سیستم‌های فازی و کاربردها
سال ششم، شماره اول (بهار و تابستان ۱۴۰۲)
صص. ۴۹ تا ۸۲
شاپای چاپی: ۲۷۱۷-۴۴۰۹
شاپای الکترونیکی: ۲۷۱۷-۳۹۸۴
DOI:10.22034/JFSA.2023.366676.1149

ابرایده‌آل‌های جاذب فازی مدرج در ابرحلقه‌های ضربی

پیمان غیاثوند* و فرخنده فرضعلی پور

گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور،ص. پ. ۴۶۹۷-۱۹۳۹۵، تهران، ایران

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۰۷/۲۹ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۰۲/۰۶
نوع مقاله: علمی-پژوهشی

چکیده

در این مقاله، مفاهیم مختلفی از ابرایده‌آل‌های جاذب فازی مدرج را در یک ابرحلقه ضربی جابجایی مانند ابرایده‌آل ۲-جاذب فازی مدرج، ابرایده‌آل ۲-جاذب به طور قوی فازی مدرج، ابرایده‌آل ۲-جاذب کاملاً ضعیف فازی مدرج و ابرایده‌آل K-۲-جاذب فازی مدرج را تعریف و مورد مطالعه قرار می‌دهیم. برخی خاصیت‌های اساسی و نتایج جدید از این نوع ساختارها را بیان و اثبات می‌کنیم. همچنین رابطه بین ابرحلقه‌های ضربی فازی مدرج و ابرحلقه‌های ضربی مدرج را با استفاده از مجموعه‌های برشی ارایه کرده و شرایطی که تحت آن، مجموعه خارج قسمتی یک ابرحلقه ضربی جابجایی مدرج روی یک ابرایده‌آل فازی، یک ابرحلقه ضربی مدرج می‌شود را بیان می‌کنیم.

۱ مقدمه

مفهوم مدرج کردن در جبر به‌ویژه مدول‌های مدرج، در مطالعه‌ی جنبه‌های همولوژیکی حلقه‌ها ضروری هستند. در بیشتر موارد برای توسعه و گسترش جبر جابجایی بر حلقه‌های مدرج تاکید دارند. حلقه‌های مدرج در هندسه جبری و جبر جابجایی نقش

عبارات و کلمات کلیدی: ابرایده‌آل ۲-جاذب مدرج، ابرایده‌آل ۲-جاذب مدرج فازی، ابرحلقه ضربی مدرج، ابرحلقه ضربی مدرج فازی.

Email(s): p_ghiasvand@pnu.ac.ir and f_farzalipour@pnu.ac.ir.

Mathematics Subject Classification: 20N20; 08A72; 16W50

اساسی دارند. مدرج‌سازی چه در سطح مقدماتی و چه در سطح پیشرفته در علوم ریاضی کاربردهای فراوان دارد [۱۷]. در سال‌های اخیر حلقه‌ها و مدول‌ها با ساختارهای مدرج به‌طور گسترده مورد مطالعه قرار گرفته است و این مفهوم توسط برخی نویسندگان به ابرساختارهای جبری تعمیم یافته و مفاهیمی همچون ابرحلقه‌های مدرج و ابرمدول‌های مدرج مورد مطالعه قرارگرفته است [۶، ۷، ۸، ۹].

از طرفی در سال ۱۹۳۴، مارتی [1] ریاضیدان فرانسوی در هشتمین کنگره ریاضی کشورهای اسکاندیناوی برای نخستین بار مفهوم یک ابرگروه را به‌عنوان تعمیمی از مفهوم یک گروه معرفی کرد و برخی از خواص آن را تشریح کرد و آن را در بخش‌های مختلفی از جبر همچون توابع جبري، توابع گویا و گروه‌هاي ناجابجایی بکار برد [۱۶]. در ساختار جبری کلاسیک ترکیب دو عنصر یک عنصر است، در حالی که در ابرساختار جبری ترکیب دو عنصر یک مجموعه است. ابرگروه و ابرحلقه تعمیمی از ساختارهای جبری گروه و حلقه می‌باشند که کاربردهای فراوانی در زمینه‌های مختلف علوم محض و کاربردی دارند از جمله می‌توان به هندسه‌ی اقلیدسی و نااقلیدسی، گراف و ابرگراف‌ها، مشبکه و ابرمشبکه، رمزنگاری، نظریه‌ی کدگذاری، شبکه‌های کامپیوتری و غیره اشاره نمود (نگاه کنید به [۳، ۴]). برخلاف جبر کلاسیک، در نظریه ابرساختار انواع مختلفی از ابرحلقه‌ها وجود دارد که توسط بسیاری از نویسندگان مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. مفهوم ابرحلقه توسط کراسنر [2] در سال ۱۹۸۳ معرفی شد، که در آن جمع یک ابرعمل است در حالی که ضرب یک عمل است. یک دسته مهم از ابرحلقه‌ها توسط روتا [3] در سال ۱۹۸۲ معرفی شد، که در آن ضرب یک ابرعمل است در حالی که جمع یک عمل است که به آن حلقه‌های ضربی می گویند [۱۹].

از سوی دیگر نظریه مجموعه‌های فازی توسط عسکرزاده استاد ایرانی تبار دانشگاه برکلی در سال ۱۹۶۵ ارایه شد [۲۲]. این نظریه برخی ریاضیدانان را بر آن داشت تا رابطه این نظریه را با سایر بخش‌های علوم ریاضیات و مهندسی مورد بررسی قرار دهند. روزنفلد [4] این مفهوم را در نظریه گروه‌ها به کار برد [۱۸]. در جبر جابجایی لیو [5] راه را

[1]Marty
[2]Krasner
[3]Rota
[4]Rosenfeld
[5]Liu

برای توسعه ساختارهای جبری فازی با معرفی مفاهیم زیرگروه نرمال فازی، زیرحلقه فازی و حاصل‌ضرب مجموعه‌های فازی باز کرد. لیو مفهوم ایده‌آل فازی یک حلقه را معرفی کرد [۱۲، ۱۳]. مالیک [۶] و موردسون [۷] جمع مستقیم حلقه‌های فازی و ایده‌آل‌های فازی را تعریف و مورد مطالعه قرار دادند [۱۴، ۱۵]. اسلامی مفهوم حلقه‌های فازی مدرج روی اعداد طبیعی را با استفاده از جمع مستقیم زیرگروه فازی معرفی کرد و سپس راهی برای فازی شدن حلقه‌های چند جمله‌ای ارائه کرد [۵]. در سال‌های اخیر ارتباط بین نظریه ابرساختارهای جبری و نظریه فازی ایجاد شده است تا مفهوم جدیدی به‌نام نظریه ابرساختارهای فازی ارائه گردد (به عنوان نمونه رجوع شود به [۵، ۲۰]). در واقع، ابرساختارهای فازی نشان دهنده ارتباط بین مجموعه‌های فازی و ابرساختارهای جبری است.

در سال ۲۰۰۷، بداوی [۸] مفهوم ایده‌آل‌های ۲-جاذب از یک حلقه جابجایی با عنصر همانی که در واقع تعمیم ایده‌آل‌های اول بود را ارائه کرد و برخی خاصیت‌های اساسی در این خصوص را اثبات نمود [۲]. انبارلوئی در سال ۲۰۱۷ مفهوم ایده‌آل‌های ۲-جاذب از یک حلقه جابجایی را به ابرایده‌آل‌های ۲-جاذب از یک ابرحلقه ضربی گسترش داد [۱]. ابرایده‌آل‌های اول فازی نقش بسیار مهمی در نظریه ابرحلقه‌های فازی دارند. هدف اصلی در این مقاله گسترش این مفهوم به ابرایده‌آل‌های جاذب فازی مدرج در یک ابرحلقه ضربی جابجایی مانند ابرایده‌آل ۲-جاذب فازی مدرج، ابرایده‌آل اولیه ۲-جاذب فازی مدرج، ابرایده‌آل ۲-جاذب کاملاً ضعیف فازی مدرج و ابرایده‌آل K-۲-جاذب فازی مدرج خواهد بود. برخی خاصیت‌های اساسی و نتایج جدید از این نوع ساختارها را بیان و اثبات می‌کنیم. همچنین رابطه بین ابرحلقه‌های ضربی فازی مدرج و ابرحلقه‌های ضربی مدرج را با استفاده از مجموعه‌های برشی ارایه کرده و شرایطی که تحت آن، مجموعه خارج قسمتی یک ابرحلقه ضربی جابجایی مدرج روی یک ابرایده‌آل فازی، یک ابرحلقه ضربی مدرج می‌شود را بیان می‌کنیم.

---

[6] Malik

[7] Mordeson

[8] Badawi

۲ پیش‌نیازها

در این بخش، تعاریف و قضایایی را که در این مقاله مورد استفاده قرار می‌گیرد را بیان می‌کنیم.

تعریف ۱.۲. [۴] فرض کنید H یک مجموعه‌ی ناتهی و $\wp^*(H)$ خانواده تمام زیرمجموعه‌های ناتهی H باشد. هر تابع $\circ : H \times H \longrightarrow \wp^*(H)$ یک ابرعمل روی H و زوج $(H, \circ)$ را یک ابرساختار می‌نامیم.

برای هر دو زیرمجموعه‌ی ناتهی A و B از H و $x \in H$، ابرعمل $\circ$ را به‌صورت زیر به زیرمجموعه‌های H گسترش می‌دهیم:

$$A \circ B = \bigcup_{a\in A,\ b\in B} a \circ b, \quad x \circ B = \{x\} \circ B, \quad A \circ x = A \circ \{x\}.$$

لازم به‌ذکر است که در ابرساختارهای جبری $x = \{x\}$ در نظر گرفته می‌شود.

تعریف ۲.۲. [۴] ابرساختار $(H, \circ)$، یک نیم‌ابرگروه نامیده می‌شود هرگاه برای هر $x, y, z \in H$ داشته باشیم:

$$x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z.$$

تعریف ۳.۲. [۴] ابرساختار $(H, \circ)$، یک شبه‌ابرگروه نامیده می‌شود هرگاه برای هر $a \in H$ داشته باشیم:

$$a \circ H = H \circ a = H.$$

شرط فوق اصل تکثیر نیز نامیده می‌شود که معادل است با:

$$\forall a, b \in H; \quad \exists x, y \in H; \quad a \in x \circ b \cap b \circ y.$$

تعریف ۴.۲. [۴] نیم‌ابرگروه $(H, \circ)$ که دارای خاصیت اصل تکثیر باشد، یک ابرگروه نامیده می‌شود.

تعریف ۵.۲. [۴] فرض کنید $(H, \circ)$ یک ابرگروه باشد. اگر $u \in H$ موجود باشد به‌طوری‌که برای هر $x \in H$ داشته باشیم $x \circ u = u \circ x = \{x\}$، آنگاه u اسکالر واحد H نامیده می‌شود.

در تعریف ابرحلقه به این نکته باید توجه داشت که تعاریف متفاوتی از ابرحلقه وجود دارد که تعریف عمومی‌تر ابرحلقه که توسط وجکلیس در سال ۱۹۸۷ ارایه گردید را بیان می‌کنیم.

تعریف ۶.۲. [۲۱] ابرساختار جبری $(R,+,\circ)$، ابرحلقه نامیده می‌شود هرگاه در اصول زیر صدق کند:

۱. $(R,+)$ یک ابرگروه باشد؛

۲. $(R,\circ)$ نیم‌ابرگروه باشد؛

۳. به ازای هر $x,y,z\in R$ داشته باشیم

$$x\circ(y+z)\subseteq(x\circ y)+(x\circ z),\quad (x+y)\circ z\subseteq(x\circ z)+(y\circ z).$$

اگر در تعریف ابرحلقه $(R,+,\circ)$، $+$ یک عمل باشد آنگاه R را یک ابرحلقه ضربی می‌نامیم و اگر $\circ$ یک عمل باشد R را یک ابرحلقه جمعی می‌نامیم.

اگر در رابطه (۳) تعریف ابرحلقه به‌جای زیرمجموعه تساوی قرار دهیم، آنگاه ابرحلقه را توزیع‌پذیر قوی می‌نامیم.

ابرحلقه $(R,+,\circ)$ ممکن است نسبت به هر یک از ابرعمل‌های $+$ و $\circ$ جابجایی باشد. ابرحلقه R را جابجایی می‌گوییم هرگاه نسبت به هر دو ابرعمل $+$ و $\circ$ جابجایی باشد.

تعریف ۷.۲. [۴] فرض کنید $(R,+,\circ)$ یک ابرحلقه باشد. زیرمجموعه‌ی ناتهی S از R را یک ابرایده‌آل گویند، هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

(۱) $(S,+)$ یک زیرابرگروه از $(R,+)$ باشد؛

(۲) $(R\circ S)\cup(S\circ R)\subseteq S$.

تعریف ۸.۲. [۱۶] ساختار جبری $(R,+,\circ)$ یک ابرحلقه ضربی نامیده می‌شود، هرگاه در اصول زیر صدق کند:

۱. $(R,+)$ یک گروه با عنصر خنثی ۰ باشد؛

۲. $(R,\circ)$ نیم‌ابرگروه باشد؛

۳. به ازای هر $x,y,z\in R$ قوانین توزیع‌پذیری برقرار باشد، یعنی

$$x\circ(y+z)\subseteq(x\circ y)+(x\circ z),\quad (x+y)\circ z\subseteq(x\circ z)+(y\circ z).$$

در سراسر این مقاله $(R,+,\circ)$ یک ابرحلقه ضربی جابجایی با عنصر همانی ۱ در نظر می‌گیریم.

تعریف ۹.۲. فرض کنید G یک گروه با عضو همانی e باشد. ابرحلقه ضربی R را یک ابرحلقه ضربی مدرج گوییم، هرگاه یک خانواده از زیرگروه‌های جمعی $\{R_g \mid g\in G\}$ از R موجود باشند به‌طوری‌که $R=\oplus_{g\in G}R_g$ و برای هر $g,h\in G$ داشته باشیم $R_gR_h\subseteq R_{gh}$.

عنصر x از ابرحلقه ضربی مدرج R را همگن فازی گوییم، هرگاه $x\in\cup_{g\in G}R_g$. مجموعه تمام عناصر همگن را با نماد $H(R)$ نشان می‌دهیم. اگر $x\in R$، در این‌صورت $x=\sum_{g\in G}x_g$.

تعریف ۱۰.۲. [۱۴] فرض کنید یک گروه $\mu: X\longrightarrow[۰,۱]$ است که در آن $[۰,۱]$ بازه اعداد حقیقی بین ۰ و ۱ است. نگاشت μ به هر عضو x از X یک درجه عضویت $\mu(x)$، که $۰\leq\mu(x)\leq ۱$، را نسبت می‌دهد. تمام زیرمجموعه‌های فازی از X را با $F(X)$ نمایش می‌دهیم و آن را مجموعه توانی فازی از X می‌نامیم.

تعریف ۱۱.۲. [۱۴] یک مجموعه فازی از یک مجموعه ناتهی X یک نگاشت $\mu: X\longrightarrow[۰,۱]$ است که در آن $[۰,۱]$ بازه اعداد حقیقی بین ۰ و ۱ است. نگاشت μ به هر عضو x از X یک درجه عضویت $\mu(x)$، که $۰\leq\mu(x)\leq ۱$، را نسبت می‌دهد. تمام زیرمجموعه‌های فازی از X را با $F(X)$ نمایش می‌دهیم و آن را مجموعه توانی فازی از X می‌نامیم.

تعریف ۱۲.۲. [۱۴] مجموعه نقاطی از X که برای آنها $\mu(x)>t, t\in[۰,۱]$ می‌باشد زیرمجموعه t-برشی از X نسبت به μ نامیده می‌شود و با نماد μ_t نشان داده می‌شود. از این رو

$$.\mu_t = \{x \in X \mid \mu(x) > t\}$$

تعریف ۱۳.۲. [۱۴] برای $\mu, \nu \in F(X)$ ، $\nu \subseteq \mu$ اگر و فقط اگر برای هر $x \in X$ داشته باشیم $.\mu(x) \leq \nu(x)$

تعریف ۱۴.۲. [۱۴] فرض کنید $x \in X$ و $r \in (\circ, 1]$. یک نقطه فازی، که با نماد x_r نمایش داده می‌شود، یک زیر مجموعه فازی از X است به‌طوری $x_r \in F(X)$ و

$$.x_r(y) = \begin{cases} r & y = x; \\ \circ & \text{در غیر این‌صورت} \end{cases}$$

اگر x_r یک نقطه فازی از X باشد و $x_r \subseteq \mu \in F(X)$ در این‌صورت می‌توان نوشت $.x_r \in \mu$

تعریف ۱۵.۲. [۱۴] برای $A \subseteq X$ تابع عضویت مجموعه A را با نماد $\chi_A \in F(X)$ نشان داده و به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$.\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A; \\ \circ & \text{در غیر این‌صورت} \end{cases}$$

تعریف ۱۶.۲. [۱۴] فرض کنید μ و ν دو زیرمجموعه فازی در ابرحلقه ضربی جابجایی R باشند. به ازای هر $w \in R$، زیرمجموعه‌های فازی $\mu\nu$ و $\mu \circ \nu$ به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(\mu\nu)(w) = \sup\{\inf_{i=1}^{n}\{\mu(r_i) \wedge \nu(s_i)\} \ \mid r_i, s_i \in R, n \in \mathbb{N}, w \in \textstyle\sum_{i=1}^{n} r_i s_i\},$$

$$.(\mu \circ \nu)(w) = \sup\{\mu(r) \wedge \nu(s) \mid r, s \in R, w \in rs\}$$

تعریف ۱۷.۲. [۲۳] فرض کنید μ یک زیرمجموعه فازی در ابرحلقه ضربی جابجایی $(R, +, \circ)$ با عنصر همانی ۱ باشد به‌طوری‌که $.\mu(\circ) = 1$

(a) μ را یک زیرگروه فازی از ابرحلقه ضربی R می‌گوییم، هرگاه برای هر $x, y \in R$ داشته باشیم:

$$.\mu(x-y) \geq min\{\mu(x), \mu(y)\}$$

(b) زیرگروه فازی μ را یک ابرحلقه ضربی فازی از R می‌گوییم، هرگاه برای هر $x, y \in R$ داشته باشیم:

$$.\inf_{z\in x\circ y} \mu(z) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\}$$

(c) زیرگروه فازی μ را یک ابرایده‌آل فازی از ابرحلقه ضربی جابجایی R می‌گوییم، هرگاه برای هر $x, y \in R$ داشته باشیم:

$$.\inf_{z\in x\circ y} \mu(z) \geq \max\{\mu(x), \mu(y)\}$$

تعریف ۱۸.۲. [۱۵] فرض کنید $\{\mu_i \mid i \in I\}$ یک خانواده از زیرمجموعه‌های فازی در R باشد. برای هر $x \in R$، زیر مجموعه فازی $\sum_{i\in I} \mu_i$ در R را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$.\left(\sum_{i\in I} \mu_i\right)(x) = \sup\{\inf\{\ \mu_i(x_i) \mid x = \sum_{i\in I} x_i,\ \forall i \in I\}$$

ملاحظه ۱۹.۲. فرض کنید $\{\mu_i \mid i \in I\}$ یک خانواده از زیرگروه فازی یا ابرحلقه فازی یا ابرایده‌آل فازی در ابرحلقه ضربی جابجایی R باشد. در این‌صورت $\sum_{i\in I} \mu_i$ به ترتیب یک گروه فازی یا ابرحلقه فازی یا ابرایده‌آل فازی در R است. برای هر $x \in R$، اگر $i = j$ قرار می‌دهیم $x_j = x$ و اگر $i \neq j$ قرار می‌دهیم $x_j = ۰$، در این‌صورت با استفاده از تعریف $\sum_{i\in I} \mu_i$ خواهیم داشت:

$$.\mu_i \subseteq \sum_{j\in I} \mu_j, \quad \forall j \in I$$

تعریف ۲۰.۲. [۱] به ازای $i \in I$، فرض کنید μ_i و μ زیرمجموعه‌های فازی در ابرحلقه ضربی جابجایی R باشند. در این‌صورت μ را جمع مستقیم ضعیف از $\sum_{i\in I} \mu_i$ می‌نامیم، هرگاه داشته باشیم $\mu = \sum_{i\in I} \mu_i$ و $\mu_j \cap \sum_{i\neq j} \mu_i = ۱_۰$ که

$$.۱_۰(x) = \begin{cases} ۱ & x = ۰; \\ ۰ & x \neq ۰ \end{cases}$$

در این حالت $.\mu = \oplus_{i\in I}\mu_i$

۳ ابرحلقه‌های ضربی فازی مدرج

تعریف ۱.۳. فرض کنید G یک گروه با عضو همانی e و μ یک ابرحلقه ضربی فازی روی ابرحلقه مدرج R باشد. μ را یک G-ابرحلقه فازی مدرج می‌نامیم، هرگاه خانواده‌ی $\{\mu_g \mid g \in G\}$ از زیرگروه‌های جمعی فازی R وجود داشته باشد به‌طوری‌که $\mu = \oplus_{g\in G}\mu_g$ و برای هر $g, h \in G$ داشته باشیم $\mu_g\mu_h \subseteq \mu_{gh}$ که

$$(\mu_g\mu_h)(x) = \sup\{\inf_{i=1}^{n}\{\mu_g(r_i) \wedge \mu_h(s_i)\} \ \mid r_i, s_i \in R, n \in \mathbb{N}, x \in \sum_{i=1}^{n} r_i \circ s_i\}.$$

بعلاوه، به ازای هر $x \in R$، $\mu_g(x) = \mu(x_g)$ که در آن $x = \sum_{g\in G} x_g$.

تعریف ۲.۳. فرض کنید γ یک ابرایده‌آل فازی از ابرحلقه ضربی مدرج R باشد. در این‌صورت γ را یک ابرایده‌آل فازی مدرج از R گوییم، هرگاه یک خانواده از زیرابرگروه‌های $\{\gamma_g\}_{g\in G}$ موجود باشد به‌طوری‌که $\gamma = \oplus_{g\in G}(\gamma \cap \mu_g)$.

مثال ۳.۳. فرض کنید $G = (\mathbb{Z}_۲, +)$ گروه دوری از مرتبه ۲ باشد. در این‌صورت ابرحلقه ضربی فازی زیر یک G-ابرحلقه ضربی فازی مدرج می‌باشد.

$\circ$	a	b	c	d
a	$\{a\}$	$\{a\}$	$\{a\}$	$\{a\}$
b	$\{a\}$	$\{a,d\}$	$\{a,c\}$	$\{a,b\}$
c	$\{a\}$	$\{a,c\}$	$\{a\}$	$\{a,c\}$
d	$\{a\}$	$\{a,b\}$	$\{a,c\}$	$\{a,d\}$

$+$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

و

$$\mu(a) = ۱, \mu(b) = \mu(c) = \frac{۱}{۳}, \mu(d) = \frac{۲}{۳}.$$

در این‌صورت $\mu_۰ = \{a, d\}$ و $\mu_۱ = \{a, b\}$ زیرگروه‌های فازی از μ هستند به‌طوری‌که

$$\mu = \mu_۰ \bigoplus \mu_۱.$$

از طرفی دیگر داریم

$$\mu_0\mu_0 \subseteq \mu_0,\ \mu_0\mu_1 \subseteq \mu_1,\ \mu_1\mu_0 \subseteq \mu_1,\ \mu_1\mu_1 \subseteq \mu_0.$$

مثال ۴.۳. فرض کنید $R = (Z[i], +, \cdot)$ حلقه اعداد صحیح گاوسی باشد. همچنین فرض کنید $A \in P^*(R)$ و $|A| \geq 2$. در این‌صورت ابرحلقه ضربی با عنصر صفر $(R_A, +, \circ)$ وجود دارد که $R_A = R$ و

$$x, y \in R\text{،}\ x \circ y = \{x \cdot a \cdot y : a \in A\}.$$

فرض کنید $A = \{3, 4\}$ و $G = \mathbb{Z}_2$ گروه دوری از مرتبه ۲ باشد. در این‌صورت ابرحلقه ضربی $\lambda = (\mathbb{Z}[i], +, \circ)$ یک G-ابرحلقه ضربی فازی مدرج است به‌طوری‌که

$$\lambda = \lambda_0 \bigoplus \lambda_1,\quad \lambda_i\lambda_j \subseteq \lambda_{ij},\quad \forall i, j \in G$$

که

$$\lambda(x) = \begin{cases} 1 & x = 0; \\ \frac{3}{4} & x \in \mathbb{Z} - \{0\}; \\ \frac{2}{3} & x \in \mathbb{Z}[i] - \mathbb{Z} \end{cases}$$

و

$$\lambda_0(x) = \begin{cases} 1 & x \in i\mathbb{Z}; \\ \frac{3}{4} & x \in \mathbb{Z}[i] - i\mathbb{Z} \end{cases}$$

و

$$\lambda_1(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Z}; \\ \frac{2}{3} & x \in \mathbb{Z}[i] - \mathbb{Z} \end{cases}.$$

قضیه ۵.۳. *فرض کنید G یک گروه و μ یک ابرحلقه ضربی فازی روی R باشد. در این‌صورت μ یک G-ابرحلقه ضربی فازی مدرج است اگر و تنها اگر برای هر $t \in [0, 1]$ مجموعه t-برشی*

$$\mu_t = \{x \in R \mid \mu(x) > t\}\text{،}$$

یک G-*ابرحلقه مدرج باشد.*

اثبات. فرض کنید μ یک G- ابرحلقه ضربی فازی مدرج باشد. بنابراین یک خانواده از زیرگروه‌های فازی $\{\mu_g\}_{g\in G}$ موجود است به‌طوری‌که $\mu = \sum_{g\in G}\mu_g$ و برای هر $g,h\in G$ داریم $\mu_g\mu_h\subseteq\mu_{gh}$. فرض کنید $t\in[۰,۱]$ و $x\in\mu_t$. لذا $x=\sum_{g\in G}x_g$ و $\mu(x)=\inf\{\mu_g(x)\mid g\in G\}$. چون $\mu(x)>t$، پس برای هر $g\in G$، $\mu_g(x)>t$. بنابراین خواهیم داشت $\mu_t=\sum_{g\in G}\mu_{tg}$ که $\mu_{tg}=\{x_g\in R\mid\mu(x_g)>t\}$. برای هر $g,h\in G$، فرض کنید $۰\neq x\in\mu_{tg}\cap\mu_{th}$. بنابراین خواهیم داشت $\mu_g\cap\mu_h>t$. در نتیجه $\mu_g\cap\mu_h\neq ۱_۰$، که در تناقض با تعریف ابرحلقه ضربی فازی مدرج است. بنابراین $x=۰$ و $\mu_t=\oplus_{g\in G}\mu_{tg}$. حال نشان می‌دهیم $\mu_{tg}\mu_{th}\subseteq\mu_{tgh}$. برای این‌کار فرض کنید $x_g\in\mu_{tg}$ و $x_h\in\mu_{th}$ بنابراین داریم

$$\mu_{gh}(x_g\circ x_h)=\bigwedge_{\alpha\in x_g\circ x_h}\mu_{gh}(\alpha)\geqslant\mu_g\mu_h(x_g\circ x_h)\geqslant\mu_g(x_g)\wedge\mu_h(x_h)>t.$$

لذا $\mu_{gh}(x_g\circ x_h)>t$ و در نتیجه $x_g\circ x_h\subseteq\mu_{tgh}$. بنابراین μ_t یک G-ابرحلقه ضربی مدرج است. اثبات برعکس، فرض کنید برای هر $t\in[۰,۱]$، μ_t یک G-ابرحلقه ضربی مدرج باشد. اگر $t=۰$ باشد، در نتیجه با استفاده از تعریف خواهیم داشت

$$\{x\in R\mid\mu(x)>۰\}=\mu^*=\oplus_{g\in G}\mu_g^*$$

و برای هر $g,h\in G$، $\mu_g^*\mu_h^*\subseteq\mu_{gh}^*$. حال فرض کنید برای هر $g,h\in G$ و $۰\neq x\in R$ داشته باشیم $x\notin\mu_g^*\cap\mu_h^*$ در نتیجه $x\notin\mu_g^*$ یا $x\notin\mu_h^*$. از طرفی دیگر، $\mu_g(x)=۰$ یا $\mu_h(x)=۰$، بنابراین خواهیم داشت $\mu_g\cap\mu_h=۱_۰$. حال طبق تعریف برای هر $x\in R$ داریم

$$(\mu_g\mu_h)(x)=\sup\{\inf_{i=۱}^{n}\{\mu_g(x_{g_i})\wedge\mu_h(x'_{h_i})\}\mid n\in\mathbb{N},x\in\sum_{i=۱}^{n}x_{g_i}\circ x'_{h_i}\}.$$

لذا اگر $\mu_g\mu_h(x)=۰$، آنگاه واضح است که $\mu_g\mu_h(x)\subseteq\mu_{gh}(x)$ و اگر $\mu_g\mu_h(x)\neq۰$، آنگاه $n\in\mathbb{N}$ وجود دارد به‌طوری‌که $x\in\sum_{i=۱}^{n}x_{g_i}\circ x'_{h_i}$ و برای هر $۰\leq i\leq n$ داریم $x_{g_i}\in\mu_g^*$ و $x'_{g_i}\in\mu_h^*$. حال فرض کنید $\mu_g^*(x_{g_i})=t_i$ و $\mu_h^*(x'_{g_i})=t'_i$. قرار می‌دهیم

$$t=\inf\{t_i,t'_i\mid i=۱,۲,\dots,n\}.$$

در نتیجه برای هر $0 \leq i \leq n$ خواهیم داشت $x_{g_i} \in \mu_{tg}$ و $x'_{g_i} \in \mu_{th}$، همچنین

$$x \in \sum_{i=1}^{n} x_{g_i} \circ x'_{h_i} \subseteq \mu_{tgh}.$$

این نشان می‌دهد که $\mu_g\mu_h \subseteq \mu_{gh}$، لذا اثبات تمام است. □

نتیجه ۶.۳. *فرض کنید G یک گروه با عضو همانی e و $\mu = \oplus_{g\in G}\mu_g$ یک ابرحلقه ضربی فازی مدرج در R باشد. در این‌صورت μ_{te} یک زیرابرحلقه دارای عنصر واحد از μ_t است اگر و تنها اگر μ_t دارای عنصر واحد باشد.*

اثبات. چون بنا به قضیه ۵.۳، μ_t یک ابرحلقه مدرج است، پس $\mu_{te}\mu_{te} \subseteq \mu_{te}$. بنابراین برای هر $x_e, y_e \in \mu_{te}$ داریم $x_e \circ y_e \subseteq \mu_{te}$. در نتیجه μ_{te} تحت ابرعمل ضرب بسته است، بنابراین μ_{te} یک زیرابرحلقه است. اگر $1 \in \mu_t$، آنگاه بنابر [۸]، $1 \in \mu_{te}$. حال فرض کنید μ_{te} یک زیرابرحلقه دارای عنصر واحد باشد. در این‌صورت چون برای هر $x \in R$، $\mu_e(x) \leqslant \mu(x)$، لذا خواهیم داشت

$$\mu(1) \geqslant \mu_e(1) \geqslant t.$$

بنابراین μ_t دارای عنصر واحد است. □

تعریف ۷.۳. [۱۱] فرض کنید X یک مجموعه و η یک رابطه فازی روی R باشد. دراین‌صورت η را یک رابطه هم‌ارزی فازی می‌نامیم، هرگاه

۱. $\forall x \in X$، $\eta(x,x) = 1$؛ یک ابرگروه باشد؛

۲. $\forall x, y \in X$، $\eta(x,y) = \eta(y,x)$؛ نیم‌ابرگروه باشد؛

۳. $\forall x, y \in X$، $\eta(x,y) \geq sup_{z\in X} min\{\eta(x,z), \eta(z,y)\}$.

حال فرض کنید μ یک ابرایده‌آل فازی از ابرحلقه ضربی R باشد. رابطه η را روی R به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\forall x, y \in R، \eta(x,y) = \mu(x-y)$$

دراین‌صورت این رابطه یک رابطه هم‌ارزی فازی است. در این حالت برای هر $x, y \in R$،

$$\eta(x) = \eta(y) \Leftrightarrow \mu(x-y) = ۱.$$

برای هر $r \in R$، زیرمجموعه فازی $x + \mu$ از R به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(x+\mu)(r) = \mu(r-x) = \mu[x]$$

که در واقع کلاس فازی متناظر با x می‌باشد. در این حالت مجموعه

$$R/\mu = \{x+\mu \mid x \in R\}$$

را مجموعه خارج قسمتی فازی می‌نامیم. در این‌صورت با تعریف عمل جمع و ابرعمل ضرب روی کلاس‌های فازی به‌صورت زیر

$$(x+\mu)+(y+\mu) = (x+y)+\mu,$$

$$(x+\mu)(y+\mu) = (x \circ y + \mu) = \cup_{t \in x \circ y}(t+\mu)،$$

R/μ یک ابرحلقه ضربی خارج قسمتی فازی خواهد شد.

قضیه ۸.۳. *فرض کنید R یک G-ابرحلقه ضربی مدرج توزیع‌پذیر قوی با خانواده‌ای از زیرگروه‌های $\{R_g\}_{g \in G}$ و μ ابرایده‌آل فازی روی R باشد. اگر*

$$\sup\{\mu(x) \mid \mu(x) \neq \mu(۰)\} < ۱$$

آنگاه ابرحلقه خارج قسمتی $\frac{R}{\mu}$ یک ابرحلقه ضربی فازی مدرج تحت یکریختی است.

اثبات. برای اثبات تابع عضویت

$$\chi_{R_g} = \begin{cases} ۱ & x \in R_g; \\ ۰ & x \notin R_g. \end{cases}$$

را در نظر می‌گیریم. در این‌صورت با توجه به تعریف ابرحلقه ضربی مدرج داریم $R = \oplus_{g \in G} R_g$ و $\oplus_{g \in G}\chi_{R_g} = ۱$. چون μ یک ابرایده‌آل فازی روی ابرحلقه ضربی مدرج R است، لذا

$$.1 \cdot \mu = \mu = \oplus_{g\in G}\chi_{R_g}\mu$$

حال به ازای هر $g \in G$ فرض کنید $\mu_g = \chi_{R_g}\mu$. در این‌صورت با در نظر گرفتن

$$\sup\{\mu(x) \mid \mu(x) \neq \mu(0)\} < 1$$

خواهیم داشت

$$\mu_* = \{x \in R \mid \mu(x) = \mu(0)\} = \oplus_{g\in G}\mu_{g*}$$

و

$$.\frac{R}{\mu} \simeq \frac{R}{\mu_*} \simeq \oplus_{g\in G}\frac{R_g}{\mu_{g*}}$$

قرار می‌دهیم

$$.S = \oplus_{g\in G}\frac{R_g}{\mu_{g*}}$$

ادعا می‌کنیم که برای هر $x_g + \mu_{g*} \in \frac{R_g}{\mu_{g*}}$ و $y_h + \mu_{h*} \in \frac{R_h}{\mu_{h*}}$ با ابرعمل ضرب زیر، S یک ابرحلقه ضربی می‌شود:

$$.(x_g + \mu_{g*})(y_h + \mu_{h*}) = x_g \circ y_h + \mu_{gh*} = \bigcup_{r\in x_g\circ y_h} t + \mu_{gh*}$$

چون R یک ابرحلقه ضربی مدرج است، برای $x_{1g}, x_{2g} \in R_g$ و $y_{1h}, y_{2h} \in R_h$ خواهیم داشت

$$،y_{1h} - y_{2h} \in \mu_{h*} = R_h\mu_* \text{ و } x_{1g} - x_{2g} \in \mu_{g*} = R_g\mu_*$$

در نتیجه داریم

$$(x_{1g} - x_{2g}) \circ y_{1h} \subseteq R_g\mu_*R_h = R_gR_h\mu_* \subseteq R_{gh}\mu_* = \mu_{gh_*}$$

و

$$.x_{1g} \circ (y_{1h} - y_{2h}) \subseteq R_gR_h\mu_* \subseteq R_{gh}\mu_* = \mu_{gh_*}$$

حال چون R یک G-ابرحلقه ضربی مدرج توزیع‌پذیر قوی است، این نشان می‌دهد که

$$.x_{1g} \circ y_{1h} - x_{2g} \circ y_{2h} \subseteq \mu_{gh_*}$$

بنابراین S یک ابرحلقه ضربی است. از طرف دیگر چون

$$.x_{1g} \circ y_{1h} + \mu_{gh_*} = \bigcup_{r \in x_{1g} \circ y_{1h}} r + \mu_{gh_*} \subseteq \frac{R_{gh}}{\mu_{gh_*}}$$

لذا S یک G-ابرحلقه ضربی فازی مدرج است. $\square$

گزاره ۹.۳. *فرض کنید $\mu = \oplus_{g \in G} \mu_g$ یک G-ابرحلقه ضربی فازی مدرج و H یک زیرگروه دلخواه از G باشد. در این‌صورت $\mu_H = \oplus_{h \in H} \mu_h$ یک H-ابرحلقه ضربی فازی مدرج است و $\mu_H \subseteq \mu$.*

اثبات. چون $\{\mu_h\}_{h \in H}$ زیرگروه‌های فازی هستند، لذا μ_h یک زیرگروه فازی در ابرحلقه ضربی R است. کافی است برای هر $x, y \in R$ نشان دهیم که

$$.\mu_H(x \circ y) = \bigwedge_{t \in x \circ y} \mu_H(t) \geqslant \min\{\mu_H(x), \mu_H(y)\}$$

برای این منظور داریم

$$\begin{aligned}
\mu_H(x \circ y) &= \sup\{\inf\{\mu_h(k_h) \mid x \circ y \subseteq \sum_{h \in H} k_h \mid k_h = x_{h'} \circ y_{h''}\} \mid h'h'' = h\} \\
&\geqslant \sup\{\inf\{\min\{\mu_{h'}(x_{h'}), \mu_{h''}(y_{h''})\}\} \mid \\
&x \circ y \subseteq \sum_{h'h''=h} x_{h'} \circ y_{h''} \mid h \in H\} \\
&\geqslant \min\{\sup\{\inf\{\mu_{h'}(x_{h'})\} \mid x = \sum_{h'} x_{h'}\}, \\
&\sup\{\inf\{\mu_{h''}(y_{h''})\} \mid y = \sum_{h''} y_{h''}\}\} \\
&= \min\{\mu_H(x), \mu_H(y)\}.
\end{aligned}$$

از طرفی چون μ یک G-ابرحلقه ضربی فازی مدرج است، پس به ازای هر $h, h' \in H$ داریم

$$.\mu_h \mu_{h'} \subseteq \mu_{hh'}$$

حال به ازای هر $x \in R$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\mu_H(x) &= \sup\{\inf\{\mu_h(x_h)\} \mid x = \sum_{h\in H} x_h\}\\ &\geqslant \sup\{\inf\{\mu_g(x'_g)\} \mid x = \sum_{g\in G-H} x'_g + \sum_{g\in H} x'_g\}\\ &= \mu(x).\end{aligned}$$

بنابراین $\mu \subseteq \mu_H$. □

۴ ابرایده‌آل‌های ۲-جاذب فازی مدرج در ابرحلقه‌های ضربی

تعریف ۱.۴. فرض کنید G یک گروه باشد. $\eta = \oplus_{g\in G}\eta_g$ یک ابرایده‌آل فازی مدرج روی ابرحلقه ضربی جابجایی R باشد.

الف) ابرایده‌آل فازی مدرج η را یک ابرایده‌آل ۲-جاذب فازی مدرج از R گوییم، هرگاه و برای عناصر فازی همگن $(x_g)_r, (y_h)_s, (z_k)_t$، اگر $(x_g)_r \circ (y_h)_s \circ (z_k)_t \subseteq \eta$، آنگاه داشته باشیم

$$\eta \supseteq (x_g)_r \circ (y_h)_s \text{ یا } \eta \supseteq (y_h)_s \circ (z_k)_t \text{ یا } \eta \supseteq (x_g)_r \circ (z_k)_t.$$

ب) ابرایده‌آل فازی مدرج ζ را یک ابرایده‌آل اول فازی مدرج از R گوییم، هرگاه

$$(x_g)_r \circ (y_h)_s \subseteq \zeta،$$

آنگاه $(x_g)_r \in \zeta$ یا $(y_h)_s \in \zeta$.

اشتراک همه‌ی ابرایده‌آل‌های اول فازی مدرج که شامل ζ باشد را رادیکال فازی مدرج از ζ می‌گوییم و با نماد $Grad(\zeta)$ نشان می‌دهیم.

مثال ۲.۴. ابرحلقه چندجمله‌ای ضربی مدرج $R = R_A = \mathbb{Z}[x,y]$ با $A = \{۲,۳\}$ را در نظر بگیرید. در این‌صورت ابرایده‌آل فازی

$$\lambda(x)=\begin{cases} ۱ & x=۰; \\ \frac{۳}{۴} & x\in\langle ۶, ۲x, ۲y, xy\rangle-\{۰\}; \\ ۰ & \text{در غیر این‌صورت} \end{cases}$$

یک ابرایده‌آل ۲-جاذب فازی مدرج است در صورتی که ابرایده‌آل ۲-جاذب فازی نیست. برای این منظور قرار دهید:

$$g_۱=(۳)_{\frac{۱}{۲}},\quad g_۲=(x+۲)_{\frac{۱}{۳}},\quad g_۳=(y+۲)_{\frac{۱}{۴}}.$$

در این‌صورت داریم:

$$\begin{aligned} g_۱\circ g_۲\circ g_۳ &= (\bigcup_{a\in A}(g_۱\cdot a\cdot g_۲))\circ g_۳ \\ &= \bigcup_{b\in A}(\bigcup_{a\in A}(g_۱\cdot a\cdot g_۲))\cdot b\cdot g_۳ \\ &= \{(۱۲xy+۲۴x+۲۴y+۴۸)_{\frac{۱}{۴}},(۱۸xy+۳۶x+۳۶y+۷۲)_{\frac{۱}{۴}}\} \\ &\bigcup\{(۱۸xy+۳۶x+۲۴y+۴۸)_{\frac{۱}{۴}},(۲۷xy+۵۴x+۳۶y+۷۲)_{\frac{۱}{۴}}\}\subseteq\lambda \end{aligned}$$

اما

$$g_۱\circ g_۲=\bigcup_{a\in A}(g_۱\cdot a\cdot g_۲)=\{(۶x+۱۲)_{\frac{۱}{۳}},(۹x+۱۸)_{\frac{۱}{۳}}\}\nsubseteq\lambda؛$$

$$g_۱\circ g_۳=\bigcup_{a\in A}(g_۱\cdot a\cdot g_۳)=\{(۶y+۱۲)_{\frac{۱}{۴}},(۹y+۱۸)_{\frac{۱}{۴}}\}\nsubseteq\lambda؛$$

$$\begin{gathered} g_۲\circ g_۳=\bigcup_{a\in A}(g_۲\cdot a\cdot g_۳)= \\ \{(۲xy+۴x+۴y+۸)_{\frac{۱}{۴}},(۳xy+۶x+۶y+۱۲)_{\frac{۱}{۴}}\}\nsubseteq\lambda. \end{gathered}$$

این نشان می‌دهد که λ ابرایده‌آل ۲-جاذب فازی نیست.

لم ۳.۴. *هر ابرایده‌آل اول فازی مدرج، یک ابرایده‌آل ۲-جاذب فازی مدرج است.*

باید توجه داشت که در حالت کلی عکس لم ۳.۴ لزوماً برقرار نیست. مثال زیر گویای این مطلب است.

مثال ۴.۴. فرض کنید $G = \mathbb{Z}_۲$ گروه دوری از مرتبه ۲ باشد. همچنین ابرحلقه ضربی مدرج $R = \mathbb{Z}_A[i]$ با فرض $A = \{۲, ۳\}$ را در نظر بگیرید. ابرایده‌آل فازی مدرج

$$\nu(x) = \begin{cases} ۱ & x = \circ; \\ \frac{۳}{۴} & x \in \langle ۶ \rangle \oplus \langle \circ \rangle - \{(\circ, \circ)\}; \\ \circ & \text{در غیر این‌صورت} \end{cases}$$

روی $R = R_A = \mathbb{Z}_A[i]$ یک ابرایده‌آل ۲-جاذب فازی مدرج است، در صورتی‌که یک ابرایده‌آل اول فازی مدرج نیست، زیرا برای هر $\alpha \in A$ داریم

$$(۲, \circ)_{\frac{۱}{۲}} \circ (۳, \circ)_{\frac{۳}{۴}} = ((۲, \circ) \cdot \alpha \cdot (۳, \circ))_{\frac{۱}{۲} \wedge \frac{۳}{۴}} = \{(۱۲, \circ)_{\frac{۱}{۲}}, (۱۸, \circ)_{\frac{۱}{۲}}\} \subseteq \nu$$

اما

$$(۲, \circ)_{\frac{۱}{۲}} \notin \nu \text{ و } (۳, \circ)_{\frac{۳}{۴}} \notin \nu.$$

تعریف ۵.۴. فرض کنید $\eta = \oplus_{g \in G} \eta_g$ یک ابرایده‌آل فازی مدرج روی ابرحلقه ضربی جابجایی R باشد. ابرایده‌آل فازی مدرج η را یک ابرایده‌آل اولیه ۲-جاذب فازی مدرج گوییم، هرگاه برای عناصر فازی همگن x_g, y_h, z_k، که $(x_g)_r \circ (y_h)_s \circ (z_k)_t \subseteq \eta$، آنگاه داشته باشیم

$$(x_g)_r \circ (y_h)_s \subseteq \eta \text{ یا } (y_h)_s \circ (z_k)_t \subseteq Grad(\eta) \text{ یا } (x_g)_r \circ (z_k)_t \subseteq Grad(\eta).$$

بدیهی است که هر ابرایده‌آل ۲-جاذب فازی مدرج، یک ابرایده‌آل اولیه ۲-جاذب فازی مدرج است اما عکس آن عموماً برقرار نیست. مثال زیر گویای این مطلب است.

مثال ۶.۴. فرض کنید $G = \mathbb{Z}_۲$ گروه دوری از مرتبه ۲ باشد. ابرحلقه ضربی مدرج

$$R = (\mathbb{Z}_A[i], +, \circ) = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$$

که $A = \{-۱, ۲\}$، و $x, y \in \mathbb{Z}_A$،

$$x \circ y = \{x \cdot a \cdot y : a \in A\}$$

را در نظر بگیرد. فرض کنید

$$.\eta(x)=\begin{cases} ۱ & x=(۰,۰);\\ \frac{۳}{۴} & x\in\langle ۱۲\rangle\oplus\langle ۰\rangle-\{(۰,۰)\};\\ ۰ & \text{در غیر این‌صورت}\end{cases}$$

در این‌صورت η یک ابرایده‌آل فازی مدرج و یک ابرایده‌آل اولیه ۲-جاذب فازی مدرج است، در صورتی‌که یک ابرایده‌آل ۲-جاذب فازی مدرج نیست. زیرا برای هر $\alpha,\beta\in A$ داریم

$$\begin{aligned}(۲,۰)_{\frac{۱}{۲}}\circ(۲,۰)_{\frac{۱}{۲}}\circ(۳i,۰)_{\frac{۱}{۴}}&=(((۲,۰)\cdot\alpha\cdot(۲,۰))\cdot\beta\cdot(۳i,۰))_{\frac{۱}{۲}\wedge\frac{۱}{۲}\wedge\frac{۱}{۴}}\\ &=\{(۱۲i,۰)_{\frac{۱}{۴}},(-۲۴i,۰)_{\frac{۱}{۴}},(۴۸i,۰)_{\frac{۱}{۴}}\}\subseteq\eta\end{aligned}$$

اما

$$(۲,۰)_{\frac{۱}{۲}}\circ(۲,۰)_{\frac{۱}{۲}}=\{(-۲,۰)_{\frac{۱}{۲}},(۸,۰)_{\frac{۱}{۲}}\}\nsubseteq\eta$$

و

$$.(۲,۰)_{\frac{۱}{۲}}\circ(۳i,۰)_{\frac{۱}{۴}}=\{(-۶i,۰)_{\frac{۱}{۴}},(۱۲i,۰)_{\frac{۱}{۴}}\}\nsubseteq\eta$$

قضیه ۷.۴. *اگر $Grad(\eta)$ یک ابرایده‌آل اول فازی مدرج از R باشد، آنگاه η یک ابرایده‌آل اولیه ۲-جاذب فازی مدرج است.*

اثبات. فرض کنید $(a_g)_r,(b_h)_s,(c_k)_t$ عناصر فازی همگن باشند به‌طوری‌که داشته باشیم $(a_g)_r\circ(b_h)_s\circ(c_k)_t\subseteq\eta$ و $(a_g)_r\circ(b_h)_s\nsubseteq\eta$. چون ابرحلقه ضربی جابجایی است لذا

$$.((a_g)_r\circ(c_k)_t)((b_h)_s\circ(c_k)_t)=(a_g)_r\circ(b_h)_s\circ(c_k)_t^۲\subseteq\eta\subseteq Grad(\eta)$$

حال بنا به فرض چون $Grad(\eta)$ یک ابرایده‌آل اول فازی مدرج است، بنابراین

$$.(b_h)_s\circ(c_k)_t\subseteq Grad(\eta)\ \text{یا}\ (a_g)_r\circ(c_k)_t\subseteq Grad(\eta)$$

لذا η یک ابرایده‌آل اولیه ۲-جاذب فازی مدرج است. □

مثال زیر نشان می‌دهد که یک ابرایده‌آل اولیه ۲-جاذب فازی مدرج، لزوماً یک ابرایده‌آل اولیه فازی مدرج نیست.

مثال ۸.۴. فرض کنید $G = \mathbb{Z}_۲$ گروه دوری از مرتبه ۲ باشد. همچنین ابرحلقه ضربی مدرج $R = \mathbb{Z}_A[i]$ با فرض $A = \{۲, ۳\}$ را در نظر بگیرید. ابرایده‌آل فازی مدرج

$$\nu(x) = \begin{cases} ۱ & x = (\circ, \circ); \\ \frac{۳}{۴} & x \in \langle ۶ \rangle \oplus \langle \circ \rangle - \{(\circ, \circ)\}; \\ \circ & \text{در غیر این‌صورت} \end{cases}$$

روی $R = \mathbb{Z}_A[i]$ یک ابرایده‌آل اولیه ۲-جاذب فازی مدرج است، در صورتی‌که یک ابرایده‌آل اولیه فازی مدرج نیست. زیرا برای هر $\alpha \in A$ داریم

$$(۲, \circ)_{\frac{۱}{۲}} \circ (۳i, \circ)_{\frac{۱}{۴}} = ((۲, \circ) \cdot \alpha \cdot (۳i, \circ))_{\frac{۱}{۲} \wedge \frac{۱}{۴}} = \{(۱۲i, \circ)_{\frac{۱}{۴}}, (۱۸i, \circ)_{\frac{۱}{۴}}\} \subseteq \nu$$

اما

$$(۲, \circ)_{\frac{۱}{۲}} \not\in \nu \text{ و } (۳i, \circ)_{\frac{۱}{۴}} \not\in Grad(\nu).$$

قضیه ۹.۴. *فرض کنید λ یک ابرایده‌آل فازی مدرج و $\eta_۱, \eta_۲, \dots, \eta_n$ ابرایده‌آل‌های اولیه ۲-جاذب فازی مدرج از R باشند به‌طوری‌که برای هر $i = ۱, ۲, \dots, n$، $Grad(\eta_i) = \lambda$. در این‌صورت $\bigcap_{i=۱}^{n} \eta_i$ یک ابرایده‌آل اولیه ۲-جاذب فازی مدرج از R است.*

اثبات. فرض کنید $\eta = \bigcap_{i=۱}^{n} \eta_i$. واضح است که

$$Grad(\eta) = Grad(\bigcap_{i=۱}^{n} \eta_i) = \bigcap_{i=۱}^{n} Grad(\eta_i) = \lambda.$$

حال برای عناصر فازی همگن $(a_g)_r, (b_h)_s, (c_k)_t$ فرض کنید

$$(a_g)_r \circ (b_h)_s \circ (c_k)_t \subseteq \eta \text{ و } (a_g)_r \circ (b_h)_s \not\subseteq \eta.$$

بنابراین به ازای برخی از iها داریم $(a_g)_r \circ (b_h)_s \nsubseteq \eta_i$. چون η_iها ابرایده‌آل‌های اولیه ۲-جاذب فازی مدرج هستند و همچنین $(a_g)_r \circ (b_h)_s \circ (c_k)_t \subseteq \eta \subseteq \eta_i$، خواهیم داشت

$(a_g)_r \circ (c_k)_t \subseteq Grad(\eta_i) = \lambda$ یا $(b_h)_s \circ (c_k)_t \subseteq Grad(\eta_i) = \lambda$.

در نتیجه داریم

$(a_g)_r \circ (c_k)_t \subseteq Grad(\eta)$ یا $(b_h)_s \circ (c_k)_t \subseteq Grad(\eta)$.

بنابراین η یک ابرایده‌آل اولیه ۲-جاذب فازی مدرج است. □

گزاره ۱۰.۴. *اگر η_1, η_2 ابرایده‌آل‌های اول فازی مدرج از R باشند، در این‌صورت $\eta_1 \cap \eta_2$ یک ابرایده‌آل ۲-جاذب فازی مدرج از R است.*

اثبات. فرض کنید $(a_g)_r, (b_h)_s, (c_k)_t$ عناصر فازی همگن باشند به‌طوری‌که

$(a_g)_r \circ (b_h)_s \circ (c_k)_t \subseteq \eta_1 \cap \eta_2$،

$(a_g)_r \circ (b_h)_s \nsubseteq \eta_1 \cap \eta_2$ و $(b_h)_s \circ (c_k)_t \nsubseteq \eta_1 \cap \eta_2$.

بنابراین $(a_g)_r, (b_h)_s, (c_k)_t \notin \eta_1 \cap \eta_2$. حال فرض کنید $(a_g)_r \in \eta_1 \cap \eta_2$، در این‌صورت داریم $(a_g)_r \in \eta_1$ و $(a_g)_r \in \eta_2$. چون η_1 و η_2 ابرایده‌آل‌های فازی مدرج هستند لذا داریم $(a_g)_r \circ (b_h)_s \subseteq \eta_1$ و $(a_g)_r \circ (b_h)_s \subseteq \eta_2$. در نتیجه $(a_g)_r \circ (b_h)_s \subseteq \eta_1 \cap \eta_2$ که یک تناقض است. بنابراین $(a_g)_r \notin \eta_1 \cap \eta_2$. به‌طور مشابه خواهیم داشت $(b_h)_s \notin \eta_1 \cap \eta_2$. حال سه حالت زیرا در نظر می‌گیریم:

حالت اول: فرض کنید $(a_g)_r \notin \eta_1$ و $(a_g)_r \notin \eta_2$. چون $(c_k)_t \notin \eta_1 \cap \eta_2$، دوباره سه حالت دیگر رخ خواهد داد. فرض کنید $(c_k)_t \notin \eta_1$ و $(c_k)_t \notin \eta_2$. چون η_1 یک ابرایده‌آل اول فازی مدرج است و $(a_g)_r \circ (c_k)_t \nsubseteq \eta_1$، $(a_g)_r \circ (b_h)_s \circ (c_k)_t \subseteq \eta_1$، بنابراین داریم $(b_h)_s \in \eta_1$. در نتیجه $(a_g)_r \circ (b_h)_s \subseteq \eta_1$. به‌طور مشابه چون η_2 یک ابرایده‌آل اول فازی مدرج است و $(a_g)_r (c_k)_t \nsubseteq \eta_2$، $(a_g)_r \circ (b_h)_s \circ (c_k)_t \subseteq \eta_2$، لذا داریم $(b_h)_s \in \eta_2$ در نتیجه $(a_g)_r \circ (b_h)_s \subseteq \eta_2$. بنابراین $(a_g)_r \circ (b_h)_s \subseteq \eta_1 \cap \eta_2$

که یک تناقض است. بنابراین $(b_h)_s \in \eta_1$ یا $(c_k)_t \in \eta_2$. حال فرض کنید $(c_k)_t \notin \eta_1$ و $(c_k)_t \in \eta_2$. چون η_1 یک ابرایده‌آل اول فازی مدرج است و $(a_g)_r \circ (c_k)_t \nsubseteq \eta_1$، $(a_g)_r \circ (b_h)_s \circ (c_k)_t \subseteq \eta_1$، در این‌صورت $(b_h)_s \in \eta_1$. بنابراین $(b_h)_s \circ (c_k)_t \subseteq \eta_1$. چون $(c_k)_t \in \eta_2$، آنگاه $(b_h)_s \circ (c_k)_t \subseteq \eta_2$ و بنابراین $(b_h)_s \circ (c_k)_t \subseteq \eta_1 \cap \eta_2$ که این یک تناقض است. سرانجام فرض کنید که $(c_k)_t \notin \eta_2$ و $(c_k)_t \in \eta_1$. از این‌که η_2 یک ابرایده‌آل اول فازی مدرج است و $(a_g)_r \circ (c_k)_t \circ (c_k)_t \nsubseteq \eta_2$، $(a_g)_r \circ (c_k)_t \circ (b_h)_s \circ (c_k)_t \subseteq \eta_2$، بنابراین $(b_h)_s \in \eta_2$ و لذا $(b_h)_s \circ (c_k)_t \subseteq \eta_2$. حال چون $(c_k)_t \in \eta_1$، در نتیجه خواهیم داشت $(b_h)_s \circ (c_k)_t \subseteq \eta_1$. در این صورت داریم $(b_h)_s \circ (c_k)_t \subseteq \eta_1 \cap \eta_2$ که یک تناقض است. بنابراین اگر $(a_g)_r \circ (c_k)_t \circ (c_k)_t \nsubseteq \eta_1 \cap \eta_2$، آنگاه $(a_g)_r \circ (c_k)_t \nsubseteq \eta_1$ یا $(a_g)_r \circ (c_k)_t \nsubseteq \eta_2$.

حالت دوم: فرض کنید $(a_g)_r \in \eta_1$ و $(a_g)_r \notin \eta_2$. در این‌صورت نشان می‌دهیم $(c_k)_t \in \eta_2$. فرض کنید $(c_k)_t \notin \eta_2$. چون η_2 یک ابرایده‌آل اول فازی مدرج است لذا $(a_g)_r \circ (c_k)_t \nsubseteq \eta_2$. از طرفی چون $(a_g)_r \circ (b_h)_s \circ (c_k)_t \subseteq \eta_2$، $(a_g)_r \circ (c_k)_t \nsubseteq \eta_2$ و η_2 یک ابرایده‌آل اول فازی مدرج است، لذا $(b_h)_s \in \eta_2$. پس داریم $(a_g)_r \circ (b_h)_s \subseteq \eta_1 \cap \eta_2$ که این یک تناقض است. لذا $(c_k)_t \in \eta_2$. چون $(c_k)_t \notin \eta_1 \cap \eta_2$، داریم $(c_k)_t \notin \eta_1$. در نتیجه $(a_g)_r \circ (c_k)_t \subseteq \eta_1 \cap \eta_2$.

حالت سوم: اثبات مشابه حالت دوم است. □

نتیجه ۱۱.۴. *فرض کنید η یک ابرایده‌آل ۲-جاذب فازی مدرج از R باشد. در این‌صورت $\eta_* = \{x \in R \mid \eta(x) = \eta(0)\}$ یک ابرایده‌آل ۲-جاذب فازی مدرج از R است.*

قضیه ۱۲.۴. *فرض کنید $f : R \to S$ یک همریختی خوب مدرج از ابرحلقه‌های ضربی مدرج باشد.*

الف) اگر ν یک ابرایده‌آل اولیه ۲-جاذب فازی مدرج از S باشد، آنگاه $f^{-1}(\nu)$ یک ابرایده‌آل اولیه ۲-جاذب فازی مدرج از R است.

ب) اگر f یک همریختی خوب مدرج پوشا از ابرحلقه‌های ضربی مدرج باشد و ζ یک ابرایده‌آل ۲-جاذب فازی مدرج از R باشد به‌طوری‌که روی هسته‌ی f ثابت باشد،

آنگاه $f(\zeta)$ یک ابرایده‌آل اولیه ۲-جاذب فازی مدرج از S است.

اثبات. الف) فرض کنید $(a_g)_r, (b_h)_s, (c_k)_t$ عناصر فازی همگن باشند به‌طوری‌که

$$.(a_g)_r \circ (b_h)_s \circ (c_k)_t \subseteq f^{-1}(\nu)$$

چون

$$f((a_g)_r \circ (b_h)_s \circ (c_k)_t) = f((a_g)_r) \circ f(b_h)_s) \circ f((c_k)_t) \subseteq \nu$$

و ν یک ابرایده‌آل اولیه ۲-جاذب فازی مدرج از S است، بنابراین داریم

$$f((a_g)_r) \circ f((b_h)_s) \subseteq \nu$$

یا

$$f((a_g)_r) \circ f((c_k)_t) \subseteq Grad(\nu)$$

یا

$$.f((b_h)_s) \circ f((c_k)_t) \subseteq Grad(\nu)$$

در نتیجه خواهیم داشت

$$(a_g)_r \circ (b_h)_s \subseteq f^{-1}(\nu)$$

یا

$$(a_g)_r \circ (c_k)_t \subseteq f^{-1}(Grad(\nu))$$

یا

$$.(b_h)_s \circ (c_k)_t \subseteq f^{-1}(Grad(\nu))$$

لذا با توجه به این‌که $Grad(f^{-1}(\nu)) = f^{-1}(Grad(\nu))$، داریم

$$(a_g)_r \circ (b_h)_s \subseteq f^{-1}(\nu)$$

یا

$$(a_g)_r \circ (c_k)_t \subseteq Grad(f^{-1}(\nu))$$

یا

$$.(b_h)_s \circ (c_k)_t \subseteq Grad(f^{-1}(\nu))$$

در نتیجه $f^{-1}(\nu)$ یک ابرایده‌آل اولیه ۲-جاذب فازی مدرج از R است.

ب) اثبات بدیهی است. □

تعریف ۱۳.۴. فرض کنید $\alpha \in [0,1)$. در این‌صورت α را یک عنصر ۲-جاذب می‌گوییم، هرگاه به ازای هر $r, s, t \in [0,1)$، اگر $r \wedge s \wedge t = \min\{r, s, t\} \leqslant \alpha$ آنگاه داشته باشیم

$$r \wedge s \leqslant \alpha \text{ یا } r \wedge t \leqslant \alpha \text{ یا } s \wedge t \leqslant \alpha.$$

برای مثال اگر $\alpha = 0$ را اختیار کنیم در این‌صورت α یک عنصر ۲-جاذب است.

قضیه ۱۴.۴. *فرض کنید S یک ابرایده‌آل ۲-جاذب مدرج از R و $\alpha \in [0,1)$ یک عنصر ۲-جاذب روی R باشد. اگر λ یک ابرایده‌آل فازی مدرج از R باشد به‌طوری‌که*

$$.\lambda(x) = \begin{cases} 1 & x \in S; \\ \alpha & \text{در غیر این‌صورت} \end{cases}$$

در این‌صورت λ یک ابرایده‌آل ۲-جاذب فازی مدرج از R است.

اثبات. فرض کنید $(a_g)_r, (b_h)_s, (c_k)_t$ عناصر فازی همگن باشد به‌طوری‌که

$$،(a_g)_r \circ (b_h)_s \circ (c_k)_t \subseteq \lambda$$

اما $(a_g)_r \circ (b_h)_s \not\subseteq \lambda$ و $(a_g)_r \circ (c_k)_t \not\subseteq \lambda$ و $(b_h)_s \circ (c_k)_t \not\subseteq \lambda$. در این حالت

$$.\lambda(a_g \circ b_h) = \bigwedge_{\beta \in a_g \circ b_h} \lambda(\beta) = \alpha$$

بنابراین $a_g \circ b_h \not\subseteq S$. به‌طور مشابه می‌توان نشان داد که $a_g \circ c_h \not\subseteq S$ و $b_g \circ c_h \not\subseteq S$. چون S یک ابرایده‌آل ۲-جاذب مدرج است لذا $a_g \circ b_h \circ c_h \not\subseteq S$. در نتیجه داریم

$$\lambda(a_g \circ b_h \circ c_h) = \bigwedge_{\beta \in a_g \circ b_h \circ c_h} \lambda(\beta) = \alpha.$$

همچنین از رابطه

$$(a_g \circ b_h \circ c_h)_{r \wedge s \wedge t} = (a_g)_r \circ (b_h)_s \circ (c_k)_t \subseteq \lambda،$$

داریم

$$r \wedge s \wedge t \leqslant \lambda(a_g \circ b_h \circ c_h) = \bigwedge_{\beta \in a_g \circ b_h \circ c_h} \lambda(\beta) = \alpha.$$

چون α یک عنصر ۲-جاذب است لذا

$r \wedge s \leqslant \alpha$ یا $r \wedge t \leqslant \alpha$ یا $s \wedge t \leqslant \alpha$،

که این یک تناقض است. بنابراین داریم

$(a_g)_r \circ (b_h)_s \subseteq \lambda$ یا $(a_g)_r \circ (c_k)_t \subseteq \lambda$ یا $(b_h)_s \circ (c_k)_t \subseteq \lambda$.

در نتیجه λ یک ابرایده‌آل ۲-جاذب فازی مدرج است. $\square$

تعریف ۱۵.۴. فرض کنید λ یک ابرایده‌آل فازی مدرج از R باشد.

۱. λ را یک ابرایده‌آل ۲-جاذب کاملاً ضعیف فازی مدرج از R می‌گوییم، هرگاه برای عناصر همگن a_g, b_h, c_k، داشته باشیم

$$\bigwedge_{\beta \in a_g \circ b_h \circ c_k} \lambda(\beta) = \bigwedge_{\beta \in a_g \circ b_h} \lambda(\beta)$$

یا

$$\bigwedge_{\beta \in a_g \circ b_h \circ c_k} \lambda(\beta) = \bigwedge_{\beta \in a_g \circ c_k} \lambda(\beta)$$

یا

$$\bigwedge_{\beta \in a_g \circ b_h \circ c_k} \lambda(\beta) = \bigwedge_{\beta \in b_h \circ c_k} \lambda(\beta).$$

۲. λ را یک ابرایده‌آل K-۲-جاذب فازی مدرج از R می‌گوییم، اگر

$$\lambda(a_g \circ b_h \circ c_k) = \bigwedge_{\beta \in a_g \circ b_h \circ c_k} \lambda(\beta) = \lambda(0)$$

آنگاه داشته باشیم

$$\lambda(a_g \circ b_h) = \bigwedge_{\beta \in a_g \circ b_h} \lambda(\beta) = \lambda(0)$$

یا

$$\lambda(a_g \circ c_k) = \bigwedge_{\beta \in a_g \circ c_k} \lambda(\beta) = \lambda(0)$$

یا

$$\lambda(b_h \circ c_k) = \bigwedge_{\beta \in b_h \circ c_k} \lambda(\beta) = \lambda(0).$$

نتیجه ۱۶.۴. *فرض کنید λ یک ابرایده‌آل فازی مدرج از R باشد. λ را یک ابرایده‌آل K–۲–جاذب فازی مدرج از R گوییم اگر فقط و اگر*

$$\lambda(a_g \circ b_h \circ c_k) = \max\{\lambda(a_g \circ b_h), \lambda(a_g \circ c_k), \lambda(b_h \circ c_k)\}.$$

بدیهی است که هر ابرایده‌آل ۲–جاذب کاملاً ضعیف فازی مدرج یک ابرایده‌آل K–۲–جاذب فازی مدرج است اما عکس آن لزوماً برقرار نیست. مثال زیر گویای این مطلب است.

مثال ۱۷.۴. فرض کنید $G = \mathbb{Z}_2$ گروه دوری از مرتبه ۲ باشد. G–ابرحلقه ضربی مدرج

$$(R, +, \circ) = \mathbb{Z}_A[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$$

باشد به‌طوری‌که

$$A = \{2, 4\}, \quad x \circ y = \{x \cdot a \cdot y : a \in A\}.$$

حال ابرایده‌آل فازی مدرج λ از R را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$.\lambda(x) = \begin{cases} ۱ & x = ۰; \\ \frac{۲}{۳} & x \in \langle ۸ \rangle - \{۰\}; \\ \frac{۱}{۲} & x \in \mathbb{Z}_A[i] - \langle ۸ \rangle . \end{cases}$$

بدیهی است که λ یک ابرایده‌آل K-۲-جاذب فازی مدرج است اما ابرایده‌آل ۲-جاذب کاملاً ضعیف فازی مدرج نیست. زیرا

$$.\lambda(۲۰۲۰۱۰) = \bigwedge_{t \in ۲۰۲۰۱۰} \lambda(t) = \tfrac{۲}{۳} > \tfrac{۱}{۲} = \max\{\lambda(۲۰۲), \lambda(۲۰۱۰), \lambda(۲۰۱۰)\}$$

گزاره ۱۸.۴. *۱. هر ابرایده‌آل اول کاملاً ضعیف فازی مدرج از R یک ابرایده‌آل ۲-جاذب کاملاً ضعیف فازی مدرج است.*

۲. هر ابرایده‌آل K-اول فازی مدرج از R یک ابرایده‌آل K-۲-جاذب فازی مدرج است.

اثبات. ۱) فرض کنید λ یک ابرایده‌آل اول کاملاً ضعیف فازی مدرج از R باشد. در این‌صورت به ازای هر عنصر همگن a_g, b_h, c_k داریم

$$\lambda(a_g \circ b_h \circ c_k) = \bigwedge_{\beta \in a_g \circ b_h \circ c_k} \lambda(\beta) = \lambda(a_g)$$

یا

$$\lambda(a_g \circ b_h \circ c_k) = \bigwedge_{\beta \in a_g \circ b_h \circ c_k} \lambda(\beta) = \lambda(b_h)$$

یا

$$.\lambda(a_g \circ b_h \circ c_k) = \bigwedge_{\beta \in a_g \circ b_h \circ c_k} \lambda(\beta) = \lambda(c_k)$$

فرض کنید

$$.\lambda(a_g \circ b_h \circ c_k) = \bigwedge_{\beta \in a_g \circ b_h \circ c_k} \lambda(\beta) = \lambda(a_g)$$

از

$$،\lambda(a_g \circ b_h \circ c_k) \leqslant \lambda(a_g \circ b_h) \leqslant \lambda(a_g)$$

داریم

$$\lambda(a_g \circ b_h \circ c_k) = \lambda(a_g \circ b_h).$$

به روش مشابه می‌توان نشان داد که اگر

$$\lambda(a_g \circ b_h \circ c_k) = \bigwedge_{\beta \in a_g \circ b_h \circ c_k} \lambda(\beta) = \lambda(b_h)$$

یا

$$\lambda(a_g \circ b_h \circ c_k) = \bigwedge_{\beta \in a_g \circ b_h \circ c_k \lambda(\beta) = \lambda(c_k)}$$

آنگاه

$$\lambda(a_g \circ b_h \circ c_k) = \bigwedge_{\beta \in a_g \circ b_h \circ c_k} \lambda(\beta) = \lambda(b_h \circ c_k)$$

یا

$$\lambda(a_g \circ b_h \circ c_k) = \bigwedge_{\beta \in a_g \circ b_h \circ c_k} \lambda(\beta) = \lambda(a_g \circ c_k).$$

بنابراین R یک ابرایده‌آل ۲-جاذب کاملاً ضعیف فازی مدرج است.

۲) اثبات قسمت دوم مشابه قسمت اول است. □

قضیه ۱۹.۴. *فرض کنید λ یک ابرایده‌آل فازی مدرج R باشد. در این‌صورت عبارت‌های زیر معادل‌اند:*

۱. *λ یک ابرایده‌آل اول کاملاً ضعیف فازی مدرج از R است.*

۲. *برای هر $\alpha \in [0, 1]$، زیرمجموعه‌ی α-برشی λ_α یک ابرایده‌آل ۲-جاذب مدرج است.*

اثبات. (۱) $\rightarrow$ (۲) فرض کنید λ یک ابرایده‌آل اول کاملاً ضعیف فازی مدرج از R و a_g, b_h, c_k عناصر همگن و $\alpha \in [0, 1]$ باشد به‌طوری‌که

$$a_g \circ b_h \circ c_k \subseteq \lambda_\alpha.$$

در این‌صورت داریم

$\max\{\lambda(a_g \circ b_h), \lambda(a_g \circ c_k), \lambda(b_h \circ c_k)\} = \lambda(a_g \circ b_h \circ c_k) \geqslant \alpha$.

بنابراین $\lambda(a_g \circ b_h) \geqslant \alpha$ یا $\lambda(a_g \circ c_k) \geqslant \alpha$ یا $\lambda(b_h \circ c_k) \geqslant \alpha$، که این نشان می‌دهد $a_g \circ b_h \subseteq \lambda_\alpha$ یا $a_g \circ c_k \subseteq \lambda_\alpha$ یا $b_h \circ c_k \subseteq \lambda_\alpha$. بنابراین λ_α یک ابرایده‌آل ۲-جاذب مدرج است.

(۲) $\rightarrow$ (۱) فرض کنید به ازای هر $\alpha \in [\text{۰}, \text{۱}]$، λ_α یک ابرایده‌آل ۲-جاذب مدرج باشد. برای عناصر فازی a_g, b_h, c_k قرار دهید $\lambda(a_g \circ b_h \circ c_k) = \alpha$. بنابراین $a_g \circ b_h \circ c_k \subseteq \lambda_\alpha$. چون λ_α یک ابرایده‌آل ۲-جاذب مدرج است لذا داریم $\lambda(a_g \circ b_h) \geqslant \alpha$ یا $\lambda(a_g \circ c_k) \geqslant \alpha$ یا $\lambda(b_h \circ c_k) \geqslant \alpha$، که در نتیجه داریم

$$\max\{\lambda(a_g \circ b_h), \lambda(a_g \circ c_k), \lambda(b_h \circ c_k)\} \geqslant \alpha = \lambda(a_g \circ b_h \circ c_k).$$

همچنین چون λ یک ابرایده‌آل فازی مدرج است لذا داریم

$$\lambda(a_g \circ b_h \circ c_k) \geqslant \max\{\lambda(a_g \circ b_h), \lambda(a_g \circ c_k), \lambda(b_h \circ c_k)\}.$$

بنابراین

$$\lambda(a_g \circ b_h \circ c_k) = \max\{\lambda(a_g \circ b_h), \lambda(a_g \circ c_k), \lambda(b_h \circ c_k)\}.$$

در نتیجه λ یک ابرایده‌آل اول کاملاً ضعیف فازی مدرج است. □

قضیه ۲۰.۴. *فرض کنید R یک G-ابرحلقه ضربی مدرج و μ یک ابرایده‌آل فازی از R باشد به‌طوری‌که $R_g \neq \mu$. در این‌صورت μ یک ابرایده‌آل K-۲-جاذب فازی مدرج است اگر و فقط اگر $\frac{R}{\mu}$ یک ابرحلقه ضربی ۲-جاذب مدرج باشد.*

اثبات. ابتدا فرض کنید μ یک ابرایده‌آل K-۲-جاذب فازی مدرج از R باشد. بنا به نتیجه ؟؟، $\frac{R}{\mu}$ یک ابرحلقه ضربی مدرج است. حال فرض کنید برای هر $\mu[x_g], \mu[y_h], \mu[z_k] \in \frac{R}{\mu}$ داشته باشیم

$$\mu[x_g]\mu[y_h]\mu[z_k] = \mu(\text{۰}).$$

چون

$$\mu[x_g]\mu[y_h]\mu[z_k] = \mu[x_g \circ y_h \circ z_k] = \bigwedge_{t\in x_g\circ y_h\circ z_k} \mu[t]$$

بنابراین

$$\mu(x_g \circ y_h \circ z_k) = \bigwedge_{t\in x_g\circ y_h\circ z_k} \mu(t) = ۱ = \mu(\circ)$$

حال چون μ یک ابرایده‌آل K-۲-جاذب فازی مدرج از است لذا

$$\mu(x_g \circ y_h) = \bigwedge_{t\in x_g\circ y_h} \mu(t) = \mu(\circ) = ۱$$

یا

$$\mu(x_g \circ z_k) = \bigwedge_{t\in x_g\circ z_k} \mu(t) = \mu(\circ) = ۱$$

یا

$$\mu(y_h \circ z_k) = \bigwedge_{t\in y_h\circ z_k} \mu(t) = \mu(\circ) = ۱،$$

این نشان می‌دهد که

$$\mu[x_g]\mu[y_h] = \mu(\circ)$$

یا

$$\mu[x_g]\mu[z_k] = \mu(\circ)$$

یا

$$\mu[y_h]\mu[z_k] = \mu(\circ).$$

در نتیجه $\frac{R}{\mu}$ یک ابرحلقه ضربی ۲-جاذب مدرج است.

برای اثبات برعکس فرض کنید برای هر $x_g, y_g, z_g \in H(R)$ داشته باشیم

$$\mu(x_g \circ y_h \circ z_k) = \bigwedge_{t\in x_g\circ y_h\circ z_k} \mu(t) = \mu(\circ) = ۱.$$

در این‌صورت خواهیم داشت

$$\mu[x_g]\mu[y_h]\mu[z_k] = \mu[x_g \circ y_h \circ z_k] = \bigwedge_{t\in x_g\circ y_h\circ z_k} \mu[t].$$

چون $\frac{R}{\mu}$ یک ابرحلقه ضربی ۲-جاذب مدرج است لذا،

$$\mu[x_g]\mu[y_h] = \mu(0)$$

یا

$$\mu[x_g]\mu[z_k] = \mu(0)$$

یا

$$\mu[y_h]\mu[z_k] = \mu(0).$$

بنابراین

$$\mu(x_g \circ y_h) = \bigwedge_{t\in x_g\circ y_h} \mu(t) = \mu(0) = 1$$

یا

$$\mu(x_g \circ z_k) = \bigwedge_{t\in x_g\circ z_k} \mu(t) = \mu(0) = 1$$

یا

$$\mu(y_h \circ z_k) = \bigwedge_{t\in y_h\circ z_k} \mu(t) = \mu(0) = 1،$$

که این نشان می‌دهد μ یک ابرایده‌آل K-۲-جاذب فازی مدرج است. $\square$

۵ نتیجه‌گیری

در این مقاله، مفاهیم مختلفی از ابرایده‌آل‌های جاذب فازی مدرج مانند ابرایده‌آل ۲-جاذب فازی مدرج، ابرایده‌آل ۲-جاذب به طور قوی فازی مدرج، ابرایده‌آل ۲-جاذب کاملاً ضعیف فازی مدرج و ابرایده‌آل K-۲-جاذب فازی مدرج را که در واقع تعمیمی از ابرایده‌آل‌های اول فازی می‌باشند را در یک ابرحلقه ضربی جابجایی مورد مطالعه و بررسی قرار دادیم. ما نشان دادیم که در حالت کلی دو مفهوم ابرایده‌آل‌های جاذب فازی مدرج و ابرایده‌آل‌های جاذب فازی متفاوت هستند و بسیاری از قضایا در حالت مدرج برقرار

نیست و مثال‌های در این خصوص را ارایه کردیم. برخی خاصیت‌های اساسی و نتایج جدید از این نوع ساختارها را تحت مولفه‌های عناصر همگن فازی و همریختی بیان و اثبات کردیم. همچنین رابطه بین ابرحلقه‌های ضربی فازی مدرج و ابرحلقه‌های ضربی مدرج را با استفاده از مجموعه‌های برشی ارایه کرده و شرایطی که تحت آن، مجموعه خارج قسمتی یک ابرحلقه ضربی جابجایی مدرج روی یک ابرایده‌آل فازی، یک ابرحلقه ضربی مدرج می‌شود را بیان نمودیم.

مراجع

[1] Anbarloei, M., (2017) *On 2-absorbing and 2-absorbing primary hyperideals of a multiplicative hyperring*, Cogent Mathematics, 4, 1-8.

[2] Badawi, A., (2007) *On 2-absorbing ideals of commutative rings*, Bull. Austral. Math. Soc., 75(3), 417-429.

[3] Corsini, P., and Leoreanu, V., (2003) *Applications of Hyperstructure Theory*, Kluwer Academic Publishers.

[4] Davvaz, B., and Leoreanu, V., (2007) *Hyperring Theory and Applications,* International Academic Press.

[5] Eslami, E., Mordeson, J. N., (1996) *Completion and Fuzzy Power Series*, Fuzzy Sets and Systems, 82(1), 97-102.

[6] Farzalipour, F. and Ghiasvand, P., (2020) *On graded hyperrings and graded hypermodules*, Algebraic structures and their applications, 7(2), 15-28.

[7] Farzalipour, F. and Ghiasvand, P., (2022) *Graded ϕ-2-absorbing hyperideals in graded multiplicative hyperrings*, Asian-European J. Math., 2250113, 15 pages.

[8] Ghiasvand, P., Farzalipour, F. and Mirvakili, S., (2021) *On expansions of graded 2-absorbing hyperideals in graded multiplicative hyperrings*, Filomat, 35(9), 3033-3045.

[9] Ghiasvand, P., Raeisi, M. and Mirvakili, S., (2023) *A generalization of graded prime hyperideals over graded multiplicative hyperrings*, J. Algebra and Its Applications, 2350235, 19 pages.

[10] Krasner, M., (1983) *A class of hyperrings and hyperfield*, Intern. J. Math. Math. Sci., 6(2), 307-312.

[11] Lee, K. H., (2000) *On fuzzy quotient rings and chain conditions*, J. Korea Soc. Math. Educ. Ser. B: Pure Appl. Math., 7(1), 33-40.

[12] Liu, W. J., (1982) *Fuzzy invariant subgroups and fuzzy ideals*, Fuzzy Sets and Systems, 8, 133-139.

[13] Liu, W. J., (1983) *Operation on fuzzy ideals*, Fuzzy Sets and Systems, 11, 31-41.

[14] Malik, D. S., Mordeson, J. N., (1998) *Fuzzy commutative algebra*, World Scientific Publishing.

[15] Malik, D. S., Mordeson, J. N., (1992) *Fuzzy direct sums of fuzzy rings*, Fuzzy Sets and Systems, 45, 83-91.

[16] Marty, F., (1934) *Sur une generalization de notion de groupe,* $8th$ Congress Math, Scandenaves, Stockholm, 45-49.

[17] Nastasescu, N. and Van Oystaeyen, F., (1937) *Graded Rings Theory*, Mathematical Library 28, North Holland, Amsterdam.

[18] Rosenfeld, A., (1971) *Fuzzy groups*, J. Math. Anal.Appl, 35, 512-517.

[19] Rota, R., (1982) *Sugli iperanelli moltiplicativi*, Rend. Di Mat, Series 7(2), 711-724.

[20] Sen, M. K., Ameri, R., and Chowdhury, G., (2008) *Fuzzy hypersemigroups*, Soft Computing, 12(9), 891-900.

[21] Vougiouklis, T., (1987) *Representions of hypergroups by hypermatices*, Rivista di Mat. Pura ed Appl., 2, 7-19.

[22] Zadeh, L., (1965) *Fuzzy Sets*, Information and Control, 8.

[23] Zhan, J., Davvaz, B., and Shum, K. P., (2008) *Generalized fuzzy hyperideals of hyperrings*, Comput. Appl., 56, 1732-1740.