

حل مسائل کنترل بهینه خطی درجه دوم تحت عدم قطعیت بازه‌ای

طاهره شکوهی، سمانه صردی‌زید و مهدی الله‌دادی *

دانشکده ریاضی، دانشگاه سیستان و بلوچستان، زاهدان، ایران
دانشکده صنعت و معدن (خاش)، دانشگاه سیستان و بلوچستان، زاهدان، ایران
دانشکده ریاضی، دانشگاه سیستان و بلوچستان، زاهدان، ایران

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۰۴/۳۰

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۱۲/۲۰

نوع مقاله: علمی-پژوهشی

چکیده

هدف اصلی این مقاله، یافتن یک قانون کنترل بهینه بازه‌ای برای مسائل تنظیم کننده خطی درجه دوم تحت عدم قطعیت بازه‌ای است. برای این منظور، با استفاده از اصل بهینگی بلمن و نامعادلات همیلتون-ژاکوبی-بلمن بازه‌ای، مسئله کنترل بهینه بازه‌ای به یک دستگاه نامعادلات دیفرانسیل بازه‌ای تبدیل می‌شود. این نامعادلات اصطلاحاً نامعادلات دیفرانسیل ریکاتی نامگذاری می‌شوند که در اصل نتیجه‌ای از روش برنامه ریزی پویا می‌باشند. برای حل این دستگاه نامعادلات، از روابط شمول و حساب بازه‌ای استفاده می‌کنیم. با این روش می‌توانیم کران بالا و پایین جواب‌ها را بدست آوریم. از تفاضل تعمیم یافته هوکوها را نیز برای کاهش خطاهای موجود در حساب بازه‌ای استفاده می‌کنیم. در انتها، روش ارائه شده را برای حل چند مسئله کنترل بهینه خطی درجه دوم بازه‌ای با استفاده از نرم‌افزار متلب پیاده‌سازی می‌کنیم. نتایج به دست آمده کارآمدی روش پیشنهادی را نشان می‌دهند.

عبارات و کلمات کلیدی: مسئله کنترل بهینه خطی درجه دوم بازه‌ای، نامعادلات همیلتون-ژاکوبی-بلمن بازه‌ای، نامعادلات ریکاتی بازه‌ای، تفاضل تعمیم یافته هوکوها.

Email(s): toktam.shokohi64@gmail.com, soradizeid@eng.usb.ac.ir and m_allahdadi@math.usb.ac.ir.

۱ مقدمه

مقصود از مسئله کنترل بهینه خطی درجه دوم تحت عدم قطعیت بازه‌ای، یافتن یک تابع کنترلی است که تابع هدف درجه دوم مسئله را به شرط برآورده کردن قیود دیفرانسیل خطی بازه‌ای، بهینه کند. یک مسئله کنترل بهینه درجه دوم با سیستم خطی به فرم کلی زیر است:

$$(۱) \quad \min J^\pm(x^\pm, u^\pm, t) = \frac{1}{2} x^{\pm T}(t_f) F^\pm x^\pm(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \left[x^{\pm T}(t) Q^\pm(t) x^\pm(t) + u^{\pm T}(t) R^\pm(t) u^\pm(t) \right] dt,$$

به طوری که سیستم دینامیکی

$$(۲) \quad x'^{\pm}(t) = A^\pm x^\pm(t) + B^\pm(t) u^\pm, \quad t_0 \leq t \leq t_f.$$

در شرایط اولیه زیر صدق کند:

$$(۳) \quad x^\pm(t_0) = x_0^\pm, \quad x^\pm(t_f) = x_f^\pm,$$

که در آن $A^\pm, B^\pm, F^\pm, R^\pm, Q^\pm \in \mathcal{K}$ توابعی بازه‌ای و پیوسته هستند و \mathcal{K} مجموعه‌ای از تمام بازه‌های فشرده غیر تهی از \mathbb{R} است. ماتریس‌های $Q^\pm(t)$ و $F^\pm(t)$ متقارن و نیمه معین مثبت و $R^\pm(t)$ یک ماتریس متقارن و معین مثبت می‌باشند. همچنین، A^\pm و B^\pm ماتریس‌های با مقادیر بازه‌ای ثابت فرض می‌شوند، $x^\pm(t)$ متغیر حالت و $u^\pm(t)$ متغیر کنترل مسئله از نوع بازه‌ای می‌باشند.

در دهه‌های اخیر، محاسبات بازه‌ای و معادلات دیفرانسیل بازه‌ای، توجه بسیاری از محققان را به خود جلب کرده است. در دنیای واقعی، سیستم‌های فیزیکی زیادی قابل مشاهده هستند که دینامیک بازه‌ای را نشان می‌دهند. به عبارت دیگر، رفتارشان بر اساس معادلات دیفرانسیل بازه‌ای کنترل می‌شود. این پدیده‌های فیزیکی با استفاده از معادلات دیفرانسیل بازه‌ای با قابلیت بهتری نسبت به معادلات دیفرانسیل معمولی قابل توصیف و مدل‌سازی هستند. محاسبات بازه‌ای و معادلات دیفرانسیل بازه‌ای در دهه‌های

اخیر در زمینه‌های مختلف علوم و مهندسی [۷، ۹، ۱۵، ۱۶] دیده شده است و مطالعه روی آن‌ها به موضوع جذابی برای پژوهشگران تبدیل شده است، به طوری که برای رفع برخی از مشکلات ایجاد شده در محاسبات بازه‌ای، عملگرهای تعمیم یافته‌ای را پیشنهاد داده‌اند. به عنوان مثال، در حسابان بازه‌ای یک عرض بازه اضافی تحت عنوان وابستگی رخ می‌دهد که برای غلبه بر آن تفاضلات تعمیم یافته‌ی هوکوها را^۱ را پیشنهاد داده‌اند [۱۹]. وانگ و همکارانش^۲ در [۲۳] و استفانینی^۳ در [۲۰]، وجود و منحصر به فرد بودن جواب معادله دیفرانسیل بازه‌ای در حضور تفاضل تعمیم یافته هوکوها را بررسی کردند. وانگ و همکارانش در [۲۲] تعداد جواب های یک کلاس از معادلات دیفرانسیل بازه‌ای مرتبه اول را تحت تفاضل تعمیم یافته هوکوها تخمین زدند، که پیچیدگی تجزیه و تحلیل پایداری در این زمینه، و همچنین دشواری مسائل پیش‌بینی و کنترل را نشان می‌دهد.

در سال‌های اخیر، مسائل کنترل بهینه بازه‌ای به دلیل کاربرد آنها در مدل‌سازی بسیاری از پدیده‌های دنیای واقعی، اهمیت و محبوبیت زیادی در بین محققان پیدا کرده است [۲، ۷]. یافتن شرایط لازم و کافی برای وجود جواب مسائل کنترل بهینه تحت عدم قطعیت، از جمله مباحثی است که تاکنون بسیار مورد بررسی قرار گرفته است [۶، ۱۵]. اصل بیشینه پونتریگین^۴ بازه‌ای تحت فرض تحدب تابع هامیلتونی بازه‌ای، از جمله شرایطی است که برای حل این مسائل معرفی شده است [۱۴]. رزمجو و رضانی در [۱۸] نسخه بازه‌ای جدیدی از روش رانگ کوتا^۵ را برای حل مسائل کنترل بهینه در حضور پارامترهای دارای مقادیر بازه‌ای پیشنهاد کردند. همچنین فرهادی‌نیا [۸] و نجاریان [۱۷] مسائل کنترل بهینه فازی را از طریق گرفتن سطح تراز- α از متغیرها، به یک مسئله کنترل بهینه بازه‌ای تبدیل کرده‌اند. زراعی و همکارانش در [۲۴] از اصل بیشینه پونتریگین برای به دست آوردن شرایط بهینه لازم در قالب یک مسئله مقدار مرزی فازی استفاده کرده‌اند. اما در اکثر این روشها، حل مسئله کنترل بهینه تحت عدم قطعیت به حل دو زیر مسئله قطعی منجر می‌شود. اشکال عمده این روش‌ها این است که مسئله را به صورت بازه‌ای حل نمی‌کنند و زیر مدل‌هایی را حل می‌کنند که کران‌های بالا و پایین

¹ Generalized Hukuhara differences

² Wang

³ Stefanini

⁴ Interval Pontryagin's maximum principle

⁵ Runge-Kutta

جواب بهینه به دلیل در نظر نگرفتن کل بازه با قطعیت بدست نمی‌آید.

در دهه اخیر، استفاده از روش‌های برنامه‌ریزی پویا به دلیل کاربردهای جذاب آن در مسائل کنترل بهینه تحت عدم قطعیت، رشد تصاعدی داشته است. محققان روشی نظام‌مند برای حل مسائل کنترل بهینه در چارچوب حساب تغییرات پیدا کردند که به معادله همیلتون-ژاکوبی-بلمن^۶ معروف شد [۱۳]. جواب‌های این معادله شرایط بهینه لازم و کافی را برای حل مسائل کنترل بهینه تضمین می‌کند. این رویکرد توسط بسیاری از محققین توسعه یافت [۳، ۴، ۵، ۱۱، ۱۲، ۱۳]. متأسفانه، همه این روش‌ها با هزینه محاسباتی بسیار بالایی مشخص می‌شوند و استراتژی‌های جدیدی برای ساده‌سازی اجرای نرم‌افزاری آن‌ها مورد نیاز است.

در این مقاله می‌خواهیم یک روش جدید برای حل مسئله (۱)-(۳) بیان کنیم که از روش‌های موجود در برنامه‌ریزی پویا که انعطاف‌پذیری بالایی در حل مسائل کنترل بهینه تحت عدم قطعیت دارند، استفاده می‌کند. به این ترتیب، روش جدیدی برای یافتن جواب‌های تحلیلی مسائل کنترل بهینه خطی درجه دوم بازه‌ای ارائه خواهیم کرد. برای این منظور، ابتدا شرایط بهینگی هامیلتون-ژاکوبی-بلمن برای مسئله کنترل بهینه بازه‌ای (۱)-(۳) توسعه داده می‌شود. این توسعه به یک دستگاه شمولی از نامعادلات دیفرانسیل بازه‌ای تحت عنوان نامعادلات ریکاتی منجر خواهد شد که با حل آن، جواب مسئله کنترل بهینه بازه‌ای به دست می‌آید.

در ادامه، مقدماتی از حساب بازه‌ای و تفاضل تعمیم یافته هوکوها را در بخش ۲ بیان شده است. نامعادلات هامیلتون-ژاکوبی-بلمن بازه‌ای در بخش ۳ فرمول‌بندی شده است و از آن جهت استخراج نامعادلات ریکاتی بازه‌ای برای یافتن قانون کنترل بهینه برای مسئله تنظیم‌کننده خطی درجه دو بازه‌ای استفاده شده است. چند مثال عددی جهت صحت‌گذاری بر کارآمدی روش ارائه شده، در بخش ۴ مورد بررسی قرار گرفته است و در نهایت، نتیجه‌گیری در بخش ۵ ارائه شده است.

⁶Hamilton-Jacobi-Bellman

۲ پیش‌نیازها

تعریف ۱.۰۲. [۱۰] فرض کنید $\mathcal{K} = \{[a^-, a^+] | a^-, a^+ \in \mathbb{R}, a^- \leq a^+\}$ باشد. اگر $a^\pm = [a^-, a^+]$ و $b^\pm = [b^-, b^+]$ ، آنگاه چهار عملگر اصلی حساب بازه‌ای به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$a^\pm + b^\pm = [a^-, a^+] + [b^-, b^+] = [a^- + b^-, a^+ + b^+],$$

$$\lambda a^\pm = \lambda [a^-, a^+] = \begin{cases} [\lambda a^-, \lambda a^+] & \text{if } \lambda > 0, \\ [0, 0] & \text{if } \lambda = 0, \\ [\lambda a^+, \lambda a^-] & \text{if } \lambda < 0. \end{cases}$$

$$[a^-, a^+].[b^-, b^+] = [\min\{a^-b^-, a^+b^-, a^-b^+, a^+b^+\},$$

$$\max\{a^-b^-, a^+b^-, a^-b^+, a^+b^+\}].$$

$$\frac{1}{b^\pm} = \left[\frac{1}{b^+}, \frac{1}{b^-} \right], \quad 0 \notin [b^-, b^+].$$

$$\frac{[a^-, a^+]}{[b^-, b^+]} = [a^-, a^+]. \frac{1}{[b^-, b^+]}$$

پهنای یک بازه $a^\pm = [a^-, a^+]$ را به فرم $w(a^\pm) = a^+ - a^-$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۲.۰۲. [۱] رابطه ضعیف بین دو عدد بازه‌ای به فرم زیر تعریف می‌شود:

$$a^\pm \preceq_\omega b^\pm \Leftrightarrow a^- \leq b^+, \quad (۴)$$

همچنین رابطه شمول بین دو عدد بازه‌ای نیز به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$a^\pm \subset b^\pm \Rightarrow a^- \geq b^- \text{ and } a^+ \leq b^+. \quad (۵)$$

تعریف ۳.۰۲. [۱] فرض کنید A^\pm یک ماتریس بازه‌ای $m \times n$ و b^\pm بردار بازه‌ای با بعد

m باشد. دستگاه معادلات بازه‌ای

$$A^\pm x = b^\pm, \quad (۶)$$

خانواده‌ای از تمام دستگاه‌های

$$Ax = b, \quad (۷)$$

است که

$$b \in b^\pm, \quad A \in A^\pm. \quad (۸)$$

دستگاه (۶) شدنی ضعیف است اگر برخی از دستگاه‌های (۷) با داده‌های (۸) شدنی باشد.

قضیه ۴.۲. [۸] دستگاه $A^\pm x = b^\pm$ شدنی ضعیف است اگر و تنها اگر دستگاه

$$A^- x \leq b^+,$$

$$A^+ x \geq b^-.$$

شدنی باشد.

تعریف ۵.۲. [۲۰] فرض کنید $a^\pm, b^\pm, c^\pm \in \mathcal{K}$ باشد. تفاضل تعمیم یافته هوکوها را برای توابع بازه‌ای a^\pm و b^\pm به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$[a^-, a^+] \ominus_{gH} [b^-, b^+] = [c^-, c^+]$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (i) \text{ if } w(a^\pm) \geq w(b^\pm) \begin{cases} a^- = b^- + c^-, \\ a^+ = b^+ + c^+, \end{cases} \\ (ii) \text{ if } w(a^\pm) < w(b^\pm) \begin{cases} b^- = a^- - c^+, \\ b^+ = a^+ - c^-, \end{cases} \end{cases}$$

۳ مسئله تنظیم کننده خطی درجه دو بازهای

در این بخش، یک روش کارآمد برای به دست آوردن جواب‌های بهینه یک سیستم کنترلی حلقه بسته بازهای به فرم کلی (۱)-(۳)، با استفاده از اصل بهینگی و معادله هامیلتون-ژاکوبی-بلمن بازهای ارائه می‌شود. هدف یافتن یک متغیر کنترلی $u^\pm(t)$ است به گونه‌ای که تابع هزینه (۱) به حداقل برسد و محدودیت‌های مسئله برآورده شوند. برای این منظور ابتدا سیستم دینامیکی بازهای (۲) را به فرم کلی زیر در نظر می‌گیریم:

$$x'^\pm(t) = a^\pm(x^\pm(t), u^\pm(t), t),$$

سیستم دینامیکی باید چنان کنترل شود که شاخص عملکرد تابعی معیار زیر را برای هر مقدار وضعیت قابل قبول $x^\pm(t)$ و $t < t_f$ حداقل کند:

(۹)

$$J^{*\pm}(x^\pm(t), t) = \min_{\substack{u^\pm(\tau) \\ t \leq \tau \leq t_f}} \left\{ h^\pm(x^\pm(t_f), t_f) + \int_t^{t_f} g^\pm(x^\pm(\tau), u^\pm(\tau), \tau) d\tau \right\},$$

که در آن، $g^\pm, h^\pm \in \mathcal{K}$ دو تابعی بازهای درجه دوم به فرم (۱) هستند. با تقسیم بازه زمانی $[t, t_f]$ ، به دو زیربازه می‌توان مسئله (۹) را به فرم زیر نوشت:

(۱۰)

$$J^{*\pm}(x^\pm(t), t) = \min_{\substack{u^\pm(\tau) \\ t \leq \tau \leq t_f}} \left\{ h^\pm(x^\pm(t_f), t_f) + \int_t^{t+\Delta t} g^\pm(x^\pm(\tau), u^\pm(\tau), \tau) d\tau + \int_{t+\Delta t}^{t_f} g^\pm(x^\pm(\tau), u^\pm(\tau), \tau) d\tau \right\}.$$

با استفاده از اصل بهینگی [۷]، می‌توان مسئله (۱۰) را به شکل زیر بازنویسی کرد:

$$J^{*\pm}(x^\pm(t), t) = \min_{u^\pm(\tau)} \left\{ J^{*\pm}(x^\pm(t + \Delta t), t + \Delta t) + \int_t^{t+\Delta t} g^\pm(x^\pm(\tau), u^\pm(\tau), \tau) d\tau \right\}$$

با فرض اینکه بستار بازه‌ای ماتریس هسین $J^{*\pm}$ وجود دارد [۱۰]، می‌توان سری تیلور حول نقطه $(x^\pm(t), t)$ برای $J^{*\pm}(x^\pm(t + \Delta t), t + \Delta t)$ به صورت زیر بسط داد:

$$J^{*\pm}(x^\pm(t), t) = \min_{u^\pm(\tau)} \left\{ J^{*\pm}(x^\pm(t), t) + \frac{\partial J^{*\pm}}{\partial x^\pm}(x^\pm(t + \Delta t) \ominus_{gH} x^\pm(t)) + \frac{\partial J^{*\pm}}{\partial t} \Delta t + o(\Delta t) + \int_t^{t+\Delta t} g^\pm(x^\pm(\tau), u^\pm(\tau), \tau) d\tau \right\}$$

در رابطه فوق، $J^{*\pm}(x^\pm(t), t)$ و $\frac{\partial J^{*\pm}}{\partial t} \Delta t$ به $u^\pm(t)$ وابسته نیستند. بنابراین می‌توان این مولفه‌ها را از عملگر حداقل‌یابی خارج کرد، و مسئله را به شکل زیر ساده‌سازی کرد:

$$J^{*\pm}(x^\pm(t), t) \ominus_{gH} J^{*\pm}(x^\pm(t), t) \subseteq \frac{\partial J^{*\pm}}{\partial t} \Delta t + \min_{u^\pm(\tau)} \left\{ \frac{\partial J^{*\pm}}{\partial x^\pm} a^\pm(x^\pm(t), u^\pm(t), t) \Delta t + o(\Delta t) + g^\pm(x^\pm(t), u^\pm(t), t) \Delta t \right\}$$

با توجه به این واقعیت که $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0$ ، رابطه فوق را بر Δt تقسیم می‌کنیم. بنابراین خواهیم داشت:

$$\circ \subseteq \frac{\partial J^{*\pm}}{\partial t} + \min_{u^\pm(\tau)} \left\{ \frac{\partial J^{*\pm}}{\partial x^\pm} a^\pm(x^\pm(t), u^\pm(t), t) + g^\pm(x^\pm(t), u^\pm(t), t) \right\}. \quad (11)$$

اکنون، تابع هامیلتونی بازه‌ای را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$H^{\pm}(x^{\pm}(t), u^{\pm}(t), t) = \min_{u^{\pm}(\tau)} \left\{ \frac{\partial J^{*\pm}}{\partial x^{\pm}} a^{\pm}(x^{\pm}(t), u^{\pm}(t), t) + g^{\pm}(x^{\pm}(t), u^{\pm}(t), t) \right\} \quad (12)$$

به این ترتیب، با استفاده از رابطه (۱۱)، معادله هامیلتون-ژاکوبی-بلمن بازه‌ای به شرح زیر به دست می‌آید:

$$\circ \subseteq \frac{\partial J^{*\pm}}{\partial t} + H^{\pm}(x^{\pm}(t), u^{\pm}(t), t), \quad (13)$$

و شرط مرزی $J^{*\pm}(x^{\pm}(t_f), t_f) = h^{\pm}(x^{\pm}(t_f), t_f)$ که از جایگذاری $t = t_f$ در رابطه (۹) حاصل شده است.

حال، اگر تابع هامیلتونی (۱۲) را برای مسئله خطی درجه دوم بازه‌ای به فرم کلی (۱)-(۳) بازنویسی کنیم، خواهیم داشت:

$$H^{\pm}(x^{\pm}(t), u^{\pm}(t), t) = \min_{u^{\pm}(\tau)} \left[\frac{1}{2} \left(x^{\pm T}(t) Q^{\pm} x^{\pm}(t) + u^{\pm T}(t) R^{\pm} u^{\pm}(t) \right) + \frac{\partial J^{*\pm T}}{\partial x^{\pm}} \left(A^{\pm} x^{\pm}(t) + B^{\pm} u^{\pm}(t) \right) \right] \quad (14)$$

شرط لازم برای اینکه $u^{*\pm}(t)$ تابع (۱۴) را حداقل کند این است که $\frac{\partial H^{*\pm}}{\partial u^{\pm}} = 0$ بنابراین:

$$R^{\pm} u^{\pm}(t) + B^{\pm T} \frac{\partial J^{*\pm}}{\partial x^{\pm}}(x^{\pm}(t), t) = 0. \quad (15)$$

در این صورت خواهیم داشت:

$$u^{\pm}(t) = -R^{\pm^{-1}} B^{\pm T} \frac{\partial J^{*\pm}}{\partial x^{\pm}}(x^{\pm}(t), t). \quad (16)$$

همچنین داریم:

$$\frac{\partial^2 H^{*\pm}}{\partial u^{\pm 2}} (x^\pm(t), u^\pm(t), t) = R^\pm. \quad (17)$$

با توجه به این فرض که R^\pm معین مثبت است، کنترل بازه‌ای $u^\pm(t)$ که از رابطه (۱۶) به دست می‌آید، تابع هامیلتونی بازه‌ای (۱۴) را به حداقل مقدارش می‌رساند. در واقع، رابطه (۱۷) شرط کافی برای بهینه بودن مسئله است. از جایگزینی (۱۶) در (۱۴) رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$H^\pm(x^\pm(t), u^\pm(t), t) = \frac{1}{\gamma} x^{\pm T} Q^\pm x^\pm \ominus_{gH} \frac{1}{\gamma} \frac{\partial J^{*\pm T}}{\partial x^\pm} B^\pm R^{\pm -1} B^{\pm T} \frac{\partial J^{*\pm}}{\partial x^\pm} + \frac{\partial J^{*\pm T}}{\partial x^\pm} A^\pm x^\pm. \quad (18)$$

اکنون با استفاده از رابطه شمول (۵) و رابطه (۱۸)، معادله هامیلتون-ژاکوبی-بلمن بازه‌ای (۱۳) را می‌توان به دو نامعادله به صورت زیر تبدیل کرد:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial J^{*\pm}}{\partial t} + \frac{1}{\gamma} x^{\pm T} Q^\pm x^\pm \ominus_{gH} \frac{1}{\gamma} \frac{\partial J^{*\pm T}}{\partial x^\pm} B^\pm R^{\pm -1} B^{\pm T} \frac{\partial J^{*\pm}}{\partial x^\pm} \right. \\ & \left. + \frac{\partial J^{*\pm T}}{\partial x^\pm} A^\pm x^\pm \right)^- \leq 0, \\ & \left(\frac{\partial J^{*\pm}}{\partial t} + \frac{1}{\gamma} x^{\pm T} Q^\pm x^\pm \ominus_{gH} \frac{1}{\gamma} \frac{\partial J^{*\pm T}}{\partial x^\pm} B^\pm R^{\pm -1} B^{\pm T} \frac{\partial J^{*\pm}}{\partial x^\pm} \right. \\ & \left. + \frac{\partial J^{*\pm T}}{\partial x^\pm} A^\pm x^\pm \right)^+ \geq 0, \end{aligned} \quad (19)$$

که متناظر با فرم کلی تابعی (۱) و شرط حدی آن خواهیم داشت:

$$J^{*\pm}(x^\pm(t_f), t_f) = x^{\pm T}(t_f) F^\pm x^\pm(t_f). \quad (20)$$

نامعادلات (۱۹) را می‌توان با در نظر گرفتن یک حدس اولیه برای تابعی هزینه که شرط لازم برای بهینه بودن است، حل کرد. برای این منظور با استفاده از شرط حدی (۲۰)، یک حدس اولیه برای تابعی هزینه را به صورت زیر فرض می‌کنیم:

$$J^{*\pm}(x^\pm(t), t) = x^{\pm T}(t) k^\pm(t) x^\pm(t), \quad (21)$$

با جایگزین کردن جواب فرضی (۲۱) در نامعادلات (۱۹) و همچنین با توجه به اینکه
 $k^\pm(t_f) = F^\pm$ داریم:

$$(22) \quad \left(\frac{1}{\psi} x^{\pm T}(t) k'^{\pm}(t) x^{\pm}(t) + \frac{1}{\psi} x^{\pm T}(t) Q^{\pm} x^{\pm}(t) \ominus_{gH} \frac{1}{\psi} x^{\pm T}(t) k^{\pm}(t) B^{\pm} R^{\pm^{-1}} B^{\pm T} k^{\pm}(t) x^{\pm}(t) + \frac{1}{\psi} x^{\pm T}(t) k^{\pm}(t) A^{\pm} x^{\pm}(t) \right)^{-} \leq 0,$$

$$\left(\frac{1}{\psi} x^{\pm T}(t) k'^{\pm}(t) x^{\pm}(t) + \frac{1}{\psi} x^{\pm T}(t) Q^{\pm} x^{\pm}(t) \ominus_{gH} \frac{1}{\psi} x^{\pm T}(t) k^{\pm}(t) B^{\pm} R^{\pm^{-1}} B^{\pm T} k^{\pm}(t) x^{\pm}(t) + \frac{1}{\psi} x^{\pm T}(t) k^{\pm}(t) A^{\pm} x^{\pm}(t) \right)^{+} \geq 0.$$

ماتریس $k^\pm A^\pm$ که در جمله آخر ظاهر می‌شود، می‌تواند به صورت مجموع یک قسمت متقارن و یک قسمت نامتقارن به شکل زیر نوشته شود:

$$k^\pm A^\pm = \frac{1}{\psi} [k^\pm A^\pm + (k^\pm A^\pm)^T] + \frac{1}{\psi} [k^\pm A^\pm \ominus_{gH} (k^\pm A^\pm)^T].$$

با استفاده از ویژگی ماتریس‌های ترانهاده $(D^{\pm T} C^{\pm T})^T = D^{\pm} C^{\pm}$ [۲۱]، می‌توان نشان داد که فقط قسمت متقارن $k^\pm A^\pm$ برای نامعادلات (۲۲) موثر خواهد بود. بنابراین، روابط (۲۲) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$(23) \quad \left(\frac{1}{\psi} x^{\pm T}(t) x^{\pm}(t) \right) \left(k'^{\pm}(t) + Q^{\pm} \ominus_{gH} k^{\pm}(t) B^{\pm} R^{\pm^{-1}}(t) B^{\pm T} k^{\pm}(t) + k^{\pm}(t) A^{\pm} + A^{\pm T} k^{\pm}(t) \right)^{-} \leq 0,$$

$$\left(\frac{1}{\psi} x^{\pm T}(t) x^{\pm}(t) \right) \left(k'^{\pm}(t) + Q^{\pm} \ominus_{gH} k^{\pm}(t) B^{\pm} R^{\pm^{-1}}(t) B^{\pm T} k^{\pm}(t) + k^{\pm}(t) A^{\pm} + A^{\pm T} k^{\pm}(t) \right)^{+} \geq 0.$$

از آنجایی که نامعادلات (۲۳) برای همه $x^\pm(t)$ برقرار است، می‌توان نتیجه گرفت:

$$(24) \quad \left(k'^{\pm}(t) + Q^{\pm} \ominus_{gH} k^{\pm}(t) B^{\pm} R^{\pm^{-1}}(t) B^{\pm T} k^{\pm}(t) + k^{\pm}(t) A^{\pm} + A^{\pm T} k^{\pm}(t) \right)^{-} \leq 0,$$

$$\left(k'^{\pm}(t) + Q^{\pm} \ominus_{gH} k^{\pm}(t) B^{\pm} R^{\pm^{-1}}(t) B^{\pm T} k^{\pm}(t) + k^{\pm}(t) A^{\pm} + A^{\pm T} k^{\pm}(t) \right)^{+} \geq 0.$$

بنابراین نامعادلات بازه‌ای هامیلتون-ژاکوبی-بلمن با مشتقات نسبی (۱۹) به مجموعه‌ای از نامعادلات دیفرانسیل غیرخطی معمولی به نام نامعادلات دیفرانسیل ریکاتی بازه‌ای (۲۴) تبدیل می‌شوند که ماتریس $k^\pm(t)$ با انتگرال‌گیری عددی از آن به ازای $t = t_f$ تا $t = t$ و اعمال شرط مرزی $k^\pm(t_f) = F^\pm(t_f)$ به دست می‌آید. با تعیین $k^\pm(t)$ قانون کنترل بهینه $u^\pm(t)$ توسط رابطه زیر تعیین خواهد شد:

$$u^\pm(t) = -R^{\pm^{-1}}(t)B^{\pm T} k^\pm(t)x^\pm(t). \quad (25)$$

۴ نتایج عددی

در این بخش، برای نشان دادن کارایی روش ارائه شده، چند مسئله کنترل بهینه درجه دوم بازه‌ای به فرم کلی (۱)-(۳) را حل کرده و نتایج حاصل را با نتایج به دست آمده از سایر روش‌ها مقایسه می‌کنیم. برای این منظور، با به دست آوردن نامعادلات ریکاتی (۲۴) برای هر مسئله و حل آن با استفاده از روش گفته شده در بخش قبل، مقادیر بهینه متغیرهای حالت و کنترل تعیین می‌شود. در این بخش، از جعبه ابزار بازه‌ای اینتلب^۸ نرم افزار متلب برای به دست آوردن جواب های بازه‌ای مسائل بیان شده، استفاده کرده ایم.

مثال ۱.۴. جواب های بهینه مسئله کنترل بهینه بازه‌ای زیر را بیابید.

$$J^\pm(x^\pm(t), t) = \frac{1}{4}x^{\pm 2}(1) + \int_0^1 u^{\pm 2}(t), \quad (26)$$

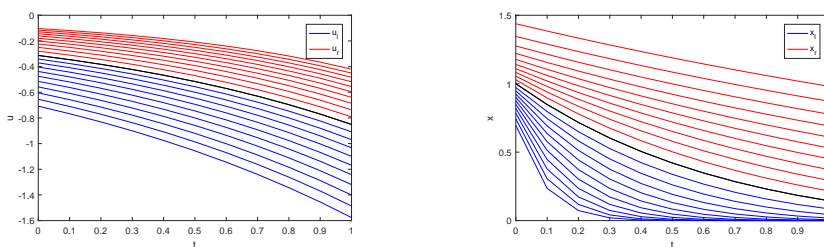
به طوری که سیستم دینامیکی و مقادیر اولیه به صورت زیر داده شده‌اند:

$$x'^{\pm} = u^\pm(t) \ominus_{gH} r^\pm x^\pm(t), \quad (27)$$

$$x^\pm(0) = 1, \quad (28)$$

که در آن $r^\pm = [\alpha, 3 - 2\alpha]$ ، $0 \leq \alpha \leq 1$. همچنین، $A^\pm = -r^\pm$ ، $B^\pm = 1$

⁸INTLAB



شکل ۱: توابع ارزیابی شده $x^{\pm}(t)$ و $u^{\pm}(t)$ برای مثال ۱۰۴ و به ازای مقادیر مختلف $\alpha = 0, 0.1, \dots, 1$

با توجه به روابط (۲۴)، نامعادلات ریکاتی برای مسئله $R^{\pm} = 1$ و $Q^{\pm} = 0$ به فرم زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} \left(k'^{\pm}(t) \ominus_{gH} \Upsilon r^{\pm} k^{\pm}(t) \ominus_{gH} k^{\Upsilon \pm}(t) \right)^{-} &\leq 0, \\ \left(k'^{\pm}(t) \ominus_{gH} \Upsilon r^{\pm} k^{\pm}(t) \ominus_{gH} k^{\Upsilon \pm}(t) \right)^{+} &\geq 0. \end{aligned} \quad (29)$$

با جایگزینی مقدار حدی $k^{\pm}(1) = \frac{1}{\Upsilon}$ ، جواب نامعادله ریکاتی عبارت است از:

$$k^{\pm}(t) = \frac{1}{e^{(\Upsilon r^{\pm}(t-1))} - 1}.$$

بنابراین، طبق رابطه (۲۵)، برای کنترل بهینه خواهیم داشت:

$$u^{\pm}(t) = \frac{-x^{\pm}(t)}{e^{(\Upsilon r^{\pm}(1-t))} - 1}. \quad (30)$$

با جایگزینی رابطه (۳۰) در سیستم دینامیکی (۲۷) و با استفاده از شرط مرزی (۲۸)، متغیرهای کنترل و وضعیت به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$u^{*\pm}(t) = \frac{-\Upsilon r^{\pm} e^{-r^{\pm}t} + e^{-r^{\pm}(\Upsilon-t)}}{e^{\Upsilon r^{\pm}(t-1)} - 1 (\Upsilon r^{\pm} \ominus_{gH} e^{(-\Upsilon r^{\pm})})}, \quad x^{*\pm}(t) = \frac{\Upsilon r^{\pm} e^{-r^{\pm}t} \ominus_{gH} e^{r^{\pm}(t-\Upsilon)}}{\Upsilon r^{\pm} \ominus_{gH} e^{-\Upsilon r^{\pm}}}.$$

اگرچه مسئله (۲۶)-(۲۸) قبلاً توسط فرهادی نیا در مرجع [۸] مورد بررسی قرار گرفته است، اما روش پیشنهادی ما عملکرد بهتری نسبت به تکنیک بیان شده در مرجع [۸]

جدول ۱: مقایسه نتایج عددی بدست آمده از مثال ۱.۴ برای متغیرهای x^\pm و u^\pm به ازای $\alpha = 0.5$.

t	interval LQR		fuzzy PMP [8]	
	$x^\pm(t)$	$u^\pm(t)$	$[x_l, x_r]$	$[u_l, u_r]$
0.0	[0.8492, 1.1776]	[-0.5154, -0.1608]	[1.0000, 1.0000]	[-0.0746, -0.5820]
0.1	[0.5132, 1.1048]	[-0.5628, -0.1820]	[0.8112, 0.8930]	[-0.0912, -0.6118]
0.2	[0.3025, 1.0362]	[-0.6146, -0.2061]	[0.6550, 0.7882]	[-0.1113, -0.6432]
0.3	[0.1722, 0.9716]	[-0.6711, -0.2333]	[0.5251, 0.6855]	[-0.1360, -0.6762]
0.4	[0.0935, 0.9106]	[-0.7328, -0.2641]	[0.4162, 0.5844]	[-0.1661, -0.7108]
0.5	[0.0475, 0.8531]	[-0.8002, -0.2990]	[0.3240, 0.4848]	[-0.2029, -0.7473]
0.6	[0.0221, 0.7989]	[-0.8738, -0.3385]	[0.2449, 0.3864]	[-0.2478, -0.7856]
0.7	[0.0090, 0.7476]	[-0.9542, -0.3831]	[0.1755, 0.2889]	[-0.3026, -0.8259]
0.8	[0.0031, 0.6992]	[-1.0420, -0.4337]	[0.1133, 0.1922]	[-0.3696, -0.8682]
0.9	[0.0008, 0.6534]	[-1.1378, -0.4910]	[0.0555, 0.0960]	[-0.4515, -0.9127]
1.0	[0.0000, 0.6001]	[-1.2425, -0.5558]	[0.0000, 0.0000]	[-0.5514, -0.9595]

دارد. زیرا همانطور که در جدول ۱ مشاهده می‌شود، بدیهی است که نتایج بدست آمده برای کنترل بهینه در [۸] کاملاً نادرست بوده و عدد بازه‌ای ارائه نشده است (کران پایین بزرگتر از کران بالا است!). بعلاوه، در مرجع [۸]، کران‌های برای تمام عدم قطعیت‌ها محاسبه نشده است. به این دلیل ما از مدل بازه‌ای استفاده کردیم تا بتوانیم کران‌های جواب‌های بهینه را از محاسبه تمام بازه جواب با اطمینان به دست آوریم. از این‌رو، جواب‌های بهینه به دست آمده از نتایج بهتری برخوردار هستند. همانطور که مشخص است، عرض بازه اضافی ناخواسته‌ای که در محدوده بازه نهایی مقدار تابع ظاهر می‌شود، باعث شده است که نتیجه به دست آمده از روش پیشنهادی در $t = 0$ شرایط اولیه $x^\pm(0) = [1, 1]$ را شامل شود. شکل ۱ کران‌های پایین و بالا را برای متغیرهای x^\pm و u^\pm به ازای مقادیر مختلف ۱، ۰/۱، ۰، $\alpha = 0.5$ نشان می‌دهد. مطابق این شکل، وقتی α به یک نزدیک می‌شود، جواب‌های مسئله به مقدار واقعی نزدیک می‌شود. بنابراین، شرط اولیه مسئله نیز برآورده می‌شود.

مثال ۲.۴. حداقل مقدار تابعی زیر را بدست آورید.

$$J^\pm(x^\pm(t), t) = x^{\pm 2}(1) + \int_0^1 u^{\pm 2}(t), \quad (31)$$

به طوری که سیستم دینامیک

$$x_1^{\pm\prime} = u^{\pm}(t) \ominus_{gH} \gamma x_1^{\pm}(t), \quad x_2^{\pm\prime} = \gamma x_1^{\pm}(t), \quad (32)$$

در شرایط مرزی زیر صدق کند:

$$x_1^{\pm}(\circ) = x_2^{\pm}(\circ) = (1 + \alpha, \gamma - \alpha). \quad (33)$$

سیستم دینامیکی مسئله (۳۱)-(۳۳) را می‌توان به فرم ماتریسی زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{bmatrix} x_1^{\pm\prime} \\ x_2^{\pm\prime} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \circ & -\gamma \\ \gamma & \circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{\pm} \\ x_2^{\pm} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ \circ \end{bmatrix} u^{\pm}(t), \quad (34)$$

که در آن، $A = \begin{bmatrix} \circ & -\gamma \\ \gamma & \circ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 \\ \circ \end{bmatrix}$ در نظر گرفته شده است. برای حل این مسئله با استفاده از روش گفته شده در بخش قبل، ابتدا تابع هامیلتونی متناظر با آن را به صورت زیر تشکیل می‌دهیم:

$$H^{\pm}(x^{\pm}(t), u^{\pm}(t), t) = u^{\pm\gamma}(t) + \frac{\partial J^{\pm}}{\partial x^{\pm}}(Ax^{\pm}(t) + Bu^{\pm}(t)).$$

شرط لازم بهینگی برای اینکه تابعی H^{\pm} حداقل شود این است که:

$$\frac{\partial H^{\pm}}{\partial u^{\pm}} = \gamma u^{\pm}(t) + B \frac{\partial J^{\pm}}{\partial x^{\pm}} = \circ.$$

با حل معادله فوق، قانون کنترل بهینه به فرم زیر بدست می‌آید:

$$u^{\pm}(t) = -\frac{1}{\gamma} B^T \frac{\partial J^{\pm}}{\partial x^{\pm}}. \quad (35)$$

با توجه به اینکه $\circ < \gamma = 2$ ، شرط کافی برای بهینگی، حدس یک جواب می‌باشد

که در سیستم دینامیکی و شرایط حدی مسئله صدق کند. برای این منظور یک جواب به فرم زیر در نظر می‌گیریم:

$$J^\pm = x^{\nu^\pm(1)} k^\pm(t). \quad (36)$$

با جایگزینی روابط (۳۵) و (۳۶) در نامعادله ژاکوبی بلمن بازه‌ای (۱۹) داریم:

$$\left(k'^{\pm}(t) x^{\nu^\pm(1)} + \nu A k^\pm(t) x^{\nu^\pm(t)} \ominus_{gH} B k^{\nu^\pm}(t) x^{\nu^\pm(1)} B^T \right)^- \leq 0,$$

$$\left(k'^{\pm}(t) x^{\nu^\pm(1)} + \nu A k^\pm(t) x^{\nu^\pm(t)} \ominus_{gH} B k^{\nu^\pm}(t) x^{\nu^\pm(1)} B^T \right)^+ \geq 0.$$

حاصل ضرب Ak^\pm که در معادله فوق ظاهر شده است، می‌تواند به صورت حاصل جمع ماتریس‌های متقارن و پادمتقارن زیر نوشته شود:

$$k^\pm A = \frac{1}{\nu} (k^\pm A + (k^\pm A)^T) + \frac{1}{\nu} (k^\pm A \ominus_{gH} (k^\pm A)^T),$$

که تنها قسمت متقارن آن موثر می‌باشد. از طرفی، چون این معادله برای تمام $x^\pm(t)$ برقرار است، لذا داریم:

$$\left(k'^{\pm}(t) + \nu A k^\pm(t) \ominus_{gH} k^{\nu^\pm}(t) \right)^- \leq 0, \quad (37)$$

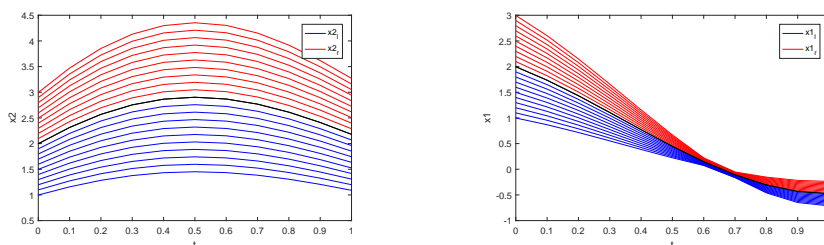
$$\left(k'^{\pm}(t) + \nu A k^\pm(t) \ominus_{gH} k^{\nu^\pm}(t) \right)^+ \geq 0.$$

که همان نامعادلات ریکاتی بازه‌ای می‌باشند. با استفاده از روش برنولی نامعادلات (۳۷) را با استفاده از تغییر متغیر زیر به معادلات درجه یک تبدیل می‌کنیم:

$$w^\pm = k^{-\nu^\pm}, \quad w'^{\pm} = -k^{-\nu^\pm} k'^{\pm},$$

بنابراین داریم:

$$w'^{\pm} - \nu A w^\pm + \nu = 0.$$



شکل ۲: توابع ارزیابی شده $x_1^{\pm}(t)$ و $x_2^{\pm}(t)$ برای مثال ۲.۴ به ازای $\alpha = 0, 0.1, \dots, 1$.

با استفاده از تبدیل لاپلاس معادله ماتریسی فوق را به صورت زیر حل می‌کنیم:

$$sw^{\pm}(s) - 2Aw^{\pm}(s) - \frac{1}{s} = 0 \Rightarrow w^{\pm}(s)(sI - 2A) = \frac{1}{s},$$

$$w^{\pm}(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(2t) & \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(2t) \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos(2t) & \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(2t) \end{bmatrix},$$

$$k^{\pm}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \sin(2t) & -\cos(2t) \\ \cos(2t) & \sin(2t) \end{bmatrix}.$$

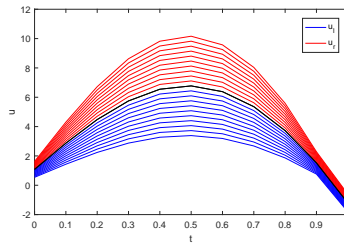
قانون کنترل بهینه طبق رابطه (۳۵) به فرم زیر به دست می‌آید:

$$u^{\pm}(t) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \sin(2t) & \cos(2t) \end{bmatrix} x^{\pm}(t). \quad (38)$$

با استفاده از تبدیل لاپلاس و جایگزینی رابطه (۳۸) در معادله (۳۴) داریم:

$$\begin{bmatrix} x_1^{\pm} \\ x_2^{\pm} \end{bmatrix} = \frac{4}{5} [1 + \alpha, 3 - \alpha] \begin{bmatrix} \cos(2t) + (e^{(2t-2)} - e^{-(2t-2)}) & \sin(2t) + (e^{(2t-2)} + e^{-(2t-2)}) \\ -\sin(2t) + (-e^{(2t-2)} + e^{-(2t-2)}) & \cos(2t) + (e^{(2t-2)} - e^{-(2t-2)}) \end{bmatrix}.$$

شکل فازی مسئله (۳۱)-(۳۳) قبلاً توسط نجاریان در مرجع [۱۷] مورد بررسی قرار گرفته است. روش پیشنهادی ما یک روش تحلیلی برای حل این مسئله تنظیم کننده خطی درجه دوم بازه‌ای است. این روش در مقایسه با روش مطرح شده در مرجع [۱۷] عملکرد بهتری دارد زیرا داده‌های موجود در مدل‌های فازی اغلب به دلیل خطاهای گرد کردن و



شکل ۳: تابع ارزیابی شده $u^{*\pm}(t)$ برای مثال ۲.۴ به ازای $\alpha = 0, 0.1, \dots, 1$.

تقریب، دارای عدم قطعیت می‌باشند. هدف استفاده از مدل بازه‌ای، به دست آوردن کران‌های پایین و بالا برای همه عدم قطعیت‌ها و خطاهایی است که در محاسبات رخ می‌دهد. بنابراین مزیت مدل بازه‌ای نسبت به مدل فازی این است که می‌توان کران‌های پایین و بالا را با اطمینان در محاسبات بدست آورد. مقادیر به دست آمده برای متغیرهای حالت $x_1^{*\pm}(t)$ ، $x_2^{*\pm}(t)$ و متغیر کنترل $u^{*\pm}(t)$ به ترتیب در شکل‌های ۲ و ۳ رسم شده‌اند به طوری که منحنی‌های آبی و قرمز کران‌های پایین و بالای جواب بازه‌ای را برای مقادیر مختلف $\alpha = 0, 0.1, \dots, 0.9$ ، و منحنی سیاه، جواب به ازای $\alpha = 1$ نشان می‌دهد که در این حالت کران‌های بالا و پایین بر هم منطبق شده‌اند. همچنین، در شکل ۲، وقتی آلفا به یک نزدیک می‌شود، پاسخ مسئله به پاسخ واقعی نزدیک می‌شود. بنابراین، شرایط اولیه برای $x_1^{*\pm}(t)$ و $x_2^{*\pm}(t)$ برآورده می‌شوند.

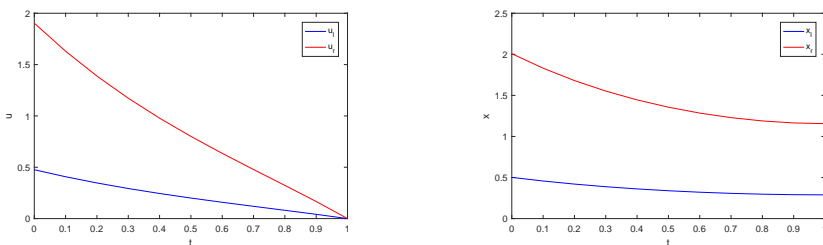
مثال ۳.۴. جواب‌های بهینه مسئله کنترل بهینه بازه‌ای درجه دوم زیر را بدست آورید:

$$J^\pm(x^\pm(t), u^\pm(t), t) = \int_0^1 2e^{-t} u^{\pm 2}(t) + \frac{1}{4} e^{-t} x^{\pm 2}(t), \quad (39)$$

$$x'^{\pm} = \frac{1}{4} x^\pm(t) + u^\pm(t), \quad (40)$$

$$x^\pm(0) = [\alpha, 3 - 2\alpha]. \quad (41)$$

با توجه به اینکه $A^\pm = \frac{1}{4}$ ، $A^\pm = \frac{1}{4}$ ، $R^\pm = \frac{1}{4} e^{-t}$ و $Q^\pm = 2e^{-t}$ ، با توجه به روابط



شکل ۴: توابع ارزیابی شده $x^{\pm}(t)$ و $u^{\pm}(t)$ از مثال ۴.۳ برای $\alpha = 0.5$.

(۲۴)، نامعادلات ریکاتی برای مسئله (۳۹)–(۴۱) به فرم زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} \left(k'^{\pm}(t) + k^{\pm}(t) + \frac{1}{\gamma} e^{-t} \Theta_{gH} \frac{1}{\gamma} e^t k^{\mp}(t) \right)^- &\leq 0, \\ \left(k'^{\pm}(t) + k^{\pm}(t) + \frac{1}{\gamma} e^{-t} \Theta_{gH} \frac{1}{\gamma} e^t k^{\mp}(t) \right)^+ &\geq 0. \end{aligned} \quad (42)$$

با جایگذاری مقدار حدی $k^{\pm}(1) = 0$ ، جواب نامعادله ریکاتی (۴۲) به فرم زیر به دست می‌آید:

$$k^{\pm}(t) = 3e^{-t} - 3e^{-1},$$

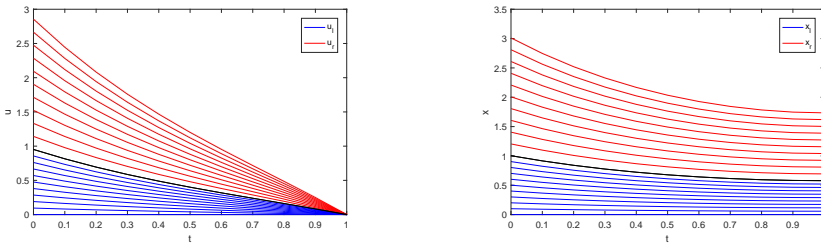
و به این ترتیب، کنترل بهینه با استفاده از رابطه (۲۵)، عبارت می‌شود از:

$$u^{\pm}(t) = \frac{-x^{\pm}(t)}{2} (3 - 3e^{t-1}). \quad (43)$$

با جایگزینی رابطه (۴۳) در سیستم دینامیکی (۴۰) و با استفاده از شرط مرزی (۴۱)، متغیرهای کنترل و وضعیت به فرم زیر بدست خواهند آمد:

$$x^{\pm}(t) = \frac{[\alpha, 3 - 2\alpha]}{1.73} e^{1.5(e^{t-1}-t)},$$

$$u^{\pm}(t) = \frac{[\alpha, 3 - 2\alpha]}{3.46} e^{1.5(e^{t-1}-t)} (3 - 3e^{t-1}).$$



شکل ۵: توابع ارزیابی شده $x^{\pm}(t)$ و $u^{\pm}(t)$ از مثال ۴.۳ برای $\alpha = 0, 0.1, \dots, 1$.

متغیرهای کنترل و وضعیت در شکل‌های ۴ و ۵ و به ترتیب به ازای $\alpha = 0.5$ و مقادیر مختلف $\alpha = 0, 0.1, \dots, 1$ رسم شده‌اند. نتایج شکل ۵ نشان می‌دهد که وقتی α به یک نزدیک می‌شود، پاسخ‌های مسئله به پاسخ واقعی نزدیک می‌شوند. بنابراین، شرط اولیه $x^{\pm}(0)$ نیز برآورده می‌شود.

۵ نتیجه‌گیری

به منظور بهینه‌سازی مسئله تنظیم‌کننده خطی درجه دوم تحت عدم قطعیت از نوع بازه‌ای نیاز به یک قانون کنترل بهینه بازه‌ای داریم. برای این منظور، با استفاده از اصل بهینگی بلمن و نامعادلات همیلتون-ژاکوبی-بلمن بازه‌ای، مسئله کنترل بهینه بازه‌ای را به یک دستگاه نامعادلات دیفرانسیل بازه‌ای به نام نامعادلات بازه‌ای ریکاتی تبدیل می‌کنیم. برای حل این دستگاه نامعادلات، از روابط شمول حساب بازه‌ای و همچنین برای غلبه بر عرض بازه اضافی ایجاد شده در محاسبات بازه‌ای، از تفاضل تعمیم یافته هوکوها را استفاده شده است. مزیت روش پیشنهادی نسبت به سایر روش‌ها در این است که در این روش به دلیل در نظر گرفتن کل بازه در متغیرهای بازه‌ای، می‌توانیم کران بالا و پایین جواب‌های بهینه را با قطعیت به دست آوریم. در انتها، به منظور نشان دادن کارآمدی روش ارائه شده، چند مثال از مسائل کنترل بهینه خطی درجه دوم بازه‌ای بیان شده است که با مقایسه آنها با سایر روش‌ها به صراحت کارآمدی روش ارائه شده نتیجه می‌شود.

مراجع

- [۱] الله دادی، م. برنامه ریزی خطی بازه‌ای، انتشارات دانشگاه سیستان و بلوچستان. ۱۴۰۰.
- [2] Bertin, E., Brendel, E., H'eriss'e, B., Sandretto, J.A.D. and Chapoutot, A. (2021). Prospects on solving an optimal control problem with bounded uncertainties on parameters using interval arithmetics. *Acta Cybernetica*, 1-25.
- [3] Bliss, G.A. (1914) The Weierstrass E-function for problems of the calculus of variations in space. *Transactions of the American Mathematical Society*. 15(4), 369-378.
- [4] Bolza, O. *Lectures on the Calculus of Variations*. Courier Dover Publications. 2018.
- [5] Brunt, B.V. *The Calculus of Variations*. Springer-Verlag, Heidelberg. 2004.
- [6] Campos, J.R., Assunção, E., Silva, G.N., Lodwick, W.A., Teixeira, M.C. (2019) Discrete-time interval optimal control problem. *International Journal of Control*. 92(8), 1778-1784.
- [7] Campos, J.R., Assuncao, E., Silva, G.N., Lodwick, W.A., Teixeira, M.C.M., Maqui-Huamn, G.G. (2020) Fuzzy interval optimal control problem. *Fuzzy sets and systems*. 385, 169-181.
- [8] Farhadinia, B. (2014) Pontryagin's minimum principle for fuzzy optimal control problems. *Iranian Journal of Fuzzy Systems*. 11(2), 27-43.
- [9] Ghosh, D., Chauhan, R.S., Mesiar, R., Debnath, A.K. (2020) Generalized Hukuhara Gateaux and Frechet derivatives of interval-valued functions and their application in optimization with interval-valued functions. *Information Sciences*. 510, 317-340.

- [10] Hansen E, Walster GW, eds *Global optimization using interval analysis: revised and expanded* (264). CRC Press. 2003.
- [11] Huang, Y., Lu, W.M. (1996) Nonlinear optimal control: Alternatives to Hamilton-Jacobi equation. *In Proceedings of 35th IEEE conference on decision and control IEEE*. 4, 3942-3947.
- [12] Kamien, M.I., Schwartz, N.L. *Dynamic optimization: the calculus of variations and optimal control in economics and management*. courier corporation. 2012.
- [13] Kirk, D.E. (1967) An introduction to dynamic programming. *IEEE Transactions on Education*. 10(4), 212-219.
- [14] Leal, U.A.S. *Incerteza intervalar em otimização e controle [Interval uncertainty in optimization problems and control] (Doctoral dissertation)*. Universidade Estadual Paulista, São José do Rio Preto (in Portuguese). 2015.
- [15] Lodwick, W.A., Jamison, K.D. (2018) A Constraint Fuzzy Interval Analysis approach to fuzzy optimization. *Information Sciences*. 426, 38-49.
- [16] Lupulescu, V., Hoa, N.V. (2017) Interval Abel integral equation. *Soft Computing*. 21, 2777-2784.
- [17] Najariyan M., Farahi M.H. (2013) Optimal control of fuzzy linear controlled system with fuzzy initial conditions. *Iranian Journal of Fuzzy Systems*. 10(3): 21-35.
- [18] Razmjoooy, N., and Ramezani, M. (2019) Interval structure of Runge-Kutta methods for solving optimal control problems with uncertainties. *Computational Methods for Differential Equations*. 7(2), 235-251.
- [19] Stefanini, L. (2010) A generalization of Hukuhara difference and division for interval and fuzzy arithmetic. *Fuzzy Sets and Systems*. 161, 1564-1584.

- [20] Stefanini, L., Bede, B. (2009) Generalized Hukuhara differentiability of interval-valued functions and interval differential equations. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods Applications*. 71(3-4), 1311-1328.
- [21] Van Kampen, E. *Global optimization using interval analysis: interval optimization for aerospace applications*. 2010.
- [22] Wang, H., Rodriguez-Lopez, R. (2023) On the first-order autonomous interval-valued difference equations under gH-difference. *Iranian Journal of Fuzzy Systems*. 20(2), 21-32.
- [23] Wang, H., Rodríguez-López, R., Khastan, A. (2021) On the stopping time problem of interval-valued differential equations under generalized Hukuhara differentiability. *Information Sciences*. 579, 776-795.
- [24] Zarei, H., Khastan, A., Rodríguez-López, R. (2023) Suboptimal control of linear fuzzy systems. *Fuzzy Sets and Systems*. 453, 130-163.