $\psi^{\mathcal{M}}$ و $\chi^{\mathcal{M}}$ توابعی پیوسته هستند. چون توپولوژی $\mathbf{T}_*$ روی $[0,1]^2$ با توپولوژی حاصل‌ضربیِ حاصل از T_* روی $[0,1]^2$ برابر است، لذا $\theta^{\mathcal{M}}(\bar{a}) = \big(\varphi^{\mathcal{M}}(\bar{a}), \psi^{\mathcal{M}}(\bar{a})\big)$ یک تابع پیوسته از (M^n, T_ρ^n) بتوی $([0,1]^2, \mathbf{T}_*)$ است. اکنون چون با توجه به قضیه ۷.۳، تابع $\Rightarrow_*$ از $([0,1]^2, \mathbf{T}_*)$ بتوی $([0,1], T_*)$ نیز یک تابع پیوسته است، لذا تابع $\varphi^{\mathcal{M}}$ که همان $\Rightarrow_* \circ \theta^{\mathcal{M}}$ می‌باشد، نیز یک تابع پیوسته است.

۳. $\varphi(\bar{x}) = \psi(\bar{x}) \& \chi(\bar{x})$ مشابه ۲ است.

۴. فرض کنید $\varphi(\bar{x}) = \exists z \psi(z, \bar{x})$ که $\psi^{\mathcal{M}}$ یک تابع پیوسته است. برای اینکه نشان دهیم $\varphi^{\mathcal{M}} : (M^n, T_\rho^n) \to ([0,1], T_*)$ یک تابع پیوسته است، باید نشان دهیم برای هر گوی $*$-بازِ $B_s(x)$، $\left(\varphi^{\mathcal{M}}\right)^{-1}(B_s(x))$ زیرمجموعه بازی از (M^n, T_ρ^n) است. برای این منظور نشان میدهیم هر نقطه $\bar{a} \in \left(\varphi^{\mathcal{M}}\right)^{-1}(B_s(x))$ یک نقطه درونی آن است. چون $\bar{a} \in \left(\varphi^{\mathcal{M}}\right)^{-1}(B_s(x))$ لذا $\varphi^{\mathcal{M}}(\bar{a}) \in B_s(x)$ که به این معنی است که $\sup_{c \in M} \psi^{\mathcal{M}}(c, \bar{a}) \in B_s(x)$. اکنون چون $B_s(x)$ یک مجموعه $*$ باز است، $c \in M$ وجود دارد که $\psi^{\mathcal{M}}(c, \bar{a}) \in B_s(x)$. از طرفی تابع $\psi^{\mathcal{M}}$ پیوسته است و لذا $\left(\psi^{\mathcal{M}}\right)^{-1}(B_s(x))$ یک زیرمجموعه بازِ M^{n+1} است و بنابراین $0 \leq r < 1$ موجود است که $B_r^\rho((c, \bar{a})) \subseteq \left(\psi^{\mathcal{M}}\right)^{-1}(B_s(x))$. نشان میدهیم به ازای همین r، $B_r^\rho(\bar{a}) \subseteq \left(\varphi^{\mathcal{M}}\right)^{-1}(B_s(x))$. برای اثبات، فرض کنید $\bar{b} \in B_r^\rho(\bar{a})$. میدانیم ρ یک محمول تشابه است و لذا با توجه به خاصیت S1 ، $\rho^{\mathcal{M}}(c, c) = 1$ و بنابراین

$$\rho^{\mathcal{M}}_{n+1}\Big((c,\bar{a}),(c,\bar{b})\Big) = \rho^{\mathcal{M}}(c,c) * \rho^{\mathcal{M}}_n(\bar{a},\bar{b}) = \rho^{\mathcal{M}}_n(\bar{a},\bar{b}) > r.$$

پس $(c,\bar{b}) \in B^{\rho}_{r}\left((c,\bar{a})\right) \subseteq (\psi^{\mathcal{M}})^{-1}\left(B_s(x)\right)$ که به این معنی است که $e_*\left(\psi^{\mathcal{M}}(c,\bar{b}),x\right) > s$ و لذا $\sup_{c\in M} e_*\left(\psi^{\mathcal{M}}(c,\bar{b}),x\right) > s$. اکنون چون با توجه به قضیه ۷.۳، تابع $e_* : ([0,1]^2,\mathbf{T}_*) \to ([0,1],T_*)$ پیوسته است، لذا $e_*\left(\sup_{c\in M}\psi^{\mathcal{M}}(c,\bar{b}),x\right) > s$ پس $e_*\left(\varphi^{\mathcal{M}}(\bar{b}),x\right) > s$ که منجر به اثبات حکم می‌گردد.

۵. $\varphi(\bar{x}) = \forall z\psi(z,\bar{x})$ مشابه ۴ است.

□

سخن پایانی

در منطق‌های فازی مبتنی بر t-نرم پیوسته یکی از مشکلات توسعه نتایج از منطق کلاسیک به منطق فازی، عدم پیوستگی رابط‌های منطقی و تعابیر فرمول‌ها است. همانطور که در مقاله حاضر دیدید، در نظر گرفتنِ توپولوژی $*$-گوی باز روی $[0,1]$ و $[0,1]^2$ و نیز توپولوژی تشابه روی ساختارها و سپس در نظر گرفتن تعابیر پیوسته برای نمادهای تابعی و محمولی، موجب مرتفع شدن این نقیصه می‌گردد. نویسنده مقاله با استفاده از همین موضوع، قضیه فشردگی را در حالت کلی برای منطق‌های فازی مرتبه اول مبتنی بر t-نرم پیوسته ثابت کرده است [۱۳]. با توجه به مطالب مقاله حاضر و نیز مقالات [۱۳] و [۵]، بررسی قضیه حذف تایپ و قضیه آیزوموفیسم شلا-کیسلر از مواردی هستند که شاید اکنون در نظریه مدل منطق پایه به شکل کلی قابل بررسی باشند.

تشکر و قدردانی

در پایان، قطعاً داوران محترم که با نظرات ارزشمند خود موجبات بهبود مقاله را فراهم آوردند، شایسته تقدیر و تشکر هستند.

مراجع

[۱] اسلامی، ا. (۱۳۹۱) منطق فازی و کاربردهای آن، انتشارات دانشگاه شهید باهنر کرمان، کرمان، ایران.

[۲] خاتمی، س. م. ا. (۱۳۹۹) ابرضرب ساختارها در منطق فازی مرتبه اول مبتنی بر نرم مثلثی پیوسته، پنجاه و یکمین کنفرانس ریاضی ایران، کاشان، ایران، صص ۳۴۱ تا ۳۴۶.

[۳] خاتمی، س. م. ا. و پورمهدیان، م. (۱۳۹۸) منطق پیوسته، منطق پژوهی، شماره ۱۹، صص ۸۹ تا ۱۲۰. پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی.

[۴] خاتمی، س. م. ا. و خاکشور، ق. (۱۳۹۹) ساختارهاي پیوسته در منطق فازي مرتبه اول، نوزدهمین کنفرانس سیستمهای فازی ایران، مشهد، ایران، صص ۱۲۸ تا ۱۳۲.

[5] Ben Yaacov, I. and Berenstein, A. and Henson, C. W. and Usvyatsov, A. (2008) Model theory for metric structures, in Model theory with applications to algebra and analysis, Vol. 2, pp. 315–427.

[6] Chang, C. C. (1966) Continuous Model Theory, Princeton University Press.

[7] Cignoli, R. and Esteva, F. and Godo, L. and Torrens, A. (2000) Basic Fuzzy Logic is the logic of continuous t-norms and their residua,Soft Computing, No. 4, pp. 106-112.

[8] Cintula, P. and Navara, M. (2004) Compactness of fuzzy logics,Fuzzy sets and systems, No. 143, pp. 59-73.

[9] Esteva, F. and Godo, L. (2001) Monoidal t-norm based logic: Towards a logic for left-continuous t-norms,Fuzzy Sets and Systems, No. 124, pp. 271-288.

[10] Hájek, P. (1998) Metamathematics of Fuzzy Logic. Kluwer Academic Publication.

[11] Khatami, S. M. A. (2021) Compactnees of first-order fuzzy logics,8th International Annual Conference of the Iranian Association for logic, Tarbiat Modares University, 17-18 February 2021.

[12] Khatami, S. M. A. (2018) A metric on [0,1] which makes it a topological SL-algebra ,In Proceedings of the 6th Iranian Joint Congress on Fuzzy and Intelligent Systems و Kerman, Iran, pp. 111-113.

[13] Khatami, S. M. A. (2022) Compactnees of first-order fuzzy logics,Iranian Journal of Fuzzy Systems, Vol. 19, No. 3, pp. 53-68.

[14] Khatami, S. M. A. (2022) A metric-like topology on BL-algebras,Journal of Algebraic Systems, Vol. 9, No. 2, pp. 281-298.

[15] Munkres, J. R. (2000) Topology, 2nd edition, Pearson College Div.

[16] Murinova, P. and Novak, V. (2006) Omitting types in fuzzy logic with evaluated syntax,Mathematical Logic Quarterly, No. 52(3), pp. 259-268.

[17] Pavelka, J. (1979) On fuzzy logic I, II, III.,Mathematical Logic Quarterly, No. 25(3-6, 7-12, 25-29), pp. 45-52, 119-134, 447-464.

[18] Tavana, N. and Pourmahdian, M. and Didevar, F. (2012) Compactness in first-order Lukasiewicz logics,Logic journal of the IGPL, No. 20, pp. 254-265.