سیستم‌های فازی و کاربردها
سال ششم، شماره اول (بهار و تابستان ۱۴۰۲)
صص. ۱۲۷ تا ۱۴۹
شاپای چاپی: ۲۷۱۷-۴۴۰۹
شاپای الکترونیکی: ۲۷۱۷-۳۹۸۴
DOI:10.22034/JFSA.2023.385320.1160

استنباط آماری رگرسیون وزنی فازی بر مبنی رویکرد بوت استرپ

جلال چاچی*، **محمدرضا آخوند و خیراله هندالی**

گروه آمار، دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه شهید چمران اهواز، اهواز، ایران

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۱۱/۲۰ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۰۳/۰۵
نوع مقاله: علمی-پژوهشی

چکیده

در این مقاله به معرفی و انجام آزمون فرض و فاصله اطمینان برای ضرایب فازی در مدل رگرسیون وزنی فازی با ورودی‌های دقیق و خروجی‌های فازی پرداخته می‌شود. با اعمال روش برآوردیابی وزنی در برآورد ضرایب و به‌کارگیری فرضیه‌های فازی متعارف در محیط فازی، سعی می‌کنیم بر اساس روش بوت استرپ به تعیین توزیع برآوردگرهای موجود بپردازیم، تا بر این مبنا برای پذیرش یا رد فرضیه‌های موجود تصمیم‌گیری کنیم. بنابر این، ابتدا آماره‌های آزمون مورد نیاز بر مبنای روش بوت استرپ محاسبه (یا تکرار) می‌شوند. سپس، با مقایسه مقدار احتمال و سطح معنی‌داری داده شده، همانند روش کلاسیک، فرض صفر پذیرش یا رد شود. همچنین از منظری دیگر، به آزمون فرض بر اساس فواصل اطمینان بوت استرپ ساخته شده نیز پرداخته می شود. در انتها با تحلیل یک مثال کاربردی با داده‌های واقعی در مسکن، رویکرد مورد بررسی در آزمون فرض و فاصله اطمینان برای ضرایب مدل رگرسیون وزنی فازی مورد تحلیل قرار گرفته است.

عبارات و کلمات کلیدی: آزمون فرض، بوت استرپ، فواصل اطمینان، رگرسیون وزنی فازی.

Email(s): jalal.chachi@scu.ac.ir, m.akhond@scu.ac.ir and Kh.handali@scu.ac.ir.

Mathematics Subject Classification: 68U35; 68T20

۱ مقدمه و کلیات مدل‌های رگرسیون فازی

آزمون فرض و فاصله اطمینان دو موضوع کلیدی بسیار مهم و مورد توجه در استنباط آماری هستند. اما استنباط آماری در مدلهای رگرسیون فازی کمتر مورد توجه قرار گرفته است. یکی از دلایل عدم توجه کافی به استنباط آماری در مدلهای رگرسیون فازی را می‌توان عدم وجود پیش‌فرض‌هایی برای اینگونه مدلها دانست. به عبارتی در اینگونه مدل‌ها فرضیات زیربنایی مشابه آنچه که در مدل‌های رگرسیون کلاسیک وجود دارد، در نظر گرفته نمی‌شود. البته باید توجه نمود که یکی از شرایط و دلایل استفاده از مدلهای رگرسیون فازی این است که در اینجا فرضیه‌های زیربنایی مدل‌های رگرسیون کلاسیک برقرار نیست و/یا داده‌ها به صورت فازی ثبت شده‌اند [۱]. بنابراین، پس از معرفی رگرسیون فازی توسط تاناکا و همکاران [۲۹، ۲۸]، رویکردهای زیاد و متنوعی در مدل‌های رگرسیون فازی، به منظور برآورد بهتر و دقیق‌تر پارامترها، ارایه و مورد بررسی و تحلیل قرار گیرد [۱۰]. این تنوع مدل‌ها و رویکردها را به طور عمده می‌توان به دو رده اصلی زیر دسته‌بندی نمود:

۱. تنوع در ساختاربندی و فرمول مدل با توجه به فازی بودن یا نبودن پارامترها و/یا فازی بودن یا نبودن متغیرهای مدل،

۲. نحوه ساختاربندی مدل در چارچوب مدل‌های رگرسیون امکانی و/یا مدل‌های رگرسیون کمترین مربعات خطا، و یا ترکیبی از این دو ساختار.

۳. نحوه برآوردیابی پارامترهای مدل بر اساس رویکردهای متنوع.

۱.۱ ساختارهای متنوع مدل‌های رگرسیون فازی

در حالت کلی، یک مدل رگرسیون فازی به صورت زیر

$$\widetilde{y} = \widetilde{f_\beta(x)} \qquad (۱)$$

برای مدل‌سازی متغیرهای خروجی-فازی ($\widetilde{y}$) و k متغیر ورودی-دقیق/فازی ($\widetilde{x}/x$) و پارامترهای دقیق/فازی ($\widetilde{\beta}/\beta$) تعریف می‌شود [۳، ۱۰]. مدل (۱) را می‌توان در حالات

متنوع زیر (ولی نه فقط محدود به آنها) مورد بررسی و تحلیل قرار داد:

۱. مدل با ورودی‌های-دقیق (x)، خروجی-فازی ($\widetilde{y}$) و پارامترهای فازی $\widetilde{\beta}$ به‌صورت زیر:

$$\widetilde{f_\beta(x)} = \widetilde{\beta}_0 \oplus (\widetilde{\beta}_1 \otimes x_1) \oplus \ldots \oplus (\widetilde{\beta}_k \otimes x_k).$$

۲. مدل با ورودی‌های-فازی ($\widetilde{x}$)، خروجی-فازی ($\widetilde{y}$) و پارامترهای دقیق β به‌صورت زیر:

$$\widetilde{f_\beta(x)} = \beta_0 \oplus (\beta_1 \otimes \widetilde{x}_1) \oplus \ldots \oplus (\beta_k \otimes \widetilde{x}_k).$$

۳. مدل با ورودی‌های-دقیق (x)، خروجی-فازی ($\widetilde{y}$)، و با در نظر گرفتن جمله خطای فازی ($\widetilde{\epsilon}$) که به صورت زیر نوشته می شود:

$$\widetilde{f_\beta(x)} = \beta_0 \oplus (\beta_1 \otimes x_1) \oplus \ldots \oplus (\beta_k \otimes x_k) \oplus \widetilde{\epsilon}.$$

۴. مدل با ورودی‌های-دقیق (x) و خروجی-فازی ($\widetilde{y}$) که در آن فقط پارامتر عرض از مبدا فازی است و بقیه پارامترها دقیق هستند. این مدل به صورت زیر در نظر گرفته می شود:

$$\widetilde{f_\beta(x)} = \widetilde{\beta}_0 \oplus (\beta_1 \otimes x_1) \oplus \ldots \oplus (\beta_k \otimes x_k).$$

۵. مدل با ورودی‌های-فازی ($\widetilde{x}$) خروجی-فازی ($\widetilde{y}$) و پارامترهای فازی $\widetilde{\beta}$ به‌صورت زیر:

$$\widetilde{f_\beta(x)} = \widetilde{\beta}_0 \oplus (\widetilde{\beta}_1 \otimes \widetilde{x}_1) \oplus \ldots \oplus (\widetilde{\beta}_k \otimes \widetilde{x}_k).$$

ملاحظه ۱.۱. برخی از رویکردهای امکانی در مدل‌بندی رگرسیون فازی معرفی شده‌اند که

در آنها خروجی مقادیر دقیق دارند و دیگر کمیتها از قبیل ورودی‌ها و/یا پارامترهای مدل می‌تواند با توجه به ماهیت و ساختار مساله به صورت دقیق و/یا فازی اختیار می‌شود [۲۸، ۲۹].

۲.۱ تنوع روش‌های برآوردیابی مدل‌های رگرسیون فازی

تا کنون روش‌ها و رویکردهای مختلف و متنوعی در برآوردیابی پارامترهای مدل‌های رگرسیون فازی ارایه شده است [۱۰]. این تنوع در روش‌ها را می‌توان به صورت زیر دسته‌بندی نمود:

۱. رویکردهای امکانی [۲۹، ۲۸]،

۲. رویکردهای مبتنی بر شیوه کمترین مربعات خطا [۶، ۱۱] و کمترین قدرمطلق انحرافات [۷، ۸، ۹، ۲۰، ۲۱، ۲۲] (توجه کنید که هر دو رویکرد بر مبنای نوع متر استفاده شده در تعیین خطاهای مدل و نحوه برآوردیابی پارامترها از تنوع زیادی برخوردار هستند [۴]).

۳. رویکردهای تلفیقی [۱۲، ۲۳، ۲۴، ۲۵، ۲۶].

۳.۱ تاریخچه‌ای از مطالعات رگرسیون فازی

طی دهه‌های گذشته، مطالعات بسیاری به مدل‌سازی رگرسیون فازی اختصاص یافته است [۱۰]. همانگونه که در بالا اشاره شد، به طور کلی، دو روش اصلی برای تحلیل رگرسیون فازی وجود دارد. رویکردهای امکانی که اغلب بر مبنای نظریه امکان فرمولبندی می‌شوند [۲۹، ۲۸]، و رویکردهای موسوم به کمترین مربعات خطا یا کمترین قدر مطلق انحرافات که اغلب بر مبنای استفاده از یک تعریف مناسب برای تعریف خطاها یا انحرافات فرمولبندی می‌شوند [۶، ۱۱]. در اینگونه روشها متناسب با تعریف فاصله مربوطه و دیگر مفاهیم مربوط به نظریه مجموعه‌های فازی، روشهای متعددی در رگرسیون فازی معرفی و بکار برده شده است. به عنوان نمونه، چاچی [۷] یک مدل رگرسیون فازی کمترین مربعات وزنی را برای داده‌های وردی دقیق و خروجی فازی معرفی کرد (همچنین رجوع شود به [۱۴، ۲۷]). حسامیان و اکبری [۱۷] یک مدل رگرسیون جزئی-نیمه پارامتری با

داده‌های ورودی دقیق و ورودی شهودی معرفی نموند. حسامیان و اکبری [۱۸] یک روش استوار با ضرایب متغیر را در مدل‌سازی رگرسیون فازی معرفی کردند. حسامیان و اکبری [۱۹] یک مدل رگرسیون قطعه‌ای فازی را برای داده‌های ورودی دقیق و خروجی فازی معرفی نمودند. خمار و همکاران [۲۴، ۲۵، ۲۶] مدلهایی از رگرسیون فازی کمترین مربعات استوار را بر پایه استفاده از توابع کرنل معرفی نمودند. حسامیان و اکبری [۲۱] یک مدل رگرسیون جمعی فازی را برای داده‌های ورودی دقیق و خروجی فازی معرفی کردند. عارفی [۵] یک مدل رگرسیون فازی چندکی را برای داده‌های فازی و پارامترهای فازی معرفی نمود.

۴.۱ انگیزه و بیان مطالب

همانگونه که در بالا بیان شد، تنوع مدل‌های شمرده شده در دو بخش بالا بسیار زیاد است. بنابراین می‌توان مدل‌های رگرسیون فازی متعددی از جهات مختلف در نظر گرفت (رجوع کنید به مطالعه مروری چخوروا و جوهانسون [۱۰]). این تنوع در گستردگی مدل‌ها، نیازمند توجه بیشتر در استباط آماری آنهاست. لذا در این مقاله به مقوله‌ی برآوردیابی، آزمون فرض و فاصله اطمینان در مدل رگرسیون وزنی فازی با ورودی‌های دقیق و خروجی‌های فازی پرداخته می‌شود. بنابراین، ابتدا مدل رگرسیون وزنی فازی برای داده‌های ورودی-دقیق و خروجی-فازی بیان می‌شود [۳، ۷]. روش موجود بر مبنای یک معیار برازش وزنی است که در آن مقادیر بهینه پارامترها به همراه وزن‌های بهینه هر مشاهده بر اساس یک الگوریتم وزن-دهی تکرار شونده تعیین می‌شوند. لذا براوردگرهای به دست آمده دارای فرم بسته و مشخصی نمی‌باشند. بنابراین در چنین حالاتی خواص برآوردگرها و یا استنباط آماری درباره پارامترها از طریق روابط موجود قابل بررسی نمی‌باشد.

بنابراین هدف اصلی ما در این مقالع این سپس با تعریف فرضیه‌های مربوط به پارامترهای مدل رگرسیون وزنی فازی، روش بوت استرپ را برای آزمون چنین فرض‌هایی و همچنین ایجاد فواصل اطمینان به کار خواهیم برد. در اینجا، نتیجه‌گیری در مورد رد یا پذیرش فرض صفر به دو روش زیر مطرح می‌شود:

۱. با مقایسه‌ی مقدار-احتمال و یک سطح معنی‌داری مشخص، در مورد رد یا قبول

فرض صفر تصمیم‌گیری می‌شود.

۲. با استفاده از رابطه آزمون فرض و فواصل اطمینان تشکیل شده، در مورد رد یا قبول فرض صفر تصمیم‌گیری می‌شود.

در انتها، در یک مطالعه با داده‌های واقعی به برازش مدل رگرسیون وزنی فازی و بررسی روش پیشنهاد شده خواهیم پرداخت.

مطالب این مقاله به صورت زیر تدوین شده است. در بخش ۳، روش برآوردیابی مدل رگرسیون وزنی فازی بیان می‌شود. سپس به محاسبه فواصل اطمینان و انجام آزمون فرض در بخش ۴، پرداخته می‌شود. در بخش ۵، با استفاده از یک مثال کاربردی با داده‌های واقعی به تحلیل نتایج پرداخته می‌شود. در انتها و در بخش ۶ به بحث و نتیجه‌گیری پرداخته می‌شود.

۲ مفاهیم پایه و نمادها

در این مقاله فرض کنید مجموعه اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ مجموعه مرجع باشد. مجموعه فازی $\widetilde{A}$ از $\mathbb{R}$ با تابع عضویت $\widetilde{A}(x) : \mathbb{R} \to [۰, ۱]$ مشخص می‌شود [۳۱]. α-برش مجموعه فازی $\widetilde{A}$ برای هر $\alpha \in (۰, ۱]$ به صورت مجموعه معمولی $A_\alpha = \{x \in \mathbb{R} : \widetilde{A}(x) \geq \alpha\}$ تعریف می‌شود و $A_۰$ بستار مجموعه $\{x \in \mathbb{R} : \widetilde{A}(x) > ۰\}$ است. مجموعه فازی $\widetilde{A}$ از $\mathbb{R}$ را یک عدد فازی گوییم هرگاه برای هر $\alpha \in (۰, ۱]$ مجموعه‌های $A_\alpha = \{x \in \mathbb{R} : \widetilde{A}(x) \geq \alpha\}$ ناتهی، بسته و کراندار باشند. یک رده خاص از اعداد فازی در $\mathbb{R}$ اعداد فازی LR هستند [۳۲]. یک عدد فازی LR به‌صورت $\widetilde{N} = (n, l, r)_{LR}$ نشان داده می‌شود که در آن $n \in \mathbb{R}$ مرکز، $l \in \mathbb{R}^+$ و $r \in \mathbb{R}^+$ به ترتیب پهناهای چپ و راست عدد فازی و $L : \mathbb{R}^+ \to [۰, ۱]$ و $R : \mathbb{R}^+ \to [۰, ۱]$ به‌ترتیب توابع شکل نزولی چپ و راست، با شرط $L(۰) = R(۰) = ۱$ هستند. تابع

عضویت و α-برش عدد فازی $\widetilde{N}=(n,l,r)_{LR}$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\begin{aligned}\widetilde{N}(x) &= \begin{cases} L(\frac{n-x}{l}) & \text{if} \quad x \leq n, \\ R(\frac{x-n}{r}) & \text{if} \quad x \geq n. \end{cases} \\ N_\alpha &= [n-L^{-1}(\alpha)l, n+R^{-1}(\alpha)r], \quad \alpha \in [0,1]. \end{aligned}$$

نوع خاصی از اعداد فازی LR، اعداد فازی مثلثی هستند. تابع عضویت و α-برش عدد فازی مثلثی $\widetilde{N}=(n,l,r)_T$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\begin{aligned}\widetilde{N}(x) &= \begin{cases} \frac{x-(n-l)}{l} & \text{if} \quad x \in [n-l,n], \\ \frac{(n+r)-x}{r} & \text{if} \quad x \in (n,n+r]. \end{cases} \\ N_\alpha &= [n-(1-\alpha)l, n+(1-\alpha)r], \qquad \alpha \in [0,1]. \end{aligned}$$

عدد فازی $\widetilde{N}=(n,l,r)_{LR}$ با شرایط $L=R$ و $l=r=\lambda$ یک عدد فازی LR متقارن نامیده می‌شود و به‌صورت $\widetilde{N}=(n,\lambda)_L$ نشان داده می‌شود. فرض کنید $\widetilde{M}=(m,l_m,r_m)_{LR}$ و $\widetilde{N}=(n,l_n,r_n)_{LR}$ دو عدد فازی LR باشند و $\lambda \in \mathbb{R}-\{0\}$ یک عدد حقیقی باشد. در اینصورت حساب اعداد فازی به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\begin{aligned}\lambda \otimes \widetilde{M} &= \begin{cases} (\lambda m, \lambda l_m, \lambda r_m)_{LR} & \text{if} \quad \lambda > 0, \\ (\lambda m, |\lambda| r_m, |\lambda| l_m)_{RL} & \text{if} \quad \lambda < 0, \end{cases} \\ \widetilde{M} \oplus \widetilde{N} &= (m+n, l_m+l_n, r_m+r_n)_{LR}. \end{aligned}$$

۳ رگرسیون وزنی فازی

در این بخش، رگرسیون وزنی فازی برای مدل‌سازی داده‌های زیر

$$(\widetilde{y}_1, x_1), \ldots, (\widetilde{y}_n, x_n), \tag{2}$$

در حالت یک متغیره بیان می‌شود [۷]. در این داده‌ها $\widetilde{y}_i=(y_i,l_i,r_i)_{LR}$ و x_i به ترتیب i-امین مشاهدات متغیرهای خروجی-فازی و ورودی-دقیق هستند. به منظور اینکه پارامترهای مدل از قبیل پهناهای پارامترهای فازی مدل باید همواره نامنفی برآورد شوند، در برازش مدل رگرسیون وزنی فازی به مجموعه مشاهدات (۲)، ابتدا روابط زیر بین متغیرهای ورودی-خروجی در نظر گرفته می‌شوند

$$\begin{aligned}\vec{y}&=(y,g(l),g(r))\\&=\vec{\beta}_{\circ}\oplus(\vec{\beta}_{\backslash}\otimes x)\\&=(\beta_{\circ},\sigma_{\circ},\theta_{\circ})\oplus((\beta_{\backslash},\sigma_{\backslash},\theta_{\backslash})\otimes x)\\&=(\beta_{\circ}+\beta_{\backslash}x,\sigma_{\circ}+\sigma_{\backslash}x,\theta_{\circ}+\theta_{\backslash}x),\end{aligned}\tag{۳}$$

که در آن $g:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ تابعی معکوس‌پذیر است.

ملاحظه ۱.۳. با در نظر گرفتن تابع g در روابط بالا مقادیر پهنای برآورد شده برای متغیر خروجی فازی همواره نامنفی خواهد بود. فرارو [۱۶] نقش تابع g را در میزان بهبود برازش و عملکرد مدل‌های رگرسیون فازی مورد بررسی قرار داد. در این مقاله از تابع $\log$ برای بررسی نتایج و برازش مدل رگرسیون فازی استفاده می‌شود.

پس از برآورد بهینه پارامترهای $\vec{\beta}_{\circ}$ و $\vec{\beta}_{\backslash}$ و با توجه به معکوس‌پذیری تابع g، مدل رگرسیون فازی در برازش به مجموعه مشاهدات (۲) به صورت زیر حاصل می‌شود

$$\begin{aligned}\widetilde{y}&=(y,l,r)_{LR}\\&=(\beta_{\circ}+\beta_{\backslash}x,g^{-\backslash}\{\sigma_{\circ}+\sigma_{\backslash}x\},g^{-\backslash}\{\theta_{\circ}+\theta_{\backslash}x\})_{LR}.\end{aligned}$$

در ادامه پارامترهای $\vec{\beta}_{\circ}$ و $\vec{\beta}_{\backslash}$ بر اساس یک مساله بهینه‌سازی مبتنی بر تابعی وزنی از خطاها برآورد شوند. به منظور محاسبه خطاها، از فاصله زیر بین $\vec{A}=(a_{\backslash},a_{۲},a_{۳})\in\mathbb{R}^{۳}$ و $\vec{B}=(b_{\backslash},b_{۲},b_{۳})\in\mathbb{R}^{۳}$ استفاده می‌شود

$$\mathcal{D}(\vec{A},\vec{B})=\sqrt{(a_{\backslash}-b_{\backslash})^{۲}+(a_{۲}-b_{۲})^{۲}+(a_{۳}-b_{۳})^{۲}}.$$

قضیه ۲.۳. *در مدل‌سازی مجموعه مشاهدات (۲) مطابق مدل رگرسیون فازی (۳)، پارامترهای $\vec{\beta}_0$ و $\vec{\beta}_1$ از کمینه کردن تابع برازش وزنی زیر به‌دست می‌آیند*

$$E = \sum_{i=1}^{n} w_i e_i^2, \tag{۴}$$

که در آن w_i وزن مشاهده iام است و e_i^2 توان دوم خطای مشاهده iام، به‌صورت زیر است

$$\begin{aligned} e_i^2 &= \mathcal{D}^2\Big((y_i, g(l_i), g(r_i)), (\vec{\beta}_0 \oplus (\vec{\beta}_1 \otimes x_i)\Big) \\ &= \big(y_i - (\beta_0 + \beta_1 x_i)\big)^2 + \big(g(l_i) - (\sigma_0 + \sigma_1 x_i)\big)^2 + \\ &\qquad + \big(g(r_i) - (\theta_0 + \theta_1 x_i)\big)^2. \end{aligned}$$

برآورد بهینه پارامتر β در تابع برازش وزنی (۴) بر اساس یک الگوریتم وزن-دهی تکرار شونده به دست می‌آید [۷]، زیرا وزن‌ها وابسته به خطاها، خطاها وابسته به مقادیر پارامترهایی هستند که خود از تابع هدفی به‌دست می‌آیند که وابسته به وزن‌ها است ([۸، ۱۳]). گام‌های این الگوریتم به صورت زیر است:

گام ۰: با استفاده از وزن‌های اولیه زیر برای مشاهده iام، $i = 1, \ldots, n$،

$$\begin{aligned} w_i^0 &= \frac{1}{\max(h_{ii}, \frac{2}{n})}, \\ h_{ii} &= [\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}']_{ii} \end{aligned}$$

تابع هدف زیر را کمینه نمایید

$$\begin{aligned} E &= \sum_{i=1}^{n} w_i^0 e_i^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} w_i^0 \Big[\big(y_i - (\beta_0 + \beta_1 x_i)\big)^2 + \big(g(l_i) - (\sigma_0 + \sigma_1 x_i)\big)^2 + \\ &\qquad + \big(g(r_i) - (\theta_0 + \theta_1 x_i)\big)^2\Big]. \end{aligned}$$

جواب مساله بهینه‌سازی بالا را $\widehat{\vec{\boldsymbol{\beta}}}^{\circ} = [\widehat{\vec{\beta}}_{\circ}^{\circ}, \widehat{\vec{\beta}}_{۱}^{\circ}]$ قرار دهید.

گام t: برای تکرارهای $t = ۱, ۲, \ldots$ تا همگرایی مقادیر برآورد شده پارامترها، یعنی

$$\max\left\{\mathcal{D}\left(\widehat{\vec{\beta}}_{\circ}^{t}, \widehat{\vec{\beta}}_{\circ}^{t-۱}\right), \mathcal{D}\left(\widehat{\vec{\beta}}_{۱}^{t}, \widehat{\vec{\beta}}_{۱}^{t-۱}\right)\right\} < \epsilon$$

که در آن ϵ یک عدد مثبت کوچک است، مراحل زیر را انجام دهید:

۱. خطای مدل را بر اساس مقدار برآورد شده $\widehat{\vec{\boldsymbol{\beta}}}^{t-۱}$ در تکرار $t-۱$ به‌صورت زیر محاسبه نمایید

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}^{t-۱} &= [e_{۱}^{t-۱}, \ldots, e_{n}^{t-۱}], \\ e_{i}^{t-۱} &= \mathcal{D}\left((y_i, g(l_i), g(r_i)), \widehat{\vec{\beta}}_{\circ}^{t-۱} \oplus (\widehat{\vec{\beta}}_{۱}^{t-۱} \otimes x_i)\right), \end{aligned}$$

۲. وزن‌های جدید زیر را محاسبه نمایید

$$w_i^t = \frac{(۱-h_{ii})^{۲}}{\max\left\{e_i^{t-۱}, \text{Median}\{e_{۱}^{t-۱}, \ldots, e_{n}^{t-۱}\}\right\}}, \qquad i = ۱, \ldots, n,$$

۳. تابع هدف زیر را کمینه نمایید

$$\begin{aligned} E &= \sum_{i=۱}^{n} w_i^t e_i^{۲} \\ &= \sum_{i=۱}^{n} w_i^t \Big[\big(y_i - (\beta_{\circ} + \beta_{۱} x_i)\big)^{۲} + \big(g(l_i) - (\sigma_{\circ} + \sigma_{۱} x_i)\big)^{۲} + \\ &\qquad + \big(g(r_i) - (\theta_{\circ} + \theta_{۱} x_i)\big)^{۲}\Big]. \end{aligned}$$

جواب مساله بهینه‌سازی بالا را $\widehat{\vec{\boldsymbol{\beta}}}^{t} = \left[\widehat{\vec{\beta}}_{\circ}^{t}, \widehat{\vec{\beta}}_{۱}^{t}\right]$ قرار دهید.

در نهایت پس از خاتمه الگوریتم بالا، مدل رگرسیون وزنی فازی به صورت زیر نوشته

می‌شود

$$\widehat{\widetilde{y}} = \left(\widehat{\beta}_0 + \widehat{\beta}_1 x, g^{-1}\left\{\widehat{\sigma}_0 + \widehat{\sigma}_1 x\right\}, g^{-1}\{\widehat{\theta}_0 + \widehat{\theta}_1 x\}\right)_{LR}.$$

۴ استنباط آماری ضرایب رگرسیون وزنی فازی

در این بخش، آزمون فرض و فاصله اطمینان بوت استرپی برای ضرایب رگرسیون وزنی فازی مورد بررسی قرار می‌گیرد. در ادامه تحلیل مربوطه با استفاده از روش بوت استرپ بر پایه باز نمونه‌گیری از مشاهدات صورت می‌پذیرد [۱۵]. روش بوت استرپ موردها اغلب در مسائل با داده‌های چندمتغیره اتفاق می افتد. در این حالت فرض می‌شود داده‌های چند متغیره به صورت زیر باشد

$$\Delta_{n\times(k+2)} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{z}_i \\ \vdots \\ \mathbf{z}_n \end{bmatrix}_{n\times(k+2)} = \begin{bmatrix} y_1 & 1 & x_{11} & \dots & x_{1k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_i & 1 & x_{i1} & \dots & x_{ik} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_n & 1 & x_{n1} & \dots & x_{nk} \end{bmatrix}_{n\times(k+2)}$$

ابتدا به برآورد مدل رگرسیون وزنی فازی می‌پردازیم، یعنی الگوریتم قضیه ۲.۳ برای داده‌های اصلی $\Delta_{n\times(k+2)}$ اجرا شود و برآورد ضرایب را به صورت زیر ثبت کنید

$$\left(\widehat{\vec{\boldsymbol{\beta}}}_0^{(0)}, \widehat{\vec{\boldsymbol{\beta}}}_1^{(0)}\right).$$

اکنون در روش بوت استرپ موردها، گام‌های زیر را به تعداد $b = 1, 2, \dots, B$ اجرا کنید:

۱. نمونه بوت استرپ

$$\Delta^*_{n\times(k+2)} = [\mathbf{z}^*_1, \mathbf{z}^*_2, \dots, \mathbf{z}^*_n]^T_{n\times(k+2)}$$

را باجایگذاری از نمونه اصلی $[\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \ldots, \mathbf{z}_n]^T_{n\times(k+2)}$ انتخاب کنید.

۲. براساس نمونه بوت استرپ $\Delta^*_{n\times(k+2)}$ الگوریتم قضیه ۲.۳ اجرا شود و برآوردها را به صورت زیر ثبت کنید

$$\left(\widehat{\vec{\boldsymbol{\beta}}}_0^{(b)}, \widehat{\vec{\boldsymbol{\beta}}}_1^{(b)}\right) = \left((\beta_0^{(b)}, \sigma_0^{(b)}, \theta_0^{(b)}), (\beta_1^{(b)}, \sigma_1^{(b)}, \theta_1^{(b)})\right).$$

۱.۴ فاصله اطمینان بوت استرپی

در این بخش هدف این است که برآوردهای فاصله اطمینان $100(1-\alpha)$ را برای پارامترهای

$$\left(\vec{\boldsymbol{\beta}}_0, \vec{\boldsymbol{\beta}}_1\right) = \left((\beta_0, \sigma_0, \theta_0), (\beta_1, \sigma_1, \theta_1)\right),$$

بر اساس دنباله برآوردهای بوت استرپی

$$\left(\widehat{\vec{\boldsymbol{\beta}}}_0^{(0)}, \widehat{\vec{\boldsymbol{\beta}}}_1^{(0)}\right),\ \left(\widehat{\vec{\boldsymbol{\beta}}}_0^{(1)}, \widehat{\vec{\boldsymbol{\beta}}}_1^{(1)}\right), \ldots\ \left(\widehat{\vec{\boldsymbol{\beta}}}_0^{(b)}, \widehat{\vec{\boldsymbol{\beta}}}_1^{(b)}\right), \ldots, \left(\widehat{\vec{\boldsymbol{\beta}}}_0^{(B)}, \widehat{\vec{\boldsymbol{\beta}}}_1^{(B)}\right).$$

تعیین کنیم. بر این اساس دنباله‌های برآوردهای بوت استرپی

$$\left\{\widehat{\beta}_j^{(b)}\right\}_{b=1}^{B},\ \left\{\widehat{\sigma}_j^{(b)}\right\}_{b=1}^{B},\ \left\{\widehat{\theta}_j^{(b)}\right\}_{b=1}^{B}, \qquad j = 0, 1.$$

به ترتیب به تعیین توزیع تجربی برآوردگرهای

$$\widehat{\beta}_j,\ \widehat{\sigma}_j,\ \widehat{\theta}_j, \qquad j = 0, 1.$$

پرداخت. اکنون با تعیین چندک‌های $[B \times \frac{\alpha}{2}]$ و $[B \times (1-\frac{\alpha}{2})]$ این توزیع‌ها می‌توان به محاسبه فواصل اطمینان $100(1-\alpha)\%$ برای پارامترهای مورد نظر پرداخت.

ملاحظه ۱.۴. روشهای متنوعی در تعیین فواصل اطمینان بوت استرپی وجود دارد، که

می‌توان از آنها استفاده کرد. در این مقاله از روش پایه‌ای فواصل اطمینان بوت استرپی[1] استفاده می‌شود، که در آن فاصله‌ای که با چندک‌های $[B \times \frac{\alpha}{۲}]$ و $[B \times (۱ - \frac{\alpha}{۲})]$ توزیع تجربی، ساخته می‌شود را به عنوان فاصله اطمینان بوت استرپی پارامتر مورد توجه در نظر می‌گیرد [۱۵].

۲.۴ آزمون فرض بوت استرپی

برای آزمون فرض‌های زیر

$$\begin{cases} H_۰ : & \vec{\boldsymbol{\beta}}_j = \vec{\boldsymbol{\beta}}_{j۰} \\ H_۱ : & \vec{\boldsymbol{\beta}}_j \neq \vec{\boldsymbol{\beta}}_{j۰} \end{cases} , \qquad j = ۰, ۱.$$

که معادل فرض‌های زیر هستند

$$\begin{cases} H_۰ : & (\beta_j, \sigma_j, \theta_j) = (\beta_{j۰}, \sigma_{j۰}, \theta_{j۰}) \\ H_۱ : & (\beta_j, \sigma_j, \theta_j) \neq (\beta_{j۰}, \sigma_{j۰}, \theta_{j۰}) \end{cases} , \qquad j = ۰, ۱.$$

از دنباله برآوردگرهای بوت استرپی به دست آمده استفاده میکنیم. بدین منظور ابتدا فرضیات به صورت زیر تقسیم بندی میکنیم

$$\begin{cases} H'_۰ : & \beta_j = \beta_{j۰} \\ H'_۱ : & \beta_j \neq \beta_{j۰} \end{cases} , \qquad j = ۰, ۱.$$

$$\begin{cases} H''_۰ : & \sigma_j = \sigma_{j۰} \\ H''_۱ : & \sigma_j \neq \sigma_{j۰} \end{cases} , \qquad j = ۰, ۱.$$

[1] *Basic Bootstrap confidence interval*

جدول ۱: *داده‌های مسکن [۳۰]*

$\widetilde{Y} = (y, l, r)_T$	X_1	$No.$
(۳۰۰, ۱۲۰, ۸۰)	۸۰	۱
(۴۷۰, ۱۴۰, ۱۵۰)	۹۰	۲
(۳۳۰, ۱۰۰, ۱۰۰)	۷۰	۳
⋮	⋮	⋮
(۲۵۰, ۷۰, ۷۰)	۸۰	۱۴۵
(۳۷۰, ۱۰۰, ۱۰۰)	۹۰	۱۴۶
(۴۸۰, ۱۸۰, ۱۰۰)	۹۰	۱۴۷

$$\begin{cases} H_0''': & \theta_j = \theta_{j0} \\ H_1''': & \theta_j \neq \theta_{j0} \end{cases}, \qquad j = 0, 1.$$

برای آزمون فرض‌های بالا می توان از پی-مقدار به صورت زیر استفاده نمود. برای برآورد پی-مقدار نسبت آماره‌هایی را که از آماره آزمون فاصله دارد تشکیل میدهیم.

$$p - value = 2 \min \left\{ \frac{\#(t_b \leq t_0)}{B+1}, \frac{\#(t_b \geq t_0)}{B+1} \right\}, \qquad j = 0, 1.$$

اگر این نسبت از سطح آزمون موردنظر ما بزرگتر یا مساوی باشد، فرضیه صفر را میپذیریم و در غیر این صورت آن را رد میکنیم.

ملاحظه ۲.۴. برای آزمون فرض‌های بالا همچنین می توان از فواصل اطمینان بوت استرپی ساخته شده استفاده نمود و به آزمون فرضیه‌های بالا پرداخت [۱۵].

۵ مثال کاربردی

قیمت مسکن در کشور چین در دهه‌های گذشته بسیار مورد توجه در مجموعه درآمدهای ملی بوده است. در این ارتباط، یک نظرسنجی پرسشنامه‌ای در شهر شانگ‌های در کشور چین انجام شد [۳۰]، که در آن متغیرهای سیاسی و غیرسیاسی مختلفی از جمله ''مساحت ملک'' مورد توجه قرار گرفتند. هدف بررسی میزان تاثیر گذاری این متغیرها بر ''سطح مقرون به صرفه قیمت مسکن'' بود. در این مطالعه سطح مقرون به صرفه قیمت مسکن از

دیدگاه مصرف کننده یک کمیت فازی و غیر دقیق بود، که به‌صورت اعداد فازی مثلثی ثبت شد (جدول ۱).

در ادامه هدف این است که پس از برآورد مدل رگرسیون وزنی فازی بین متغیرهای

۱. x: اندازه مساحت ملک/مسکن؛

۲. $\widetilde{y} = (y, l, r)_T$: قیمت خرید قابل قبول.

به استنباط درباره پارامترهای این مدل بپردازیم.

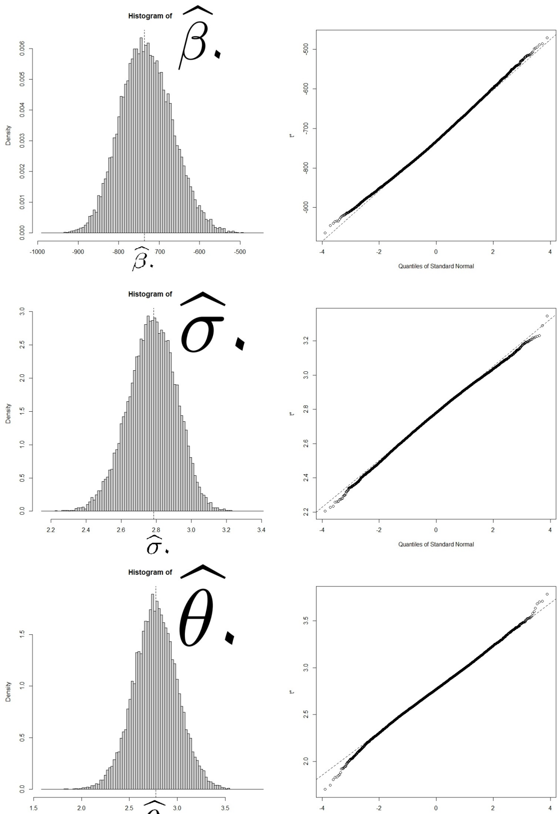
مدل (۳) ببر مبنای داده های اصلی جدول ۱ به صورت زیر به دست می آید

$$\begin{aligned}\widehat{\widetilde{y}} &= \left(\widehat{y}, \widehat{\log(l)}, \widehat{\log(r)}\right)\\ &= \widehat{\vec{\beta}}_۰ \oplus \left(\widehat{\vec{\beta}}_۱ \otimes x\right)\\ &= \left(\widehat{\beta}_۰, \widehat{\sigma}_۰, \widehat{\theta}_۰\right) \oplus \left(\left(\widehat{\beta}_۱, \widehat{\sigma}_۱, \widehat{\theta}_۱\right) \otimes x\right)\\ &= \left(\widehat{\beta}_۰ + \widehat{\beta}_۱ x, \widehat{\sigma}_۰ + \widehat{\sigma}_۱ x, \widehat{\theta}_۰ + \widehat{\theta}_۱ x\right)\\ &= (-۷۳۵/۸۰ + ۱۳/۶۳x, ۲/۷۸۵ + ۰/۰۲۴۶۶x, ۲/۷۷۴۷ + ۰/۰۱۸۶x).\end{aligned}$$

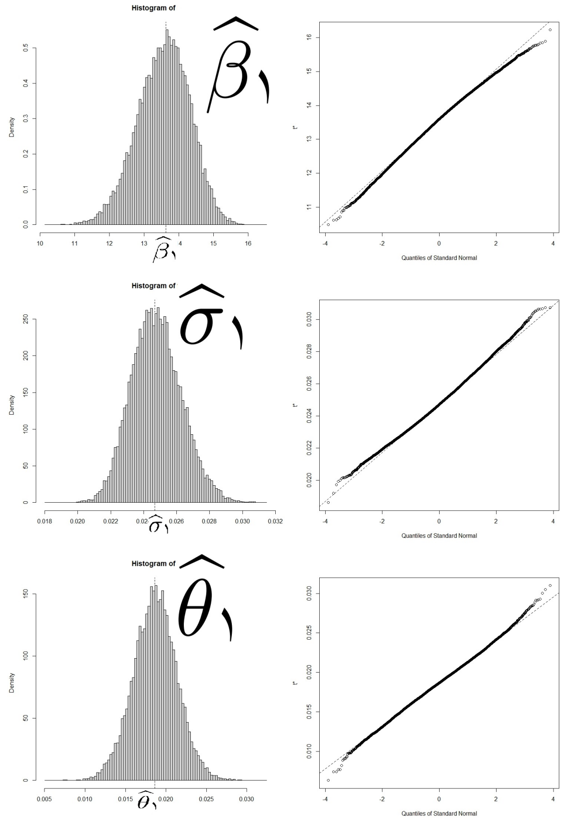
اکنون با توجه به معکوس‌پذیری تابع log، مدل رگرسیون فازی در برازش به مجموعه مشاهدات جدول ۱ به صورت زیر حاصل می‌شود

$$\begin{aligned}\widehat{\widetilde{y}} &= (\widehat{y}, \widehat{l}, \widehat{r})\\ &= (-۷۳۵/۸ + ۱۳/۶۳x, \exp\{۲/۷۸۵ + ۰/۰۲۴۶x\}, \exp\{۲/۷۷۴ + ۰/۰۱۸۶x\}),\end{aligned}$$

اکنون با اعمال روش بوت استرپ موردها، به تعداد $B = ۲۰۰۰۰$ بار به بازتولید نمونه‌های بوت استرپی از داده‌های جدول ۱ می پردازیم. برای هر نمونه بوت استرپی باز تولید شده، مدل (۳) برآورد می‌شود. توزیع برآوردگرهای $\widehat{\vec{\beta}}_۰$ و $\widehat{\vec{\beta}}_۱$ در شکل‌های ۱ و ۲ رسم شده است. این توزیع‌های تجربی، بر اساس مقادیر حاصل شده $\widehat{\vec{\beta}}_۰$ و $\widehat{\vec{\beta}}_۱$ در نمونه‌های باز-تولید شده توسط روش بوت بوت استرپ حاصل شده‌اند. بر این اساس در جدول ۲ فواصل بوت استرپ ٪۹۵ پارامترهای $\vec{\beta}_۰$ و $\vec{\beta}_۱$ آمده است.



شکل ۱: *توزیع برآوردگرهای* $\widehat{\vec{\beta}}_{\circ} = (\widehat{\beta}_{\circ}, \widehat{\sigma}_{\circ}, \widehat{\theta}_{\circ})$



شکل ۲: *توزیع برآوردگرهای* $\widehat{\vec{\beta}}_۱ = (\widehat{\beta}_۱, \widehat{\sigma}_۱, \widehat{\theta}_۱)$

جدول ۲: *فواصل اطمینان ۹۵٪ بوت استرپی برای پارامترهای* $\vec{\beta}_0 = (\beta_0, \sigma_0, \theta_0)$ و $\vec{\beta}_1 = (\beta_1, \sigma_1, \theta_1)$

پارامترها	فواصل اطمینان ۹۵٪ بوت استرپی	پی-مقدار
β_0	(−۸۷۱٫۹, −۶۲۲٫۰)	۰٫۰۰۰۰۰۰
σ_0	(۲٫۵۴۰, ۳٫۰۷۶)	۰٫۰۰۰۰۰۰
θ_0	(۲٫۳۲۵, ۳٫۲۳۶)	۰٫۰۰۰۰۰۰
β_1	(۱۲٫۳۱, ۱۵٫۲۵)	۰٫۰۰۰۰۰۰
σ_1	(۰٫۰۲۱۴, ۰٫۰۲۷۳)	۰٫۰۰۰۰۰۰
θ_1	(۰٫۰۱۳۲, ۰٫۰۲۴۰)	۰٫۰۰۰۰۰۰

مقادیر پی-مقدار برای آزمون معنی داری مدل؛ یعنی آزمون فرضیه های زیر

$$\begin{cases} H_0: & (\beta_j, \sigma_j, \theta_j) = (0, 0, 0) \\ H_1: & (\beta_j, \sigma_j, \theta_j) \neq (0, 0, 0) \end{cases}, \qquad j = 0, 1.$$

نیز در در جدول ۲ آورده شده است. نتایج بیان شده در در جدول ۲ گویای این مطلب است که مدل رگرسیون فازی در تعیین رابطه بین متغیر مستقل "مساحت ملک" با "سطح قیمت مصرف کننده" معنی دار است. این نتایج حاکی از وجود یک رابطه مثبت معنی‌دار بین این دو متغیر است.

۶ نتیجه‌گیری

ارایه فواصل اطمینان برای پارامترهای مجهول در مطالعات مختلف معمولا بر اساس پذیرش پیش فرض هایی است که از آن جمله می توان به ضرورت بزرگ بودن حجم نمونه (به اندازه کافی) اشاره داشت. هدف از انجام این تحقیق، بررسی چگونگی به کارگیری روش بوت استرپ در مدل رگرسیون فازی بود. ضرورت بکارگیری روش بوت استرپ در مدل های رگرسیونی فازی در مواردی است که اطلاعات کافی در اختیار محقق نباشد، یا به عبارتی توزیع جامعه مشخص نباشد. اخیرا روش های برآوردیابی گوناگونی، به طور گسترده در تحلیل رگرسیون خطی فازی مورد توجه و محبوبیت قرار گرفته اند، که تنوع کاربرد این مدل‌ها در مسایل دنیای واقعی بسیار مورد توجه بوده است. اما اینگونه تحقیقات عمدتا بر مبنای مدل‌سازی داده‌های فازی تمرکز یافته‌اند و کمتر به مسایل

استنباطی مانند آزمون فرض و تعیین برآوردهای فاصله ای برای پارامترهای اینگونه مدل‌ها پرداخته شده است.

بدین منظور هدف ما در در این مقاله بر این بود که با اعمال مدل رگرسیون وزنی فازی بر داده‌های واقعی مسکن، به استنباط درباره پارامترهای مدل بپردازیم. در این مطالعه، انتظارات قیمت مسکن مصرف کننده به عنوان یک متغیر وابسته فازی در نظر گرفته شد. در این راستا با استفاده از مدل رگرسیون وزنی فازی به تحلیل سطوح قیمت مسکن مقرون به صرفه از دیدگاه مصرف کننده پرداخته شد. در انتها، پس از مدل‌سازی داده ها به استنباط بوت استرپی درباره پارامترها نیز پرداختیم. در این راستا، نتیجه گرفتیم که مدل رگرسیون وزنی فازی، یک مدل مناسب و معنی داری جهت برازش به داده ها است. بر اساس نتایج بیان شده برای هر یک از ضرایب مدل، فاصله اطمینان و آزمون معنی داری محاسبه گردید. همچنین، استفاده از استنباط آماری در مطالعات مدلسازی امری ضروری بوده و روش بوت استرپ در نمونه های متفاوت نشان می دهد که با بکارگیری روش بوت استرپ در مواردی که با حجم نمونه ناکافی مواجه هستیم و/یا شرایط مناسب برای استفاده از روشهای متداول رگرسیون کلاسیک فراهم نیست، شرایطی را فراهم می آورد تا بتوان به استنباط آماری دربراه برآوردهای ارایه شده پرداخت. خاطرنشان می‌شود که روش پیشنهادی در این مقاله یک روش کلی در تحلیل رگرسیونی در محیط فازی است و می‌توان آن را در سایر مدل‌های رگرسیونی مانند رگرسیون نیمه پارامتری یا رگرسیون ریج به کاربرد.

تشکر و قدردانی

نویسندگان مقاله از سردبیر و داوران محترم که با نظرات ارزشمند خود باعث بهبود مطالب ارایه شده در این مقاله گردیدند، کمال تشکر و قدردانی را دارند. نویسنده اول از اعتبارات پژوهشی به شماره $SCU.MS$۱۴۰۱٫۳۸۸۳۷ در دانشگاه شهید چمران اهواز استفاده نموده است.

مراجع

[۱] اکبری، م. ق. و حسامیان، غ. (۱۳۹۸). بهبود یک روش آزمون فرضیه و فاصله اطمینان در رگرسیون خطی تک متغیره فازی، مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی، دوره ۹، شماره ۲، ص ص ۱-۳۲.

[۲] چاچی، ج.، کاظمی‌فرد، ا. و فهیمی، ح. (۱۴۰۰). رهیافت تصمیم‌گیری‌های چند معیاره در ارزیابی نیکویی برازش مدل‌های آماری، سیستم‌های فازی و کاربردها، دوره ۴، شماره ۱، ص ص ۲۴۷-۲۶۷.

[۳] چاچی، ج. و چاجی، ع. (۱۳۹۷). رویکردهای وزنی در برازش مدل‌های رگرسیون فازی، سیستم‌های فازی و کاربردها، دوره ۱، شماره ۲، ص ص ۱۰۵-۱۱۷.

[۴] رضایی، ک. و رضایی، ح. (۱۳۹۷). بررسی معیارهای فاصله و شباهت برای مجموعه‌های فازی و برخی از توسعه‌های آنها، سیستم‌های فازی و کاربردها، دوره ۱، شماره ۲، پاییز وزمستان ۱۳۹۷، ص ص ۴۵-۱۰۴.

[5] Arefi, A. (2020). Quantile fuzzy regression based on fuzzy outputs and fuzzy parameters, *Soft Computing*, **24**, 311-320.

[6] Celmins, A. (1987). Least squares model fitting to fuzzy vector data, *Fuzzy Sets and Systems*, **22**, 245–269.

[7] Chachi, J. (2019). A Weighted Least Squares Fuzzy Regression for Crisp Input Fuzzy Output Data, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, **27(4)**, 739–748.

[8] Chachi, J. and Chaji, A. (2021). An OWA-Based Approach to Quantile Fuzzy Regression. *Computers and Industrial Engineering*, **159**, 107498.

[9] Chachi, J., Taheri, S.M. and D'Urso, P. (2022). Fuzzy Regression Analysis Based on M-estimates, *Expert Systems with Applications*, **187**, 115891.

[10] Chukhrova, N. and Johannssen, A. (2019). Fuzzy Regression Analysis: Systematic Review and Bibliography, *Applied Soft Computing*, **84**, 105708.

[11] Diamond, P. (1988). Fuzzy least squares, *Information Sciences*, **46**, 141-157.

[12] D'Urso, P. and Chachi, J. (2022). Owa fuzzy regression, *International Journal of Approximate Reasoning*, **142**, 430-450.

[13] D'Urso, P. and Massari, R. (2013). Weighted least squares and least median squares estimation for the fuzzy linear regression analysis, Metron, 71, 279-306.

[14] D'Urso, P., Massari, R., Santoro, A. (2011). Robust fuzzy regression analysis, Information Sciences, 181, 4154-4174.

[15] Efron, B. and Raoul, L. (1992). *Introduction to Bootstrap*. Wiley & Sons, New York.

[16] Ferraro, M. B. (2017). On the generalization performance of a regression model with imprecise elements. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, **25**, 723-740.

[17] Hesamian, G. and Akbari, M.G. (2017). Semi-parametric partially logistic fuzzy regression model with exact inputs and intuitionistic fuzzy outputs, *Applied Soft computing*, **58**, 517-526.

[18] Hesamian, G. and Akbari, M.G. (2020). A Robust Varying Coefficient Approach to Fuzzy Multiple Regression Model, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **371**, 112704.

[19] Hesamian, G. and Akbari, M.G. (2020). Fuzzy spline univariate regression with exact predictors and fuzzy responses, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **375**, 112803.

[20] Hesamian, G. and Akbari, M.G. (2021). A Robust Multiple Regression Model Based on Fuzzy Random Variables, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **388**, 113270.

[21] Hesamian, G. and Akbari, M.G. (2021). A Fuzzy Additive Regression Model with Exact Predictors and Fuzzy Responses, *Applied Soft Computing*, **95**, 106507.

[22] Hesamian, G., Akbari, M.G. and Shams, M. (2021). Parameter Estimation in Fuzzy Partial Univariate Linear Regression Model with Non-Fuzzy Inputs and Triangular Fuzzy Outputs *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, **18**, 51–64.

[23] Kazemifard, A. and Chachi, J. (2021). MADM Approach to Analyse the Performance of fuzzy regression models. *Journal of Ambient Intelligence and Humanized Computing*, **13**, 4019–4031.

[24] Khammar, A.H., Arefi, M. and Akbari, M.G. (2020). A Robust Least-Squares Fuzzy Regression Model Based on Kernel Function, *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, **17**, 105–119.

[25] Khammar, A.H., Arefi, M. and Akbari, M.G. (2021). A General Approach to Fuzzy Regression Models Based on Different Loss Functions, *Soft Computing*, **25**, 835–849.

[26] Khammar, A.H., Arefi, M. and Akbari, M.G. (2021). Quantile fuzzy varying coefficient regression based on kernel function, *Applied Soft Computing*, **107**, 107313.

[27] Leski, J.M. and Kotas, M. (2015). On robust fuzzy c-regression models, *Fuzzy Sets and Systems*, 279, 112-129.

[28] Tanaka, H., Hayashi, I. and Watada, J. (1989). Possibilistic linear regression analysis for fuzzy data, *European J. Operational Research*, **40**, 389-396.

[29] Tanaka, H., Uegima, S. and Asai, K. (1982). Linear regression analysis with fuzzy model, *IEEE Trans. Syst. Man Cybernet.*, **12**, 903-907.

[30] Zhou, J., Zhang, H., Gu1, Y. and Pantelous, A.A. (2018). Affordable levels of house prices using fuzzy linear regression analysis: the case of Shanghai, *Soft Computing*, **22**, 5407-5418.

[31] Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets. *Information and control*, **8**, 338-353.

[32] Zimmermann, H.J. (2001). *Fuzzy Set Theory and Its Applications*, 4th ed., Kluwer Nihoff, Boston.