سیستم‌های فازی و کاربردها
سال ششم، شماره اول (بهار و تابستان ۱۴۰۲)
صص. ۸۳ تا ۱۰۸
شاپای چاپی: ۲۷۱۷-۴۴۰۹
شاپای الکترونیکی: ۲۷۱۷-۳۹۸۴
DOI:10.22034/JFSA.2023.347345.1136

برخی مشتق ها روی EQ-جبرها

لیلا عباسیان و لیدا ترک زاد*

گروه ریاضی، واحد کرمان، دانشگاه آزاد اسلامی، کرمان، ایران

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۰۳/۲۵ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۰۲/۰۶
نوع مقاله: علمی-پژوهشی

چکیده

در این مقاله ابتدا مفهوم مشتق های $(\otimes, \square)$ که $\square \in \{\sim, \to\}$، روی EQ-جبرها معرفی شده و سپس مشخصه سازی شده اند، به این صورت که تابع $d : E \to E$ یک مشتق $(\otimes, \sim)$(مشتق $(\sim \otimes)$) روی EQ-جبر کراندار E است اگر و تنها اگر برای هر $x, y \in E$، $d(x) = 1$ و $x \sim y = 1$. در نتیجه d یک مشتق یکنوا، همریختی و بستار می شود. بعلاوه مشتق های $(\otimes, \wedge)$ روی EQ-جبرها بررسی شده و بعضی نتایج مورد بحث قرار گرفته است. در واقع نشان داده شده است که اگر $d : E \to E$ یک مشتق $(\otimes, \wedge)$ روی E باشد، به طوری که برای هر $x \in E$، $d(1) \otimes x \leq d(x)$، آنگاه d یک مشتق یکنواست. سپس با مطالعه بر روی مشتق های $(\otimes, \vee)$ روی EQ-جبرهای مشبکه مرتب، مشتق نیم دوگان بستار را معرفی کرده و ثابت شده است که برای هر $a \in E$، $d_a(x) = x \otimes a$ برای هر $x \in E$، یک مشتق $(\otimes, \vee)$، نیم دوگان بستار روی E است. در پایان، با اثبات ویژگی ای از EQ-جبرها، شرایطی یافت می شود که تحت آن مجموعه ی نقاط ثابت در مشتق های $(\otimes, \vee)$ روی EQ-جبرهای مشبکه مرتب، تشکیل یک EQ-جبر مشبکه مرتب می دهد.

عبارات و کلمات کلیدی: EQ-جبر، مشتق، EQ-جبر مشبکه مرتب، نقاط ثابت.

Email(s): leila-abbasian6@yahoo.com and ltorkzadeh@yahoo.com.

Mathematics Subject Classification: 06E25 ; 03G25 ; 06D72

۱ مقدمه

منطق فازی را می توان به عنوان ابزاری برای مطالعه عدم قطعیت و استدلال تقریبی دانست [۱۰]. برای مثال منطق های مانده [۱] [۳]، BL [۱۰]، لوکاسیویچ [۲] [۳] و MTL [۶] برخی از این منطق‌های فازی برای تعمیم بولی ارزش درستی $\{0,1\}$ هستند. یک نظریه از نوع فازی (FTT) در واقع تعمیمی از یک برابری فازی برای منطق های مرتبه بالاتر را ایجاد می کند [۱۶]. لذا برای دستیابی به معادل جبری تعمیم ارزش درستی نظریه فازی یک جبر خاص به نام EQ-جبر، برای اولین بار توسط نواک [۳] [۱۴] مطرح شد، که در واقع مشبکه‌های مانده نوع خاصی از EQ-جبرها می باشند. مفهوم مشتق برگرفته از تئوری تحلیلی برای تحقیقات در ساختار و خواص سیستم‌های جبری ارائه شده است. در حقیقت مفهوم مشتق در نظریه حلقه قدیمی است و نقش مهمی را در هندسه جبری ایفا می کند. در ۱۹۵۷ پسنر [۴] [۱۸] مفهوم مشتق را در حلقه اول معرفی کرد. جون [۵] و شین [۶] در [۱۲] مفهوم مشتق در جبرهای BCI را مورد بررسی قرار دادند. مشتق روی مشبکه‌ها ابتدا توسط ساس [۷] مطرح شد [۱۹] و سپس توسط محققان دیگری در [۷] ، [۲] و [۲۲] خواصی از مشتق روی مشبکه‌ها بررسی شد. بعدها مشتق در جبرهای MV و مشبکه‌های مانده نیز در [۱۱] و [۹] مطالعه شده است. با توجه به اهمیت مشتق ها در جبرهایی که ذکر شد، در [۱۳] نوعی مشتق روی EQ-جبرها تعریف شده و خواصی از آن بررسی شده است. از این رو بر آن شدیم در این مقاله چند نوع مشتق متفاوت از مشتق تعریف شده در [۱۳] که در ادامه معرفی می شوند، بیان کنیم. مطالب موجود در این مقاله به صورت زیر سازمان دهی شده اند.

در بخش دوم، برخی از مفاهیم و تعاریف اساسی و مقدماتی درباره EQ-جبرها و بعضی از خواص آن ها که در بخش های بعد مورد استفاده قرار می گیرند، جمع آوری شده است. در بخش سوم، مشتق های $(\otimes,\Box)$ که $\Box\in\{\sim,\rightarrow,\wedge\}$، روی EQ-جبرها را

[1] Residuated
[2] Lukasiewicze
[3] Novak
[4] Posner
[5] Jun
[6] Xin
[7] Szasz

مورد بررسی قرار می دهیم و مشتق های $(\otimes,\sim)$ و $(\otimes,\rightarrow)$ را مشخصه سازی می کنیم. در بخش چهارم، مشتق $(\otimes,\vee)$ روی EQ–جبرهای مشبکه مرتب و چندین مثال از آن را بدست می آوریم و با مطالعه بر روی نقاط ثابت این مشتق شرایطی پیدا می کنیم که تحت آن مجموعه‌ی نقاط ثابت در این مشتق، تشکیل یک EQ–جبر مشبکه مرتب جبر می دهد.

۲ پیش‌نیازها

در این بخش، مفاهیم و اصطلاحات اساسی موردنیاز در سرتاسر مقاله را بیان می‌کنیم.

تعریف ۱.۲. ([۱۷، ۵]). دستگاه جبری $\xi=(E,\wedge,\otimes,\sim,1)$ از نوع $(2,2,2,0)$، یک EQ–جبر گفته می‌شود، هرگاه به ازای هر $a,b,c,d\in E$ داشته باشیم:

(E_1) $(E,\wedge,1)$ یک $\wedge$–نیم مشبکه با بزرگترین عضو ۱ باشد، یعنی ترتیب جزئی القا شده توسط $\wedge$ به صورت، $a\leq b$ اگر تنها اگر $a\wedge b=a$ است،

(E_2) $(E,\otimes,1)$ یک تکواره جابجایی و عمل $\otimes$ نسبت به $\leq$ یکنوا باشد بدین معنی که برای هر $z\in E$، $a\leq b$ ایجاب کند $a\otimes z\leq b\otimes z$،

(E_3) $a\sim a=1$،

(E_4) $((a\wedge b)\sim c)\otimes(d\sim a)\leq c\sim(d\wedge b)$،

(E_5) $(a\sim b)\otimes(c\sim d)\leq(a\sim c)\sim(b\sim d)$،

(E_6) $(a\wedge b\wedge c)\sim a\leq(a\wedge b)\sim a$،

(E_7) $a\otimes b\leq a\sim b$.

اعمال دوتایی ”$\wedge$“ ، ”$\otimes$“ و ”$\sim$“ به ترتیب اینفیمم (بزرگترین کران پایین)، ضرب و تساوی فازی نامیده می‌شوند. لازم است این مطلب را یادآور شویم که در سرتاسر این مقاله منظور از ξ، EQ–جبر، $\xi=(E,\wedge,\otimes,\sim,1)$ است. همچنین EQ–جبری که دارای کوچکترین عضو ۰ باشد، را کراندار می گوییم و در این EQ–جبر برای هر $a\in E$، $a\otimes 0=0$ می باشد. از طرفی برای هر $a,b\in E$ قرار می دهیم:

$$\widetilde{a}=a\sim 1, a\rightarrow b=(a\wedge b)\sim a, a^n=a\otimes a\otimes\ldots\otimes a$$

اگر E یک مجموعه ی ناتهی همراه با سه عمل دوتایی $\wedge, \otimes, \sim$ باشد به طوری که $(E, \wedge, 1)$ یک $\wedge$-نیم مشبکه و $(E, \otimes, 1)$ یک تکواره و $\otimes$ روی $\leq$ یکنوا باشد و برای هر $a, b \in E$ داشته باشیم $a \sim b = 1$، آنگاه $\xi = (E, \wedge, \otimes, \sim, 1)$ یک EQ-جبر است.

لم ۲.۲. *([۴، ۱۷]). اگر ξ یک EQ-جبر باشد، آنگاه روابط زیر برای هر $a, b, c, d \in E$ برقرارند:*

(e_1) $a \sim b = b \sim a$،

(e_2) $a \sim b \leq a \to b, a \to a = 1$،

(e_3) $(a \sim b) \otimes (b \sim c) \leq (a \sim c)$،

(e_4) $a \sim d \leq (a \wedge b) \sim (d \wedge b)$،

(e_5) $(a \sim d) \otimes ((a \wedge b) \sim c) \leq (d \wedge b) \sim c$،

(e_6) $(a \wedge b) \sim a \leq (a \wedge b \wedge c) \sim (a \wedge c)$،

(e_7) $a \otimes b \leq a \wedge b \leq a, b$،

(e_8) $b \leq \tilde{b} \leq a \to b$،

(e_9) *اگر* $a \leq b$، *آنگاه* $a \to b = 1$، $b \to a = a \sim b$، $\tilde{a} \leq \tilde{b}$، $c \to a \leq c \to b$ و $b \to c \leq a \to c$،

(e_{10}) *اگر* $a \leq b \leq c$، *آنگاه* $a \sim c \leq a \sim b$ *و* $a \sim c \leq b \sim c$،

(e_{11}) $a \otimes (a \sim b) \leq \tilde{b}$.

تعریف ۳.۲. ([۴، ۱۷]). اگر E یک EQ-جبر باشد، گوییم:

(i) E جدایی پذیر است، اگر برای هر $a, b \in E$، $a \sim b = 1$ ایجاب کند $a = b$،

(ii) E، EQ-جبر مشبکه مرتب است، اگر تحت ترتیب جزئی القا شده توسط $\leq$ یک مشبکه باشد.

تعریف ۴.۲. ([۱]). فرض کنید ξ یک EQ-جبر و $d : E \to E$ یک تابع باشد. آنگاه گوییم تابع d:

(الف) یکنوا است اگر برای هر $x, y \in E$، $x \leq y$ ایجاب کند $d(x) \leq d(y)$.

(ب) بستار است اگر یکنوا باشد و $d = d^2 \geq id_E$.

(ج) دوگان بستار است اگر یکنوا باشد و $d = d^2 \leq id_E$.

به ویژه مجموعه ی همه ی نقاط ثابت E برای تابع d به صورت
$Fix_d(E) = \{x \in E \mid d(x) = x\}$ نمایش داده می شود.

تعریف ۵.۲. ([۵]). زیرمجموعه غیرتهی F از ξ را یک پیش فیلتر از ξ می نامیم، هرگاه برای هر $a, b \in E$ داشته باشیم:
(PF_1) $1 \in F$،
(PF_2) $a, a \to b \in F$، ایجاب کند $b \in F$.

۳ مشتق های $(\otimes, \square)$ روی EQ-جبرها که $\square \in \{\sim, \to, \wedge\}$

در این بخش مشتق های $(\otimes, \square)$ که $\square \in \{\sim, \to, \wedge\}$ روی EQ-جبرها مطالعه شده و برخی از ویژگی های آن ها مورد بررسی قرار گرفته است. همچنین مشتق های $(\otimes, \sim)$ و $(\otimes, \to)$ مشخصه سازی شده اند.

تعریف ۱.۳. تابع $d : E \to E$ را یک مشتق $(\otimes, \square)$ روی EQ-جبر ξ می نامیم به طوری که $\square \in \{\sim, \to, \wedge\}$، اگر برای هر $x, y \in E$، در شرط زیر صدق کند:

$$d(x \otimes y) = (d(x) \otimes y) \square (x \otimes d(y)).$$

قضیه ۲.۳. *تابع $d : E \to E$ یک مشتق $(\otimes, \sim)$ روی EQ-جبر کراندار E است اگر و تنها اگر برای هر $x, y \in E$، $d(x) = 1$ و $x \sim y = 1$.*

اثبات. فرض کنید d یک مشتق $(\otimes, \sim)$ روی ξ باشد. آنگاه برای هر $x \in E$ داریم:

$$\begin{aligned} d(x^2) &= d(x \otimes x) \\ &= (d(x) \otimes x) \sim (x \otimes d(x)) \\ &= 1. \end{aligned}$$

بنابراین $d(\text{۱}) = d(\circ) = \text{۱}$. اکنون بدست می آوریم:

$$\begin{aligned} \text{۱} &= d(\circ) \\ &= d(x \otimes \circ) \\ &= (d(x) \otimes \circ) \sim (x \otimes d(\circ)) \\ &= \circ \sim x. \end{aligned}$$

در نتیجه طبق $(e_\text{۱})$ و $(e_\text{۳})$، خواهیم داشت:
$x \sim y \leq (x \sim \circ) \otimes (\circ \sim y) = \text{۱}$، پس برای هر $x, y \in E$، $x \sim y = \text{۱}$. لذا

$$\begin{aligned} d(x) &= d(x \otimes \text{۱}) \\ &= (d(x) \otimes \text{۱}) \sim (x \otimes d(\text{۱})) \\ &= d(x) \sim x \\ &= \text{۱}. \end{aligned}$$

برعکس، فرض کنید $d(x) = \text{۱}$ و $x \sim y = \text{۱}$ آنگاه، طبق فرض $(d(x) \otimes y) \sim (x \otimes d(y)) = x \sim y = \text{۱}$ و $d(x \otimes y) = \text{۱}$. بنابراین $d(x \otimes y) = (d(x) \otimes y) \sim (x \otimes d(y))$، که نشان می دهد d یک مشتق $(\otimes, \sim)$ است. □

مثال زیر نشان می دهد که برای هر $x, y \in E$، شرط $x \sim y = \text{۱}$ برای قضیه ۳-۲، لازم است.

مثال ۳.۳. فرض کنید $E = \{\circ, a, \text{۱}\}$، که $\circ < a < \text{۱}$. $\otimes$ و $\sim$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$\sim$	۰	a	۱
۰	۱	۱	a
a	۱	۱	a
۱	a	a	۱

$\otimes$	۰	a	۱
۰	۰	۰	۰
a	۰	a	a
۱	۰	a	۱

آنگاه $(E, \wedge, \otimes, \sim, ۱)$ یک EQ-جبراست. تابع $d : E \to E$، برای هر $x \in E$، را به صورت $d(x) = ۱$ تعریف می کنیم. به راحتی می توان نشان داد که d مشتق $(\otimes, \sim)$ روی E نیست، زیرا $d(a \otimes ۱) = d(a) = ۱$ و $(d(a) \otimes ۱) \sim (a \otimes d(۱)) = ۱ \sim a = a$.

قضیه ۴.۳. *فرض کنید d یک مشتق $(\otimes, \sim)$ روی EQ-جبرکراندار ξ باشد. آنگاه:*

(i) d یکنوا است.

(ii) d همریختی است، یعنی d اعمال روی EQ-جبر ξ را حفظ می کند.

(iii) d بستار است.

(iv) $Fix_d(E) = \{۱\}$، که یک پیش فیلتر از ξ نیست.

اثبات. اثبات (i)، (ii) و (iii) به وسیله قضیه ۳-۲ واضح است.

(iv) به آسانی می توان دید $Fix_d(E) = \{۱\}$، طبق فرض و تعریف ۲-۵، برای هر $x \neq ۱$ ،داریم $x \to ۱ = x \sim ۱ = x = ۱ \in \{۱\}$، اما $x \notin \{۱\}$. بنابراین $Fix_d(E)$ پیش فیلتری از ξ نیست. $\square$

مشابه قضیه ۳-۲، برای مشتق $(\otimes, \to)$ نیز می توان قضیه زیر را نوشت:

قضیه ۵.۳. *تابع $d : E \to E$ یک مشتق $(\otimes, \to)$ روی EQ-جبرکراندار ξ است اگر و تنها اگر برای هر $x, y \in E$، $d(x) = ۱$ و $x \sim y = ۱$.*

اثبات. مشابه قضیه ۳-۲، به راحتی قابل اثبات است. $\square$

نتیجه ۶.۳. *فرض کنید $d : E \to E$ یک تابع روی EQ-جبرکراندار ξ باشد. آنگاه d یک مشتق $(\otimes, \sim)$ است اگر و تنها اگر d یک مشتق $(\otimes, \to)$ باشد.*

اکنون چند مثال آورده و برخی از خصوصیات مشتق $(\wedge,\otimes)$ روی EQ-جبرها را بدست می آوریم.

مثال ۷.۳. (i) فرض کنید ξ یک EQ-جبر باشد. تابع $d: E \to E$ برای هر $x \in E$، به صورت $d(x) = x$ یک مشتق $(\wedge,\otimes)$ روی ξ است.
(ii) فرض کنید ξ یک EQ-جبر کراندار باشد. تابع $d: E \to E$ به طوری که برای هر $x \in E$، $d(x) = ۰$ باشد، یک مشتق $(\wedge,\otimes)$ روی ξ است.
(iii) EQ-جبر $E = \{۰, a, b, c, d, ۱\}$ به طوری که $۰ \leq a, b \leq c \leq d \leq ۱$ را در نظر بگیرید. ضرب و تساوی فازی روی E به صورت زیر تعریف می شوند[۱۷]:

$\sim$	۰	a	b	c	d	۱
۰	۱	۱	a	a	a	a
a	۱	۱	a	a	a	a
b	a	a	۱	c	c	c
c	a	a	c	۱	c	c
d	a	a	c	c	۱	d
۱	a	a	c	c	d	۱

$\otimes$	۰	a	b	c	d	۱
۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
a	۰	۰	۰	۰	۰	a
b	۰	۰	۰	۰	۰	b
c	۰	۰	۰	۰	۰	c
d	۰	۰	۰	۰	d	d
۱	۰	a	b	c	d	۱

تابع d روی E به طوری که $d(۰) = d(b) = d(c) = ۰, d(a) = a, d(d) = d$ و $d(۱) = ۱$ باشد. آنگاه d مشتق $(\wedge,\otimes)$ روی E است که یکنوا نیست، زیرا $a \leq c$، اما $a = d(a) \leq d(c) = ۰$ برقرار نیست. بنابراین d یک بستار نیست. از طرفی چون $d(d \sim b) \neq d(d) \sim d(b))$، لذا d یک همریختی نیست.

(iv) فرض کنید $E = \{۰, a, b, c, d, ۱\}$ یک EQ-جبر باشد به طوری که
$۱ \geq d \geq b, c \geq a \geq ۰$. ضرب و تساوی فازی روی E به صورت زیر

تعریف می شوند[۱۷]:

$\otimes$	۰	a	b	c	d	۱
۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
a	۰	۰	۰	۰	۰	a
b	۰	۰	a	a	a	b
c	۰	۰	a	۰	a	c
d	۰	۰	a	a	a	d
۱	۰	a	b	c	d	۱

$\sim$	۰	a	b	c	d	۱
۰	۱	۰	۰	۰	۰	۰
a	۰	۱	d	d	d	d
b	۰	d	۱	d	d	d
c	۰	d	d	۱	d	d
d	۰	d	d	d	۱	۱
۱	۰	d	d	d	۱	۱

فرض کنید تابع d روی E به طوری که $d(۰) = d(a) = ۰, d(b) = d(c) =$ $d(d) = a$ و $d(۱) = b$ تعریف شود. آنگاه، d یک مشتق $(\otimes, \wedge)$ یکنوا روی E است که بستار نمی باشد، چون $d(۱) \neq d(d(۱))$. همچنین d یک همریختی نمی باشد زیرا $d(۱ \otimes b) \neq d(۱) \otimes d(b)$.

قضیه ۸.۳. *فرض کنید $d : E \to E$ یک مشتق $(\otimes, \wedge)$ روی EQ-جبر ξ باشد. آنگاه موارد زیر برای هر $x, y \in E$ برقرار هستند:*

(a) *اگر ξ کراندار باشد،* $d(۰) = ۰$،

(b) $d(x) \leq x \otimes d(۱) \leq x \leq \tilde{x}$،

(c) $d(x) \otimes d(y) \leq d(x \otimes y) \leq d(x) \wedge d(y)$،

(d) $d(x) \leq d(۱)$،

(e) $d(x \otimes y) \leq x \sim y \leq x \to y,$

(f) $d(x) \leq y \to x$،

(g) *برای هر* $n \geq ۱$، $d(x^n) = x^{n-۱} \otimes d(x)$،

(h) *اگر ξ کراندار باشد و* $d(۱) = ۰$، *آنگاه برای هر* $x \in E$، $d(x) = ۰$،

(i) *برای هر* $n \geq ۱$، $(d(x))^n \leq d(x^n)$،

(j) *اگر* $y \leq x$ *و E یک EQ- جبر جدایی پذیر باشد، آنگاه* $d(y) \leq x$.

اثبات. (a) داریم:

$$\begin{aligned} d(0) &= d(0 \otimes 0) \\ &= (d(0) \otimes 0) \wedge (0 \otimes d(0)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

(b) داریم:

$$\begin{aligned} d(x) &= d(x \otimes 1) \\ &= (d(x) \otimes 1) \wedge (x \otimes d(1)) \\ &= d(x) \wedge (x \otimes d(1)). \end{aligned}$$

آنگاه $\tilde{x} \leq x \leq (x \otimes d(1)) \leq d(x)$.

(c) بنا به قسمت (b)، داریم $d(x) \otimes d(y) \leq x \otimes d(y)$ و $d(x) \otimes d(y) \leq d(x) \otimes y$.
بنابراین $d(x) \otimes d(y) \leq (x \otimes d(y)) \wedge (d(x) \otimes y) = d(x \otimes y) \leq d(x) \wedge d(y)$.
(d) اثبات با استفاده از قسمت (b) واضح است.
(e) طبق (e_2) و قسمت (b) داریم: $d(x \otimes y) \leq x \otimes y \leq x \sim y \leq x \to y$.
(f) با استفاده از (e_8) ، (e_9) و قسمت (b) اثبات واضح است.
(g) داریم:

$$\begin{aligned} d(x^2) &= d(x \otimes x) \\ &= (d(x) \otimes x) \wedge (x \otimes d(x)) \\ &= d(x) \otimes x. \end{aligned}$$

بنابراین، به کمک استقرا به راحتی خواهیم داشت $d(x^n) = x^{n-1} \otimes d(x)$.
قسمت های (h)، (i) و (j) به ترتیب از قسمت های (d)، (c) و (b) نتیجه می شوند. $\square$

از قضیه ۳-۲ و قضیه ۳-۸ قسمت (a) نتیجه زیر گرفته می شود:

نتیجه ۹.۳. *فرض کنید $d : E \to E$ یک تابع روی EQ-جبر کراندار ξ باشد. اگر d یک مشتق $(\otimes, \wedge)$ روی ξ باشد، آنگاه d یک مشتق $(\otimes, \sim)$ نیست.*

قضیه ۱۰.۳. *فرض کنید $d : E \to E$ یک مشتق $(\otimes, \wedge)$ روی EQ-جبر کراندار ξ باشد. اگر $a \in E$ و برای هر $b \in E - \{۱\}$، $a \otimes b = ∘$، آنگاه:*

(i) $d(۱) \neq ۱$ ایجاب می کند $d(a) = ∘$.

(ii) $d(۱) = a$ ایجاب می کند برای هر $b \in E - \{۱\}$، $d(b) = ∘$.

اثبات. فرض کنید $d(۱) = c \neq ۱$. آنگاه داریم:

$$\begin{aligned} d(a) &= d(a \otimes ۱) \\ &= (d(a) \otimes ۱) \wedge (a \otimes d(۱)) \\ &= d(a) \wedge (a \otimes c) \\ &= d(a) \wedge ∘ \\ &= ∘. \end{aligned}$$

(ii) برای $b \in E - \{۱\}$، داریم:

$$\begin{aligned} d(b) &= d(b \otimes ۱) \\ &= (d(b) \otimes ۱) \wedge (b \otimes d(۱)) \\ &= d(b) \wedge (b \otimes a) \\ &= d(b) \wedge ∘ \\ &= ∘. \end{aligned}$$

□

قضیه ۱۱.۳. *فرض کنید ξ یک EQ-جبر و $a \in E$ باشد. آنگاه تابع $d_a : E \to E$ به طوری که برای هر $x \in E$، $d_a(x) = a \otimes x$ تعریف شود، یک مشتق $(\wedge, \otimes)$ یکنوا روی ξ است.*

اثبات. داریم $d_a(x \otimes y) = a \otimes (x \otimes y)$، از طرفی
$(d_a(x) \otimes y) \wedge (x \otimes d_a(y)) = ((a \otimes x) \otimes y) \wedge (x \otimes (a \otimes y)) = a \otimes (x \otimes y)$،
بنابراین d_a مشتق $(\wedge, \otimes)$ است. به آسانی دیده می شود که d_a یکنوا است. □

عکس قضیه فوق برقرار نمی باشد، زیرا برای مشتق d در مثال ۳-۷ قسمت (iii)، $a \in E$ وجود ندارد به طوری که $d = d_a$. بنابراین هر مشتق $(\wedge, \otimes)$ را نمی توان به صورت d_a، برای یک $a \in E$، نوشت.

قضیه ۱۲.۳. *اگر $d : E \to E$ یک مشتق $(\wedge, \otimes)$ روی EQ-جبر ξ به طوری که برای هر $x \in E$، $d(x) \leq x \otimes d(۱)$ باشد. آنگاه d یک مشتق یکنوا است.*

اثبات. داریم:

$$\begin{aligned} d(x) &= d(x \otimes ۱) \\ &= (d(x) \otimes ۱) \wedge (x \otimes d(۱)) \\ &= d(x) \wedge (x \otimes d(۱)) \\ &= x \otimes d(۱). \end{aligned}$$

اکنون اگر $x \leq y$، آنگاه $x \otimes d(۱) \leq y \otimes d(۱)$. بنابراین $d(x) \leq d((y)$. □

قضیه ۱۳.۳. *فرض کنید ξ یک EQ-جبر و $d : E \to E$ یک مشتق $(\wedge, \otimes)$ روی ξ باشد. اگر برای هر $x \in E$، $d(d(۱)) = d(۱)$ و $d(x) \leq x \otimes d(۱)$، آنگاه برای هر $x, y \in E$، داریم:*

(i) $d(۱) \otimes d(۱) = d(۱)$،

(ii) $d(x \otimes y) = d(x) \otimes d(y)$،

(iii) $d(d(x)) = d(x)$.

اثبات. (i) با استفاده از $d(۱) \otimes x \leq d(x)$ و قضیه ۳-۱۲، داریم $d(۱) \otimes x = d(x)$. بنابراین $d(۱) = d(d(۱)) = d(۱) \otimes d(۱)$.

(ii) به کمک (i) داریم:

$$\begin{aligned} d(x \otimes y) &= d(۱) \otimes (x \otimes y) \\ &= (d(۱) \otimes d(۱)) \otimes (x \otimes y) \\ &= (d(۱) \otimes x) \otimes (d(۱) \otimes y) \\ &= d(x) \otimes d(y). \end{aligned}$$

(iii) طبق قسمت (ii) داریم: $d(d(x)) = d(۱) \otimes d(x) = d(x \otimes ۱) = d(x)$.

□

بنا به قضایای ۳-۱۲ و ۳-۱۳ نتیجه زیر را خواهیم داشت:

نتیجه ۱۴.۳. *فرض کنید ξ یک EQ-جبر و $d : E \to E$ یک مشتق $(\otimes, \wedge)$ روی ξ باشد. اگر برای هر $x \in E$، $d(۱) \otimes x \leq d(x)$ و $d(d(۱)) = d(۱)$، آنگاه d یک مشتق دوگان بستار روی E است.*

۴ مشتق $(\otimes, \vee)$ روی EQ-جبرهای مشبکه مرتب

تعریف ۱.۴. فرض کنید ξ یک EQ-جبر مشبکه مرتب باشد. تابع $d : E \to E$ را مشتق $(\otimes, \vee)$ روی ξ می نامیم، اگر برای هر $x, y \in E$، در شرط زیر صدق کند:

$$d(x \otimes y) = (d(x) \otimes y) \vee (x \otimes d(y))$$

مثال ۲.۴. (i) فرض کنید ξ یک EQ-جبر مشبکه مرتب باشد. تابع $d : E \to E$ به طوری که برای هر $x \in E$، $d(x) = x$ باشد، یک مشتق

$(\otimes, \vee)$ روی ξ است.

(ii) فرض کنید ξ یک EQ-جبر مشبکه مرتب کراندار باشد. تابع $d : E \to E$ به طوری که برای هر $x \in E$، $d(x) = ۰$ باشد، یک مشتق $(\otimes, \vee)$ روی ξ است.

(iii) در مثال ۷.۳ قسمت (iv)، تابع d روی E را به طوری که $d(۰) = d(۱) = ۰ d(a) = a, d(b) = d(c) = c$ و $d(d) = b$ باشد، در نظر بگیرید. آنگاه d یک مشتق $(\otimes, \vee)$ روی E است که یکنوا نیست، زیرا $a \leq ۱$، اما $a = d(a) \leq d(۱) = ۰$ برقرار نیست.

(iv) EQ-جبر مرتب خطی $E = \{۰, a, b, c, d, ۱\}$ را در نظر بگیرید که ضرب و تساوی فازی روی E به صورت زیر تعریف می شوند [۱۷]:

$\sim$	۰	a	b	c	d	۱
۰	۱	d	c	b	a	۰
a	d	۱	d	c	b	a
b	c	d	۱	d	c	b
c	b	c	d	۱	d	c
d	a	b	c	d	۱	d
۱	۰	a	b	c	d	۱

$\otimes$	۰	a	b	c	d	۱
۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
a	۰	۰	۰	۰	۰	a
b	۰	۰	۰	۰	a	b
c	۰	۰	۰	a	a	c
d	۰	۰	a	a	a	d
۱	۰	a	b	c	d	۱

فرض کنید تابع d روی E به طوری که $d(۰) = ۰, d(a) = d(b) = a, d(c) = c$ و $d(d) = d(۱) = d$ باشد. آنگاه d مشتق $(\otimes, \vee)$ یکنوا روی E است.

(v) در جدول مثال ۳-۳، توابع $d_۱$ و $d_۲$ روی E را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$d_۱(a) = a$ و $d_۱(۱) = d_۱(۰) = ۰$.

$d_۲(۱) = ۱$ و $d_۲(a) = d_۲(۰) = ۰$.

به راحتی دیده می شود که $d_۱$ یک مشتق $(\otimes, \vee)$ روی E است، اما طبق قسمت (h) قضیه ۳-۸، یک مشتق $(\otimes, \wedge)$ نیست. همچنین $d_۲$ یک مشتق $(\otimes, \wedge)$ روی E است که مشتق $(\otimes, \vee)$ نیست.

تعریف ۳.۴. فرض کنید d یک مشتق $(\otimes,\vee)$ روی EQ-جبر مشبکه مرتب ξ باشد. آنگاه d را:

(i) مشتق نیم دوگان بستارگوییم، اگر d یکنوا باشد و برای هر $x\in E$، $x\leq d(x)$.

(ii) مشتق خودتوان گوییم، اگر برای هر $x\in E$، $d(x)=d(x)\otimes d(x)$.

(iii) مشتق انعکاسی گوییم، اگر برای هر $x\in E$، $d(x)\sim x=1$.

مثال ۴.۴. (i) فرض کنید $E=\{0,a,1\}$ باشد به طوری که $0<a<1$. ضرب و تساوی فازی روی E به صورت زیر تعریف می شوند:

$\otimes$	0	a	1
0	0	0	0
a	0	a	a
1	0	a	1

$\sim$	0	a	1
0	1	0	0
a	0	1	1
1	0	1	1

آنگاه $(E,\wedge,\otimes,\sim,1)$ یک EQ-جبر است. تابع $d:E\to E$ را به طوری که $d(0)=0$ و $d(a)=d(1)=a$ در نظر بگیرید. آنگاه به آسانی می توان نشان داد که d یک مشتق $(\otimes,\vee)$ نیم دوگان بستار، خودتوان و انعکاسی است.

(ii) فرض کنید $E=\{0,a,,b,1\}$ یک EQ-جبر مرتب خطی باشد به طوری که ضرب و تساوی فازی روی E به صورت زیر تعریف می شوند[۲۱]:

$\otimes$	0	a	b	1
0	0	0	0	0
a	0	a	a	a
b	0	a	b	b
1	0	a	b	1

$\sim$	0	a	b	1
0	1	0	0	0
a	0	1	a	a
b	0	a	1	1
1	0	a	1	1

توابع d_1 و d_2 روی EQ را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$d_1(0)=0$، $d_1(a)=a$ و $d_1(b)=d_1(1)=b$.

$d_2(\circ) = \circ$، $d_2(b) = b$ و $d_2(a) = d_2(1) = a$.

می توان دید که d_1 یک مشتق $(\otimes, \vee)$ نیم دوگان بستار، خودتوان و انعکاسی است.

d_2 یک مشتق $(\otimes, \vee)$ خودتوان است که نیم دوگان بستار و انعکاسی نیست، زیرا d_2 یکنوا نیست و همچنین $d_2(1) \sim 1 = a \sim 1 = a \neq 1$.

(iii) مشتق d در مثال ۴-۲، قسمت (iv) یک مشتق $(\otimes, \vee)$ نیم دوگان بستار است که خودتوان و انعکاسی نیست.

لم ۵.۴. *فرض کنید ξ یک EQ-جبر مشبکه مرتب و $a \in E$ باشد و تابع $d_a : E \to E$ به طوری که برای هر $x \in E$، $d_a(x) = x \otimes a$ تعریف شود. آنگاه d_a، یک مشتق $(\otimes, \vee)$، نیم دوگان بستار روی E است.*

اثبات. داریم $d_a(x \otimes y) = (x \otimes y) \otimes a$. از طرفی

$$(d_a(x) \otimes y) \vee (x \otimes d_a(y)) = ((x \otimes a) \otimes y) \vee (x \otimes (y \otimes a)) = (x \otimes y) \otimes a$$

لذا خواهیم داشت:

$$d_a(x \otimes y) = (d_a(x) \otimes y) \vee (x \otimes d_a(y))$$

علاوه بر این، اگر $x \leq y$، آنگاه $d_a(x) = x \otimes a \leq y \otimes a = d_a(y)$ و بنا به $d_a(x) = x \otimes a \leq x$، بدست می آوریم d_a مشتق $(\otimes, \vee)$ نیم دوگان بستار است. □

قضیه ۶.۴. *فرض کنید $d : E \to E$ یک مشتق $(\otimes, \vee)$ روی EQ-جبر مشبکه مرتب ξ باشد. آنگاه برای هر $x, y \in E$، موارد زیر برقرارند:*

(i) *اگر ξ کراندار باشد، $d(\circ) = \circ$،*

(ii) $d(x) \geq x \otimes d(1)$. *بویژه* $d(1) = 1$ *ایجاب می‌کند* $d(x) \geq x$،

(iii) *برای هر* $n \geq 1$، $d(x^n) = x^{n-1} \otimes d(x)$،

(iv) $d(x \otimes y) \leq d(x) \vee d(y)$.

اثبات. (i) داریم:

$$\begin{aligned} d(0) &= d(0 \otimes 0) \\ &= (d(0) \otimes 0) \vee (0 \otimes d(0)) \\ &= 0 \vee 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

(ii) با استفاده $d(x) = d(x \otimes 1) = (d(x) \otimes 1) \vee (x \otimes d(1))$،
خواهیم داشت $d(x) \geq x \otimes d(1)$.
(iii) داریم:

$$\begin{aligned} d(x^2) &= d(x \otimes x) \\ &= (d(x) \otimes x) \vee (x \otimes d(x)) \\ &= d(x) \otimes x. \end{aligned}$$

بنابراین با استفاده از استقرا برای هر $n \geq 1$ بدست می آوریم $d(x^n) = x^{n-1} \otimes d(x)$.
(iv) چون $d(x) \otimes y \leq d(x)$ و $x \otimes d(y) \leq d(y)$، درنتیجه

$$d(x \otimes y) = (d(x) \otimes y) \vee (x \otimes d(y)) \leq d(x) \vee d(y).$$

□

از قضیه ۳-۲ و قضیه ۴-۶ قسمت (i) نتیجه زیر حاصل می شود.

نتیجه ۷.۴. *اگر $d : E \to E$ یک مشتق $(\otimes, \vee)$ روی EQ-جبر مشبکه مرتب کراندار $\mathcal{E}$ باشد، آنگاه d یک مشتق $(\otimes, \sim)$ نیست.*

قضیه ۸.۴. *فرض کنید $d : E \to E$ یک مشتق $(\otimes, \vee)$ روی EQ-جبر مشبکه مرتب $\mathcal{E}$ باشد، به طوری که برای هر $x \in E$، $d(x) \leq x$. آنگاه برای هر $x, y \in E$، موارد زیر*

برقرارند:

(i) $d(x) \otimes d(y) \leq d(x \otimes y)$،

(ii) $d(x) \to d(y) \leq d(x) \to y$،

(iii) *اگر* $d(۱) = ۱$، *آنگاه* d *یک مشتق همانی است.*

اثبات. (i) چون برای هر $x \in E$، $d(x) \leq x$، لذا خواهیم داشت:
$d(x) \otimes d(y) \leq x \otimes d(y)$ و $d(x) \otimes d(y) \leq d(x) \otimes y$. در نتیجه

$$d(x) \otimes d(y) \leq (x \otimes d(y)) \vee (d(x) \otimes y) = d(x \otimes y).$$

(ii) طبق فرض و $(e_۹)$ اثبات واضح است.

(iii) فرض کنید $d(۱) = ۱$ باشد. آنگاه با استفاده از قضیه ۴-۶ قسمت (ii)، برای هر $x \in E$، خواهیم داشت $d(x) = x$. در نتیجه d مشتق همانی است. □

قضیه ۹.۴. *فرض کنید* $d : E \to E$ *یک مشتق* $(\otimes, \vee)$ *نیم دوگان بستار و خودتوان روی* EQ*-جبر مشبکه مرتب* ξ *باشد. آنگاه برای هر* $x, y \in E$*، شرایط زیر برقرارند:*

(a) $d(x) = x \otimes d(۱)$،

(b) $d(x \otimes y) = d(x) \otimes d(y)$،

(c) $d(d(x)) = d(x)$،

(d) $d(x) \leq y$ *اگر و تنها اگر* $d(x) \leq d(y)$،

(e) $d(d(x) \wedge d(y)) = d(d(x) \wedge y) = d(x \wedge d(y)) = d(x \wedge y)$.

اثبات. (a) داریم $x \leq ۱$، پس $d(x) \leq d(۱)$. بنابراین
$d(x) = d(x) \otimes d(x) \leq x \otimes d(۱)$ و طبق قضیه ۶.۴ قسمت (ii)، خواهیم داشت:
$d(x) = x \otimes d(۱)$.

(b) با استفاده از قسمت (a)، داریم:

$$\begin{aligned} d(x \otimes y) &= d(۱) \otimes (x \otimes y) \\ &= d(۱) \otimes d(۱) \otimes (x \otimes y) \\ &= (d(۱) \otimes x) \otimes (d(۱) \otimes y) \\ &= d(x) \otimes d(y). \end{aligned}$$

(c) به کمک قسمت های (a) و (b) داریم:

$$\begin{aligned} d(d(x)) &= d(۱) \otimes d(x) \\ &= d(۱ \otimes x) \\ &= d(x). \end{aligned}$$

(d) فرض کنید $d(x) \leq y$. آنگاه طبق قسمت (c) و بنا به فرض داریم

$$d(x) = d(d(x)) \leq d(y).$$

برعکس، فرض کنید $d(x) \leq d(y)$. آنگاه چون $d(y) \leq y$، در نتیجه $d(x) \leq y$.
(e) چون $d(y) \leq y$، لذا $x \wedge d(y) \leq x \wedge y$. درنتیجه $d(x \wedge d(y)) \leq d(x \wedge y)$. از طرفی، چون d یکنوا است، خواهیم داشت:
$d(x \wedge y) \leq d(x) \leq x$ و $d(x \wedge y) \leq d(y)$، پس $d(x \wedge y) \leq x \wedge d(y)$. بنابراین $d(x \wedge y) = d(d(x \wedge y)) \leq d(x \wedge d(y))$، در نتیجه $d(x \wedge y) = d(x \wedge d(y))$. لذا $d(x \wedge d(y)) = d(d(x) \wedge d(y))$.
اثبات $d(x \wedge y) = d(d(x) \wedge y)$ نیز به طور مشابه انجام می شود. در نتیجه داریم:

$$d(d(x) \wedge d(y)) = d(d(y) \wedge x) = d(d(x) \wedge y) = d(x \wedge y).$$

$\square$

قضیه ۱۰.۴. *فرض کنید d، d_1 و d_2 مشتق های $(\otimes, \vee)$ روی EQ-جبر مشبکه مرتب $\mathcal{E}$ باشند:*

(i) اگر d یک مشتق $(\otimes, \vee)$ نیم دوگان بستار باشد، آنگاه برای هر $x, y \in Fix_d(E)$، $x \vee y$ و $x \otimes y \in Fix_d(E)$.

(ii) اگر d_1 و d_2 مشتق های $(\otimes, \vee)$ نیم دوگان بستار و خودتوان روی E باشند، آنگاه $d_1 = d_2$ اگر و تنها اگر $Fix_{d_1}(E) = Fix_{d_2}(E)$.

اثبات. (i) با استفاده از قضیه ۴-۸ و چون برای هر $x, y \in Fix_d(E)$، داریم $d(x) = x$ و $d(y) = y$، لذا خواهیم داشت:

$$x \otimes y = d(x) \otimes d(y) \leq d(x \otimes y) \leq x \otimes y.$$

بنابراین $d(x \otimes y) = x \otimes y$، پس $x \otimes y \in Fix_d(E)$. همچنین، داریم $x, y \leq x \vee y$، آنگاه $d(x), d(y) \leq d(x \vee y)$، بنابراین $x \vee y = d(x) \vee d(y) \leq d(x \vee y) \leq x \vee y$، در نتیجه $d(x \vee y) = x \vee y$. لذا $x \vee y \in Fix_d(E)$.

(ii) فرض کنید $Fix_{d_1}(E) = Fix_{d_2}(E)$. طبق قضیه ۴-۹ برای هر $x \in E$، داریم $d_1(d_1(x)) = d_1(x)$. بنابراین $d_1(x) \in Fix_{d_1}(E) = Fix_{d_2}(E)$، در نتیجه

$d_1(x) \in Fix_{d_2}(E)$، پس برای هر $x \in E$، داریم $d_2(d_1(x)) = d_1(x)$. به طور مشابه داریم $d_1(d_2(x)) = d_2(x)$. اکنون طبق $d_2(x) \leq x$،بدست می آوریم

$d_1(d_2(x)) \leq d_1(x) = d_2(d_1(x))$. به طور مشابه می توان اثبات کرد برای هر $x \in E$، رابطه $d_2(d_1(x)) = d_1(d_2(x))$ برقرار است. در نتیجه برای هر $x \in E$، خواهیم داشت: $d_1(x) = d_2(d_1(x)) = d_1(d_2(x)) = d_2(x)$. لذا $d_1 = d_2$. $\square$

لم زیر در اثبات قضیه ۴-۱۲ استفاده می شود.

لم ۱۱.۴. *فرض کنید ξ یک EQ-جبر باشد، برای هر $a, b, c \in E$، $a \sim b = 1$ ایجاب می‌کند $a \sim c = b \sim c$.*

اثبات. به کمک (e_1) و (e_3) و همچنین طبق فرض داریم $(a \sim b) \otimes (b \sim c) \leq a \sim c$، پس $b \sim c \leq a \sim c$. از طرفی $(c \sim a) \otimes (a \sim b) \leq c \sim b$، بنابراین $a \sim c \leq b \sim c$. در نتیجه $a \sim c = b \sim c$. □

در قضیه زیر نشان می دهیم که $Fix_d(E)$، یک EQ-جبر مشبکه مرتب است.

قضیه ۱۲.۴. *فرض کنید $d : E \to E$ یک مشتق $(\otimes, \vee)$ نیم دوگان بستار، خودتوان و انعکاسی روی EQ-جبر مشبکه مرتب ξ باشد. آنگاه $(Fix_d(E), \wedge_*, \otimes_*, \sim_*, 1_*)$ یک EQ-جبر مشبکه مرتب است، به طوری که برای هر $x, y \in Fix_d(E)$، $x \wedge_* y = d(x \wedge y)$، $x \otimes_* y = d(x \otimes y)$، $x \sim_* y = d(x \sim y)$ و $1_* = d(1)$ تعریف شوند.*

اثبات. $(E1)_*$: واضح است که $Fix_d(E)$ تحت اعمال $\wedge_*, \otimes_*, \sim_*, \vee_*, 1_*$ بسته است. اکنون نشان می دهیم $(Fix_d(E), \wedge_*, \vee_*, 1_*)$ یک مشبکه با بزرگترین عضو 1_*است. برای هر $x, y \in Fix_d(E)$، داریم $d(x \wedge y) \leq d(y) \leq y$ و $d(x \wedge y) \leq d(x) \leq x$. بنابراین $x \wedge_* y = d(x \wedge y)$ یک کران پایین برای $x, y \in Fix_d(E)$ است. فرض کنید $z \in Fix_d(E)$ کران پایین دیگری برای $x, y \in Fix_d(E)$ باشد، لذا با استفاده از $z \leq x \wedge y$، داریم $z = d(z) \leq d(x \wedge y) = x \wedge_* y$. آنگاه $d(x \wedge y) = x \wedge_* y$ اینفیمم برای $x, y \in Fix_d(E)$ می شود. اکنون، فرض کنید $x \in Fix_d(E)$، چون $x \leq 1$ پس $x = d(x) \leq d(1) = 1_*$ و بنابراین 1_* بزرگترین عضو در $Fix_d(E)$ است.

$(E۲)_*$: طبق قضیه ۴-۹، برای هر $x \in Fix_d(E)$، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} x \otimes_* ۱_* &= d(x) \otimes_* d(۱) \\ &= d(d(x) \otimes d(۱)) \\ &= d(d(x \otimes ۱)) \\ &= d(d(x)) \\ &= d(x) \\ &= x. \end{aligned}$$

اکنون برای هر $x, y, z \in Fix_d(E)$، فرض کنید $x \leq y$ باشد. آنگاه $x \otimes z \leq y \otimes z$. بنابراین داریم $x \otimes_* z = d(x \otimes z) = d(x) \otimes d(z) \leq d(y) \otimes d(z) = d(y \otimes z) = z \otimes_* y$. درنتیجه $\otimes_*$ تحت $\leq$ یکنوا است. همچنین به راحتی دیده می شود که$\otimes_*$ جابجایی است.

$(E۳)_*$: برای هر $a \in Fix_d(E)$، داریم: $a \sim_* a = d(a \sim a) = d(۱) = ۱_*$.

$(E۴)_*$: با استفاده از قضیه ۴-۹، لم ۴-۱۱ و $(E_۴)$، برای هر $a, b, c, t \in Fix_d(E)$ داریم:

$$\begin{aligned} ((a \wedge_* b) \sim_* c) \otimes_* (t \sim_* a) &= d(d(a \wedge b) \sim c) \otimes_* d(t \sim a) \\ &= d(d(d(a \wedge b) \sim c) \otimes d(t \sim a)) \\ &= d(d(d((a \wedge b) \sim c) \otimes (t \sim a)))) \\ &= d(d(a \wedge b) \sim c) \otimes (t \sim a)) \\ &= d((a \wedge b) \sim c) \otimes (t \sim a)) \\ &\leq d((t \wedge b) \sim c) \\ &= d(d(t \wedge b) \sim c) \\ &= d((t \wedge_* b) \sim c) \\ &= (t \wedge_* b) \sim_* c. \end{aligned}$$

$(E۵)_*$: با استفاده از قضیه ۴-۹، لم ۴-۱۱ و $(E_۵)$، برای هر $a, b, c, t \in Fix_d(E)$ داریم:

$$\begin{aligned}
(a \sim_* b) \otimes_* (c \sim_* t) &= d(d(a \sim b) \otimes d(c \sim t)) \\
&= d(d(a \sim b)) \otimes d(d(c \sim t)) \\
&= d(a \sim b)) \otimes d(c \sim t) \\
&= d((a \sim b) \otimes (c \sim t)) \\
&\leq d((a \sim c) \sim (b \sim t)) \\
&= ((a \sim c) \sim (b \sim t)) \otimes d(۱) \\
&= (d(a \sim c) \sim (b \sim t)) \otimes d(۱) \\
&= (d(a \sim c) \sim d(b \sim t)) \otimes d(۱) \\
&= d(d(a \sim c) \sim d(b \sim t)) \\
&= (a \sim_* c) \sim_* (b \sim_* t).
\end{aligned}$$

$(E۶)_*$: برای هر $a, b, c \in Fix_d(E)$ داریم: $a \wedge b \wedge c \leq a \wedge b \leq a$، پس $d(a \wedge b \wedge c) \leq d(a \wedge b) \leq d(a)$. بنابراین به کمک $(e_{۱۰})$، خواهیم داشت $d(a \wedge b \wedge c) \sim d(a) \leq d(a \wedge b) \sim d(a)$. اکنون، چون d یکنوا است، بنابراین

$$d(d(a \wedge b \wedge c) \sim d(a)) \leq d(d(a \wedge b) \sim d(a)).$$

از طرفی $a \in Fix_d(E)$، نتیجه می دهد $d(a) = a$، بنابراین $d(d(a \wedge b \wedge c) \sim a) \leq d(d(a \wedge b) \sim a)$، لذا $(a \wedge_* b \wedge_* c) \sim_* a \leq (a \wedge_* b) \sim_* a$.

$(E۷)_*$: با استفاده از $a \otimes b \leq a \sim b$، برای هر $a, b \in Fix_d(E)$، داریم:

$$a \otimes_* b = d(a \otimes b) \leq d(a \sim b) = a \sim_* b.$$

$\square$

مثال ۱۳.۴. مشتق d_1 در قسمت (ii) از مثال ۴-۴، در تمامی شرایط قضیه فوق صدق می کند و به راحتی مطابق قضیه فوق می توان نشان داد که $Fix_{d_1}(E) = \{0, a, b\}$، تشکیل یک EQ-جبر مشبکه مرتب می دهد.

۵ نتیجه‌گیری

در این مقاله، ابتدا به بررسی مشتق های $(\otimes, \square)$ که $\square \in \{\wedge, \sim, \rightarrow\}$، روی EQ-جبرها پرداخته شده و مشتق های $(\otimes, \sim)$ و $(\otimes, \rightarrow)$ به طور کامل مشخصه سازی شده اند و ارتباط آن ها با یکدیگر پیدا شده است. در ادامه با معرفی مشتق $(\otimes, \vee)$ روی EQ-جبرهای مشبکه مرتب خواصی از آن ها بدست آمده است و با مثال هایی نشان داده شده که یک مشتق $(\otimes, \vee)$ لزوما مشتق $(\otimes, \wedge)$ نیست و بالعکس. همچنین در پایان شرایطی یافت شده که تحت آن مجموعه ی نقاط ثابت در مشتق های $(\otimes, \vee)$ روی EQ-جبرهای مشبکه مرتب، تشکیل یک EQ-جبر مشبکه مرتب می دهد. امید است که بتوان در تحقیقات آینده شرایطی پیدا کرد که ارتباط بین یک مشتق های $(\otimes, \vee)$و $(\otimes, \wedge)$ را بدست آورد. از دیگر اهداف موردنظر در تحقیقات پیش رو می تواند بررسی عکس بعضی از قضایا و همچنین پیدا کردن ارتباط بین مشتق های انعکاسی، خودتوانی و نیم دوگان بستار باشد.

تشکر و قدردانی

نویسندگان مایلند از داوران محترم برای نظرات و پیشنهادات سازنده خود که به طور قابل توجهی مقاله را بهبود بخشیده است؛ تشکر کنند.

مراجع

[1] T. Blyth (2005) Lattices and ordered algebraic structures. Springer, London.

[2] Y. Ceven, M. A. Ozturk (2008) On F-derivations of lattices. Bull. Korean Math. Soc 45(4):701-707.

[3] C.C. Chang (1958) Algebraic analysis of many valued logics. Trans Am Math Soc 88:467-490.

[4] M. El-Zekey (2010) Representable good EQ- Algebras. Soft Computing 14:1011-1023.

[5] M. El-Zekey, V. Novak and R. Mesiar (2011) On good EQ-algebras. Fuzzy Sets and Systems 178:1-23

[6] F. Esteva, L. Godo (2001) Monoidal t-norm based logic: towards a logic for left – continuous t-norms. Fuzzy Sets and Systems 124:271-288.

[7] L. Ferrari (2001) On derivations of lattices. Pure Math. Appl 12:365-382.

[8] J. A. Goguen (1968-69) The logic of inexact concepts. Synthese 19:325-373.

[9] Sh. Ghorbani, L. Torkzadeh, S. Motamed (2013) $(\odot, \oplus)$-Derivations and $(\ominus, \odot)$-Derivations on MV-algebras. Iranian Journal of Mathematical sciences and informatics 8:75-90.

[10] P. Hajek (1998) Metamathematics of fuzzy logic, Kluwer, Dordrecht.

[11] P.He, X. Xin, J. Zhan (2016) On derivations and their fixed point sets in residuated lattices. Fuzzy Sets and Systems 303:97-113.

[12] Y. B. Jun, X. L. Xin (2004) On derivations of BCI-algebra. Inform. Sci 159:167-176.

[13] J. Liang, X. L. Xin and J. T. Wang (2018) On derivations of EQ-algebras. Journal of Intelligent , Fuzzy Systems 35:5573–5583.

[14] V. Novak (2006) EQ-algebras: primary concepts and properties, in: proc. Czech-Japan Seminar, Ninth Meeting. Kitakyushu and Nagasaki, Graduate school of information, Waseda university:18-22.

[15] V. Novak (2011) EQ-algebra-based fuzzy type theory and its extensions. Logic journal of the IGPL 19:512-542.

[16] V. Navak (2005) On fuzzy type theory. Fuzzy Sets and Systems 149:235-273.

[17] V. Novak, B. De Baets (2009) EQ-algebra. Fuzzy Sets and Systems 160:2956-2978.

[18] E. Posner (1957) Derivations in prime rings. Proc. Amer. Math. Soc. 8:1093-1100.

[19] G. Szaasz (1975) Derivations of lattices. Acta sci. Math. (Szeged) 37:149-154.

[20] E. Turunen (1999) Mathematics Behind Fuzzy Logic. Physica-Verlag. Heidelberg.

[21] X. L. Xin, P. F. He, Y. W. Yang (2014) Characterizations of some Fuzzy Prefilters(Filters) in EQ-algebras. The Scientific World. Journal. doi.org/10.1155/2014/829527.

[22] X. L. Xin, T. Y. Li, J. H. Lu (2008) On derivations of lattices. Inform. Sci 178:307-316.

[23] L. A. Zadeh (2008) Is there a need for fuzzy logic? Inform Science 178:2751-2779.