سیستم‌های فازی و کاربردها
شاپای چاپی: ۴۴۰۹-۲۷۱۷
سال ششم، شماره اول (بهار و تابستان ۱۴۰۲)
شاپای الکترونیکی: ۳۹۸۴-۲۷۱۷
صص. ۲۶۹ تا ۲۸۵
DOI:10.22034/JFSA.2023.392890.1169

گراف‌های فازی معکوس دوقطبی

مجید خلیلی، رجبعلی برزوئی* و داوود ابراهیمی بقاء

گروه ریاضی، واحد تهران مرکزی، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران
گروه ریاضی، دانشگاه شهید بهشتی، تهران، ایران
گروه ریاضی، واحد تهران مرکزی، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران
تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۰۱/۲۳ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۰۶/۱۱

نوع مقاله: علمی-پژوهشی

چکیده

در این مقاله گراف‌های فازی معکوس دوقطبی معرفی می‌شوند. عملیات متعددی بر روی چنین گراف‌هایی ساخته شده و اینکه آیا این عملیات، گرافی فازی معکوس دوقطبی را نتیجه می دهد، بررسی می شود. نوعی از گراف‌های فازی معکوس دوقطبی با عنوان گراف‌های فازی معکوس دوقطبی قوی مطالعه شده‌اند. گراف متمم و آستانه‌ی وابسته به یک گراف فازی معکوس دوقطبی معرفی شده و نتیجه می شود که متمم یک گراف فازی معکوس دوقطبی، یک گراف فازی معکوس دو قطبی قوی است. یک وضعیت شمول در خصوص گراف‌های آستانهٔ مربوط به دو گراف فازی معکوس دوقطبی با شرایط خاص، نتیجه خواهد شد.

عبارات و کلمات کلیدی: دوقطبی، I- فازی، گراف BI- فازی، گراف SBI- فازی، گراف آستانه.

Email(s): majidkhalili@gmail.com, borzooei@sbu.ac.ir and e-bagha@yahoo.com.

Mathematics Subject Classification: 05C75; 05C25

۱ سرآغاز

کار لئونارد اویلر [1] بر مسئله‌ی هفت پل کونیگزبرگ [2] را می‌توان آغاز نظریه‌ی گراف‌های قطعی دانست. نظریه‌ی گراف‌های قطعی به مسائل متعددی وابسته به شبکه، بهینه‌سازی، تخصیص و پژوهش عملیاتی پاسخ می دهد. با این حال در تمام این مسائل، گراف‌های قطعی قادر به بیان عدم قطعیت پارامترها نیستند. به عنوان مثال میزان تاثیرگذاری و محبوبیت در ارتباطات یک شبکه اجتماعی نمی‌تواند به کمک گراف‌های قطعی بیان شود. برای حل این مشکل مفهوم فازی بر روی گراف‌های قطعی پیاده‌سازی شد. بر این اساس نظریه‌ی گراف‌های فازی توسط روزنفلد [3] پایه‌گذاری شد [۵]. روزنفلد گراف فازی را با ارتقاء مفهوم اولیهٔ رابطه فازی بر یک مجموعهٔ قطعی (غیر فازی) که قبلا توسط زاده [۸]، تامورا [4] و همکاران [۷] و همچنین کافمن [5] [۴] معرفی شده بود، بنیان‌گذاری کرد. به این صورت که او رابطه‌ی فازی را بر یک زیرمجموعه‌ی فازی تعریف کرد. در یکی از توسعه‌های گراف‌های فازی، اکرم [6] گراف‌های فازی دوقطبی [۱] را برپایه‌ی مجموعه‌های فازی دوقطبی [۹، ۱۰] معرفی کرد. مجموعه‌های فازی دوقطبی توسعه‌ای از مجموعه‌های فازی هستند که محدوده درجه عضویت آنها بازه‌ی $[-۱, ۱]$ است. در یک مجموعه فازی دوقطبی، درجه عضویت صفر یک عضو به این معنی است که آن عضو به ویژگی مربوطه بی ربط است. درجه عضویت در بازه‌ی $(۰, ۱]$ برای یک عضو نشان می دهد که آن عضو تا حدودی ویژگی را برآورده می کند و درجه عضویت $[-۱, ۰)$ نشان می دهد که یک عضو به طور ضمنی تا حدودی ضد ویژگی مورد نظر را برآورده می کند. بارزترین ویژگی نظری تعریف گراف‌های فازی توسط روزنفلد، معرفی رابطه‌ای خاص بر مجموعه‌های فازی است. گراف‌های فازی معکوس (گراف‌های I-فازی) که توسط برزویی و همکاران [۳، ۲] معرفی شد از ویژگی خاص گراف‌های فازی پیروی نمی‌کنند. این مقاله در توسعه‌ی گراف‌های I-فازی، به معرفی گراف‌های فازی معکوس دوقطبی می‌پردازد.

[1] Leonhard Euler
[2] Königsberg
[3] Rosenfeld
[4] Tamura
[5] Kaufmann
[6] Akram

۲ پیشنیازها

در این بخش مفاهیمی را می آوریم که از یک جهت به معرفی گراف های فازی معکوس می پردازد و از جهت دیگر پیشنیازهایی که برای بیان مفهوم گراف های فازی دو قطبی ضروری است آماده می کند.

تعریف ۱.۲. [۳]. فرض کنیم σ یک زیرمجموعه‌ی فازی روی X باشد. نگاشت $\mu : X \times X \to [0, 1]$ یک *رابطه‌ی فازی معکوس (رابطه‌ی I- فازی)* بر σ نامیده می‌شود، درصورتی که بازای هر r و s در X، $\mu(r, s) \geq \sigma(r) \wedge \sigma(s)$.

در اینجا چون بین (r, s) و (s, r) تفاوتی قائل نیستیم، لذا از این پس به جای $\mu(r, s)$ از نماد $\mu(rs)$ استفاده می‌کنیم.

تعریف ۲.۲. [۳]. اگر $\Gamma^* = (V, E)$ یک گراف قطعی، δ یک زیرمجموعه‌ی فازی بر V و ε یک رابطه‌ی فازی معکوس بر δ باشد، آنگاه $\Gamma^I = (V, \delta, \varepsilon)$ یک *گراف فازی معکوس (گراف I- فازی)* بر Γ^* نامیده می‌شود.

زیرمجموعه‌ی غیر تهی X، نگاشت $\sigma^+(x) : X \to [0, 1]$ و نگاشت $\sigma^-(x) : X \to [-1, 0]$ را در نظر بگیرید. در این صورت شیئی به شکل $\Sigma = \{(x, \sigma^+, \sigma^-) | x \in X\}$ یک مجموعه‌ی فازی دوقطبی بر X نامیده می‌شود. عضویت مثبت σ^+ میزان توافق یک عضو با ویژگی مورد نظر در مجموعه‌ی فازی دوقطبی Σ را نشان می‌دهد و عضویت منفی σ^- میزان توافق یک عضو را با ویژگی متقابل ضمنی در Σ نشان می دهد [۱]. توجه کنیم که در اینجا به جای $\Sigma = \{(x, \sigma^+, \sigma^-) | x \in X\}$ از اختصار $\Sigma = (\sigma^+, \sigma^-)$ و یا حتی به طور خلاصه تر از $\Sigma_{\sigma^+, \sigma^-}$ استفاده می‌شود. نگاشت $I = (\mu^+, \mu^-) : X \times X \to [-1, 1] \times [-1, 1]$ که در آن بازای هر (r, s) در $X \times X$، $\mu^+(rs) \in [0, 1]$ و $\mu^-(rs) \in [-1, 0]$ یک رابطه‌ی فازی دوقطبی بر X نامیده می شود. با این مفروضات، $I = (\mu^+, \mu^-)$ یک رابطه‌ی فازی دوقطبی بر $\Sigma = (\sigma^+, \sigma^-)$ است در صورتی که بازای هر r و s در X، $\mu^+(rs) \leq \sigma^+(r) \wedge \sigma^+(s)$ و $\mu^-(rs) \geq \sigma^-(r) \vee \sigma^-(s)$ [۹]. سه‌تایی $\Gamma = (V, \Sigma, I)$ یک گراف فازی دوقطبی از $\Gamma^* = (V, E)$ نامیده می‌شود، در صورتی که $\Sigma = (\sigma^+, \sigma^-)$ یک مجموعه‌ی فازی دوقطبی بر V و $I = (\mu^+, \mu^-)$ تعریف شده بر

$E \subseteq V \times V$ یک رابطه‌ی فازی دوقطبی بر Σ باشد [۱]. در ادامه به ترتیب اختصارات μ^+_{rs}، μ^-_{rs}، σ^+_r و σ^-_r را برای $\mu^+(rs)$، $\mu^-(rs)$، $\sigma^+(r)$ و $\sigma^-(r)$ بکار خواهیم برد.

در یک گراف فازی دوقطبی $\Gamma = (V, \Sigma_{\sigma^+,\sigma^-}, I_{\mu^+,\mu^-})$ که بر $\Gamma^* = (V, E)$ تعریف شده است، درجه‌ی مثبت یک رأس v در Γ برابر است با

$$d^+(v) = \sum_{vw \in E} \mu^+(vw).$$

همچنین درجه‌ی تجمعی مثبت رأس v به صورت $dt^+(v) = d^+(v) + \sigma^+(v)$ تعریف می‌شود. به طور مشابه درجه‌ی منفی و درجه‌ی تجمعی منفی یک رأس v در Γ به ترتیب

$$d^-(v) = \sum_{vw \in E} \mu^-(vw).$$

و $dt^-(v) = d^-(v) + \sigma^-(v)$ می‌باشند. درجه و درجه‌ی تجمعی یک رأس v به ترتیب به صورت $d(v) = (d^+(v), d^-(v))$ و $dt(v) = (dt^+(v), dt^-(v))$ تعریف می‌شوند. مرتبه و اندازه‌ی Γ را به ترتیب به $O(\Gamma)$ و $S(\Gamma)$ نشان می دهیم که به روش زیر محاسبه می‌شوند،

$$O(\Gamma) = \big(O^+(\Gamma), O^-(\Gamma)\big) = \left(\sum_{v \in V} \sigma^+(v), \sum_{v \in V} \sigma^-(v)\right)$$

$$S(\Gamma) = \big(S^+(\Gamma), S^-(\Gamma)\big) = \left(\sum_{vw \in E, v \neq w} \mu^+(vw), \sum_{vw \in E, v \neq w} \mu^-(vw)\right) [۶].$$

۳ گراف‌های فازی معکوس دوقطبی

در این بخش نوعی از گراف‌های فازی معکوس را که *گراف‌های فازی معکوس دوقطبی* (*گراف‌های BI- فازی*[7]) نامیده می‌شوند، معرفی خواهیم کرد.

تعریف ۱.۳. مجموعه‌ی غیرتهی X، یک مجموعه‌ی فازی دوقطبی $\Sigma = (\sigma^+, \sigma^-)$

[7] Bipolar inverse fuzzy graphs

و یک رابطه‌ی فازی دوقطبی $I = (\mu^+, \mu^-)$ را بر X در نظر بگیرید. در این صورت $I = (\mu^+, \mu^-)$ *یک رابطه‌ی فازی معکوس دوقطبی (به اختصار رابطه‌ی BI- فازی)* بر $\Sigma = (\sigma^+, \sigma^-)$ گفته می‌شود، اگر بازای هر r و s در X، $\mu^+_{rs} \geq \sigma^+_r \wedge \sigma^+_s$ و $\mu^-_{rs} \geq \sigma^-_r \vee \sigma^-_s$.

در ادامه به ترتیب اختصارات $\Sigma_{\sigma^+,\sigma^-}$ و I_{μ^+,μ^-} را برای $\Sigma = (\sigma^+, \sigma^-)$ و $I = (\mu^+, \mu^-)$ به کار می‌بریم.

تعریف ۲.۳. سه‌تایی $\Gamma = (V, \Sigma_{\sigma^+,\sigma^-}, I_{\mu^+,\mu^-})$ *یک گراف فازی معکوس دوقطبی (گراف BI- فازی)* از $\Gamma^* = (V, E)$ نامیده می‌شود، در صورتی که $\Sigma_{\sigma^+,\sigma^-}$ یک مجموعه‌ی فازی دوقطبی در V و I_{μ^+,μ^-} تعریف شده بر $E \subseteq V \times V$ یک رابطه‌ی BI- فازی بر $\Sigma_{\sigma^+,\sigma^-}$ باشد.

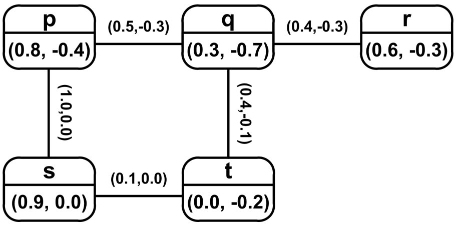
مثال ۳.۳. گراف قطعی $\Gamma^* = (V, E)$ که در آن $V = \{p, q, r, s, t\}$ و $E = \{pq, ps, qr, qt, st\}$ را در نظر بگیرید. قرار می دهیم

$$\Sigma_{\sigma^+,\sigma^-} = \langle (\frac{p}{۰/۸}, \frac{q}{۰/۳}, \frac{r}{۰/۶}, \frac{s}{۰/۹}, \frac{t}{۰/۰}), (\frac{p}{-۰/۴}, \frac{q}{-۰/۷}, \frac{r}{-۰/۳}, \frac{s}{۰/۰}, \frac{t}{-۰/۲}) \rangle$$

و

$$I_{\mu^+,\mu^-} = \langle (\frac{pq}{۰/۵}, \frac{ps}{۱/۰}, \frac{qr}{۰/۴}, \frac{qt}{۰/۴}, \frac{st}{۰/۱}), (\frac{pq}{-۰/۳}, \frac{ps}{۰/۰}, \frac{qr}{-۰/۳}, \frac{qt}{-۰/۱}, \frac{st}{۰/۰}) \rangle.$$

سه‌تایی $\Gamma = (V, \Sigma_{\sigma^+,\sigma^-}, I_{\mu^+,\mu^-})$ یک گراف BI- فازی می‌باشد (شکل ۱).



شکل ۱: *یک گراف فازی معکوس دوقطبی.*

با یک محاسبه‌ی ساده می‌توان دید که درجه‌ی رئوس، مرتبه و اندازه‌ی این گراف به صورت

زیر است:

$$d^+ = \langle \frac{p}{۱/۵}, \frac{q}{۱/۳}, \frac{r}{۰/۴}, \frac{s}{۱/۱}, \frac{t}{۰/۵} \rangle$$

$$d^- = \langle \frac{p}{-۰/۳}, \frac{q}{-۰/۷}, \frac{r}{-۰/۳}, \frac{s}{۰/۰}, \frac{t}{-۰/۱} \rangle$$

$$d = \langle \frac{p}{(۱/۵, -۰/۳)}, \frac{q}{(۱/۳, -۰/۷)}, \frac{r}{(۰/۴, -۰/۳)}, \frac{s}{(۱/۱, ۰/۰)}, \frac{t}{(۰/۵, -۰/۱)} \rangle$$

$$td^+ = \langle \frac{p}{۲/۳}, \frac{q}{۱/۶}, \frac{r}{۱/۰}, \frac{s}{۲/۰}, \frac{t}{۰/۵} \rangle$$

$$td^- = \langle \frac{p}{-۰/۷}, \frac{q}{-۱/۴}, \frac{r}{-۰/۶}, \frac{s}{۰/۰}, \frac{t}{-۰/۳} \rangle$$

$$td = \langle \frac{p}{(۲/۳, -۰/۷)}, \frac{q}{(۱/۶, -۱/۴)}, \frac{r}{(۱/۰, -۰/۶)}, \frac{s}{(۲/۰, ۰/۰)}, \frac{t}{(۰/۵, -۰/۳)} \rangle$$

$$O^+(\Gamma) = \sum_{u \in V} \sigma^+(u) = ۲/۶ \ \ , \ \ O^-(\Gamma) = -۱/۶$$

$$O(\Gamma) = (O^+(\Gamma), O^-(\Gamma)) = (۲/۶, -۱/۶)$$

$$S^+(\Gamma) = \sum_{(u,v) \in E} \mu^+(u,v) = ۲/۴ \ \ , \ \ S^-(\Gamma) = -۰/۷$$

$$S(\Gamma) = (S^+(\Gamma), S^-(\Gamma)) = (۲/۴, -۰/۷)$$

اکنون به معرفی چند عملیات بر روی گراف‌های BI- فازی می‌پردازیم.

تعریف ۴.۳. فرض کنیم $\mathit{\Gamma} = (V, \mathit{\Sigma}^۱_{\sigma^+_۱, \sigma^-_۱}, I^۱_{\mu^+_۱, \mu^-_۱})$ و $\mathit{\Lambda} = (U, \mathit{\Sigma}^۲_{\sigma^+_۲, \sigma^-_۲}, I^۲_{\mu^+_۲, \mu^-_۲})$ دو گراف BI- فازی بر $\mathit{\Gamma}^* = (V, E)$ و $\mathit{\Lambda}^* = (U, F)$ باشند. حاصلضرب دکارتی گراف‌های BI- فازی $\mathit{\Gamma}$ و $\mathit{\Lambda}$ را به $\mathit{\Gamma} \times \mathit{\Lambda} = (\mathit{\Sigma}^۱ \times \mathit{\Sigma}^۲, I^۱ \times I^۲)$ نمایش می دهیم. در اینجا $\mathit{\Sigma}^۱ \times \mathit{\Sigma}^۲$ مجهز به زیرمجموعه‌های فازی دوقطبی $(\sigma^+_۱ \times \sigma^+_۲, \sigma^-_۱ \times \sigma^-_۲)$ و $I^۱ \times I^۲$ مجهز به زیرمجموعه‌های فازی دوقطبی $(\mu^+_۱ \times \mu^+_۲, \mu^-_۱ \times \mu^-_۲)$ می‌باشند، که ضابطه‌ی این زیرمجموعه‌های فازی دوقطبی به صورت زیر تعریف می‌شود:

(الف) بازای هر (v, u) در $V \times U$،

$$(\sigma^+_۱ \times \sigma^+_۲)(v, u) = \sigma^+_۱(v) \wedge \sigma^+_۲(u),$$

$$(\sigma_1^- \times \sigma_2^-)(v,u) = \sigma_1^-(v) \vee \sigma_2^-(u).$$

(ب) بازای هر v در V و tu در F،

$$(\mu_1^+ \times \mu_2^+)((v,t)(v,u)) = \sigma_1^+(v) \vee \mu_2^+(tu)$$

$$(\mu_1^- \times \mu_2^-)((v,t)(v,u)) = \sigma_1^-(v) \vee \mu_2^-(tu)$$

(ج) بازای هر u در U و vw در E،

$$(\mu_1^+ \times \mu_2^+)((v,u)(w,u)) = \mu_1^+(vw) \vee \sigma_2^+(u)$$

$$(\mu_1^- \times \mu_2^-)((v,u)(w,u)) = \mu_1^-(vw) \vee \sigma_2^-(u).$$

مثال ۵.۳. گراف‌های BI- فازی $\Gamma = (V, \Sigma^1_{\sigma_1^+,\sigma_1^-}, I^1_{\mu_1^+,\mu_1^-})$ و $\Lambda = (U, \Sigma^2_{\sigma_2^+,\sigma_2^-}, I^2_{\mu_2^+,\mu_2^-})$ را با مفروضات زیر در نظر بگیرید (شکل ۲):

$$V = \{v_1, v_2\} \ , \ \ E = \{v_1v_2\} \ , \ \ U = \{u_1, u_2\} \ , \ \ F = \{u_1u_2\}$$

$$\Sigma^1_{\sigma_1^+,\sigma_1^-} = \langle (\frac{v_1}{0/7}, \frac{v_2}{0/4}), (\frac{v_1}{-0/3}, \frac{v_2}{-0/5}) \rangle$$

$$\Sigma^2_{\sigma_2^+,\sigma_2^-} = \langle (\frac{u_1}{0/8}, \frac{u_2}{0/9}), (\frac{u_1}{-0/4}, \frac{u_2}{-0/1}) \rangle$$

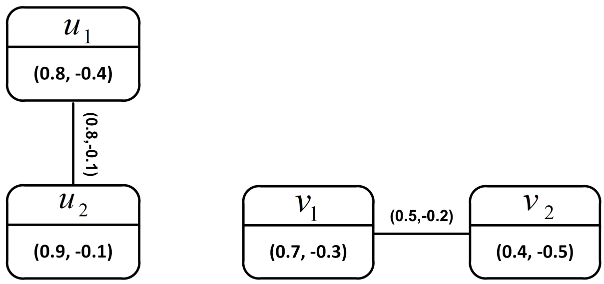
$$I^1_{\mu_1^+,\mu_1^-} = \langle (\frac{v_1v_2}{0/5}), (\frac{v_1v_2}{-0/2}) \rangle \ \text{و} \ I^2_{\mu_2^+,\mu_2^-} = \langle (\frac{u_1u_2}{0/8}), (\frac{u_1u_2}{-0/1}) \rangle$$

گراف حاصلضرب $\Gamma \times \Lambda = (\Sigma^1 \times \Sigma^2, I^1 \times I^2)$ به صورت زیر خواهد بود (شکل ۳):

$$\Sigma^1 \times \Sigma^2 = \langle (\frac{(v_1,u_1)}{0/7}, \frac{(v_1,u_2)}{0/7}, \frac{(v_2,u_1)}{0/4}, \frac{(v_2,u_2)}{0/4}), (\frac{(v_1,u_1)}{-0/3}, \frac{(v_1,u_2)}{-0/1}, \frac{(v_2,u_1)}{-0/4}, \frac{(v_2,u_2)}{-0/1}) \rangle$$

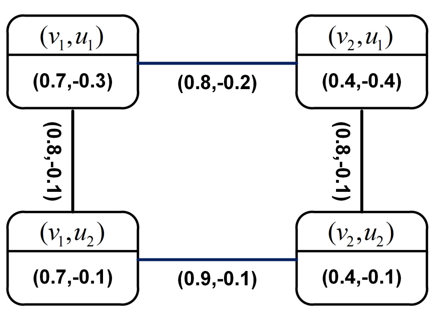
$$I^1 \times I^2 = \langle (\frac{(v_1,u_1)(v_1,u_2)}{0/8}, \frac{(v_1,u_1)(v_2,u_1)}{0/8}, \frac{(v_2,u_1)(v_2,u_2)}{0/8},$$

$$\frac{(v_1,u_2)(v_2,u_2)}{0.9}),(\frac{(v_1,u_1)(v_1,u_2)}{-0.1},\frac{(v_1,u_1)(v_2,u_1)}{-0.2},$$
$$\frac{(v_2,u_1)(v_2,u_2)}{-0.1},\frac{(v_1,u_2)(v_2,u_2)}{-0.1}))$$



(ب) $\Lambda = (U, \Sigma^{2}_{\sigma_2^+,\sigma_2^-}, I^{2}_{\mu_2^+,\mu_2^-})$ (آ) $\Gamma = (V, \Sigma^{1}_{\sigma_1^+,\sigma_1^-}, I^{1}_{\mu_1^+,\mu_1^-})$

شکل ۲: *گراف‌های BI- فازی Γ و Λ.*



شکل ۳: *گراف حاصلضرب Γ و Λ $(\Gamma \times \Lambda)$.*

گزاره ۶.۳. *اگر Γ و Λ دو گراف BI- فازی باشند، آنگاه $\Gamma \times \Lambda$ یک گراف BI- فازی است.*

اثبات. در نظر می گیریم، $\Gamma^* = (V,E)$ و $\Lambda^* = (U,F)$. می‌بایست درستی نامساوی‌های زیر را ثابت کنیم:

(الف) بازای هر v در V و tu در F،

$$(\mu_1^+ \times \mu_2^+)((v,t)(v,u)) \geq (\sigma_1^+ \times \sigma_2^+)(v,t) \wedge (\sigma_1^+ \times \sigma_2^+)(v,u) \qquad (1)$$

$$(\mu_1^- \times \mu_2^-)((v,t)(v,u)) \geq (\sigma_1^- \times \sigma_2^-)(v,t) \vee (\sigma_1^- \times \sigma_2^-)(v,u) \qquad (۲)$$

(ب) بازای هر u در U و vw در E،

$$(\mu_1^+ \times \mu_2^+)((v,u)(w,u)) \geq (\sigma_1^+ \times \sigma_2^+)(v,u) \wedge (\sigma_1^+ \times \sigma_2^+)(w,u) \qquad (۳)$$

$$(\mu_1^- \times \mu_2^-)((v,u)(w,u)) \geq (\sigma_1^- \times \sigma_2^-)(v,u) \vee (\sigma_1^- \times \sigma_2^-)(w,u) \qquad (۴)$$

برهان درستی نامساوی های ۲ و ۴ مشابه اثباتی است که برای گراف‌های فازی دوقطبی گفته می‌شود [۱]. نابرابری‌های ۱ و ۳ با روندی مشابه اثبات می شوند که در اینجا بررسی درستی ۱ را می‌آوریم. بازای هر v در V و tu در F،

$$(\mu_1^+ \times \mu_2^+)((v,t)(v,u)) = \sigma_1^+(v) \vee \mu_2^+(tu) \geq \sigma_1^+(v) \vee (\sigma_2^+(t) \wedge \sigma_2^+(u))$$

$$\geq \sigma_1^+(v) \wedge (\sigma_2^+(t) \wedge \sigma_2^+(u))$$

$$= (\sigma_1^+(v) \wedge (\sigma_2^+(t)) \wedge (\sigma_1^+(v) \wedge \sigma_2^+(u))$$

$$= (\sigma_1^+ \times \sigma_2^+)(v,t) \wedge (\sigma_1^+ \times \sigma_2^+)(v,u)$$

□

تعریف ۷.۳. فرض کنیم $\Gamma = (V, \Sigma^1_{\sigma_1^+,\sigma_1^-}, I^1_{\mu_1^+,\mu_1^-})$ و $\Lambda = (U, \Sigma^2_{\sigma_2^+,\sigma_2^-}, I^2_{\mu_2^+,\mu_2^-})$ دو گراف BI- فازی بر $\Gamma^* = (V,E)$ و $\Lambda^* = (U,F)$ باشند. ترکیب گراف‌های BI- فازی Γ و Λ را به $\Gamma[\Lambda] = (\Sigma^1 \circ \Sigma^2, I^1 \circ I^2)$ نمایش می دهیم که بر $\Gamma[\Lambda]^* = (V \times U, E^\circ)$ تعریف می‌شود. در اینجا

$$E^\circ = \{(v,t)(v,u) | v \in V, tu \in F\}$$

$$\cup \{(v,u)(w,u) | u \in U, vw \in E\}$$

$$\cup\{(v,t)(w,u)|vw \in E, t \neq u\}$$

همچنین $\Sigma^{۱} \circ \Sigma^{۲}$ مجهز به زیرمجموعه‌های فازی دوقطبی $(\sigma_{۱}^{+} \circ \sigma_{۲}^{+}, \sigma_{۱}^{-} \circ \sigma_{۲}^{-})$ و $I^{۱} \circ I^{۲}$ مجهز به زیرمجموعه‌های فازی دوقطبی $(\mu_{۱}^{+} \circ \mu_{۲}^{+}, \mu_{۱}^{-} \circ \mu_{۲}^{-})$ می‌باشند، که به ترتیب بر $V \times U$ و E° تعریف شده است. ضابطه‌ی این زیرمجموعه‌های فازی دوقطبی به صورت زیر است:

(الف) بازای هر (v,u) در $V \times U$،

$$(\sigma_{۱}^{+} \circ \sigma_{۲}^{+})(v,u) = \sigma_{۱}^{+}(v) \wedge \sigma_{۲}^{+}(u),$$

$$(\sigma_{۱}^{-} \circ \sigma_{۲}^{-})(v,u) = \sigma_{۱}^{-}(v) \vee \sigma_{۲}^{-}(u).$$

(ب) بازای هر v در V و tu در F،

$$(\mu_{۱}^{+} \circ \mu_{۲}^{+})((v,t)(v,u)) = \sigma_{۱}^{+}(v) \vee \mu_{۲}^{+}(tu),$$

$$(\mu_{۱}^{-} \circ \mu_{۲}^{-})((v,t)(v,u)) = \sigma_{۱}^{-}(v) \vee \mu_{۲}^{-}(tu).$$

(ج) بازای هر u در U و vw در E،

$$(\mu_{۱}^{+} \circ \mu_{۲}^{+})((v,u)(w,u)) = \mu_{۱}^{+}(vw) \vee \sigma_{۲}^{+}(u)$$

$$(\mu_{۱}^{-} \circ \mu_{۲}^{-})((v,u)(w,u)) = \mu_{۱}^{-}(vw) \vee \sigma_{۲}^{-}(u).$$

(د) بازای هر $(v,t)(w,u)$ در $E^{\circ} - H$

$$(\mu_{۱}^{+} \circ \mu_{۲}^{+})((v,t)(w,u)) = \sigma_{۲}^{+}(t) \vee \sigma_{۲}^{+}(u) \vee \mu_{۱}^{+}(vw)$$

$$(\mu_{۱}^{-} \circ \mu_{۲}^{-})((v,t)(w,u)) = \sigma_{۲}^{-}(t) \vee \sigma_{۲}^{-}(u) \vee \mu_{۱}^{-}(vw)$$

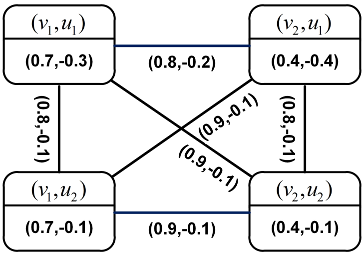
در اینجا

$$H = \{(v,t)(v,u)|v \in V, tu \in F\} \cup \{(v,u)(w,u)|u \in U, vw \in E\}.$$

مثال ۸.۳. گراف‌های BI- فازی Γ و Λ را با مفروضات مثال ۵.۳ در نظر بگیرید. ترکیب این گراف‌های BI- فازی، $\Gamma[\Lambda] = (\Sigma^۱ \circ \Sigma^۲, I^۱ \circ I^۲)$ به صورت زیر خواهد بود (شکل ۴):

$$\Sigma^۱ \circ \Sigma^۲ = \Sigma^۱ \times \Sigma^۲ \text{(با توجه به تعریف)}$$

$$I^۱ \circ I^۲ = \langle (\frac{(v_۱,u_۱)(v_۱,u_۲)}{۰/۸}, \frac{(v_۱,u_۱)(v_۲,u_۱)}{۰/۸}, \frac{(v_۲,u_۱)(v_۲,u_۲)}{۰/۸},$$
$$\frac{(v_۱,u_۲)(v_۲,u_۲)}{۰/۹}, \frac{(v_۱,u_۱)(v_۲,u_۲)}{۰/۹}, \frac{(v_۱,u_۲)(v_۲,u_۱)}{۰/۹}),$$
$$(\frac{(v_۱,u_۱)(v_۱,u_۲)}{-۰/۱}, \frac{(v_۱,u_۱)(v_۲,u_۱)}{-۰/۲}, \frac{(v_۲,u_۱)(v_۲,u_۲)}{-۰/۱},$$
$$\frac{(v_۱,u_۲)(v_۲,u_۲)}{-۰/۱}, \frac{(v_۱,u_۱)(v_۲,u_۲)}{-۰/۱}, \frac{(v_۱,u_۲)(v_۲,u_۱)}{-۰/۱})\rangle$$



شکل ۴: *ترکیب گراف‌های BI- فازی Γ و Λ ($\Gamma[\Lambda]$).*

گزاره ۹.۳. *اگر Γ و Λ دو گراف BI- فازی باشند، آنگاه $\Gamma \circ \Lambda$ یک گراف BI- فازی است.*

اثبات. با مفروضاتی که در تعریف ۷.۳ برای گراف‌های BI- فازی Γ و Λ داشتیم، می‌بایست درستی نابرابری‌های زیر را ثابت کنیم:

(الف) بازای هر v در V و tu در F،

$$(\mu_1^+ \circ \mu_2^+)((v,t)(v,u)) \geq (\sigma_1^+ \circ \sigma_2^+)(v,t) \wedge (\sigma_1^+ \circ \sigma_2^+)(v,u) \qquad (5)$$

$$(\mu_1^- \circ \mu_2^-)((v,t)(v,u)) \geq (\sigma_1^- \circ \sigma_2^-)(v,t) \vee (\sigma_1^- \circ \sigma_2^-)(v,u) \qquad (6)$$

(ب) بازای هر u در U و vw در E،

$$(\mu_1^+ \circ \mu_2^+)((v,u)(w,u)) \geq (\sigma_1^+ \circ \sigma_2^+)(v,u) \wedge (\sigma_1^+ \circ \sigma_2^+)(w,u) \qquad (7)$$

$$(\mu_1^- \circ \mu_2^-)((v,u)(w,u)) \geq (\sigma_1^- \circ \sigma_2^-)(v,u) \vee (\sigma_1^- \circ \sigma_2^-)(w,u) \qquad (8)$$

(ج) بازای هر $(v,t)(w,u)$ در $E^\circ - H$

$$(\mu_1^+ \circ \mu_2^+)((v,t)(w,u)) \geq (\sigma_1^+ \circ \sigma_2^+)(v,t) \wedge (\sigma_1^+ \circ \sigma_2^+)(w,u) \qquad (9)$$

$$(\mu_1^- \circ \mu_2^-)((v,t)(w,u)) \geq (\sigma_1^- \circ \sigma_2^-)(v,t) \vee (\sigma_1^- \circ \sigma_2^-)(w,u) \qquad (10)$$

برهان درستی نامساوی های ۶ ، ۸ و ۱۰ مشابه اثباتی است که برای گراف‌های فازی دوقطبی گفته می‌شود [۱]. نابرابری‌های ۵ و ۷ با روندی مشابه آنچه در خصوص ۱ بیان شد، اثبات می‌شوند. در اینجا بررسی درستی ۹ را می‌آوریم. بازای هر $(v,t)(w,u)$ در $E^\circ - H$

$$(\mu_1^+ \circ \mu_2^+)((v,t)(w,u)) = \sigma_2^+(t) \vee \sigma_2^+(u) \vee \mu_1^+(vw)$$

$$\geq \big(\sigma_2^+(t) \vee \sigma_2^+(u)\big) \vee \big(\sigma_1^+(v) \wedge \sigma_1^+(w)\big)$$

$$\geq \big(\sigma_2^+(t) \wedge \sigma_2^+(u)\big) \wedge \big(\sigma_1^+(v) \wedge \sigma_1^+(w)\big)$$

$$= \big(\sigma_۱^+(v) \wedge \sigma_۲^+(t)\big) \wedge \big(\sigma_۱^+(w) \wedge \sigma_۲^+(u)\big)$$

$$(\sigma_۱^+ \circ \sigma_۲^+)(v,t) \wedge (\sigma_۱^+ \circ \sigma_۲^+)(w,u)$$

□

تعریف ۱۰.۳. یک گراف BI- فازی $\Gamma = (\Sigma, I)$ از $\Gamma^* = (V,E)$ قوی *(گراف SBI- فازی)* گفته می شود، اگر بازای هر $rs \in E$، $\mu_{rs}^+ = \sigma_r^+ \wedge \sigma_s^+$ و $\mu_{rs}^- = \sigma_r^- \vee \sigma_s^-$.

تعریف ۱۱.۳. متمم یک گراف BI- فازی $\Gamma = (\Sigma_{\sigma^+,\sigma^-}, I_{\mu^+,\mu^-})$ از $\Gamma^* = (V,E)$ گراف BI- فازی $\bar{\Gamma} = (\bar{\Sigma}_{\bar{\sigma}^+,\bar{\sigma}^-}, \bar{I}_{\bar{\mu}^+,\bar{\mu}^-})$ از $\bar{\Gamma}^* = (\bar{V},\bar{E})$ تعریف می شود که در آن

(الف) $\bar{V} = V$

(ب) بازای هر $r \in V$، $\bar{\sigma}_r^+ = \sigma_r^+$ و $\bar{\sigma}_r^- = \sigma_r^-$

(ج)

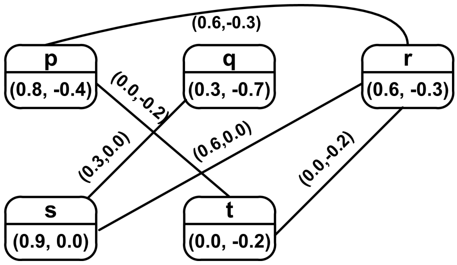
$$\bar{\mu}_{rs}^+ = \begin{cases} ۰ & \text{اگر } \mu_{rs}^+ > ۰ \\ \sigma_r^+ \wedge \sigma_s^+ & \text{اگر } \mu_{rs}^+ = ۰ \end{cases}$$

$$\bar{\mu}_{rs}^- = \begin{cases} ۰ & \text{اگر } \mu_{rs}^- < ۰ \\ \sigma_r^- \vee \sigma_s^- & \text{اگر } \mu_{rs}^- = ۰ \end{cases}.$$

قضیه ۱۲.۳. *متمم یک گراف BI- فازی، یک گراف SBI- فازی است.*

اثبات. از آنجا که در گراف متمم فقط یال‌هایی مانند rs باقی می‌مانند که در شرایط $\bar{\mu}_{rs}^+ = \sigma_r^+ \wedge \sigma_s^+$ و $\bar{\mu}_{rs}^- = \sigma_r^- \wedge \sigma_s^-$ صدق می کنند، با توجه به تعریف گراف SBI- فازی، برهان تمام است. □

مثال ۱۳.۳. شکل ۵ متمم گراف BI- فازی $\Gamma = (V, \Sigma_{\sigma^+,\sigma^-}, I_{\mu^+,\mu^-})$ در مثال ۳.۳ را نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود گراف متمم حاصل یک گراف SBI- فازی می‌باشد.



شکل ۵: *متمم یک گراف فازی معکوس دوقطبی.*

تعریف ۱۴.۳. فرض کنیم $\Gamma = (V, \Sigma_{\sigma^+,\sigma^-}, I_{\mu^+,\mu^-})$ یک گراف BI- فازی باشد. یک گراف BI- فازی $\Theta = (V, \Delta_{\delta^+,\delta^-}, M_{\omega^+,\omega^-})$ *زیرگراف BI- فازی جزئی* Γ گفته می‌شود اگر

$$\delta^+ \subseteq \sigma^+, \omega^+ \subseteq \mu^+$$

$$\delta^- \subseteq \sigma^-, \omega^- \subseteq \mu^-.$$

گراف BI- فازی $\Theta = (U, \Delta_{\delta^+,\delta^-}, M_{\omega^+,\omega^-})$ که در آن $U \subseteq V$ *زیرگراف BI- فازی* Γ نامیده می شود اگر بازای هر r و s در U،

$$\delta_r^+ = \sigma_r^+, \omega_{rs}^+ = \mu_{rs}^+$$

$$\delta_r^- = \sigma_r^-, \omega_{rs}^- = \mu_{rs}^-$$

تعریف ۱۵.۳. فرض کنیم $\Gamma = (V, \Sigma_{\sigma^+,\sigma^-}, I_{\mu^+,\mu^-})$ یک گراف BI- فازی باشد. مقادیر p و q را به گونه‌ای در نظر بگیرید که $۰ \le p \le ۱$ و $-۱ \le q \le ۰$. اگر

$$\sigma_p^+ = \{\alpha \in \sigma^{+*} | \sigma_\alpha^+ \ge p\},$$

$$\sigma_q^- = \{\beta \in \sigma^{-*} | \sigma_\gamma^- \ge q\},$$

$$\mu_p^+ = \{\alpha\beta \in \mu^{+*} | \mu_{\alpha\beta}^+ \ge p\}$$

و

$$\mu_q^- = \{\gamma\lambda \in \mu^{-*} | \mu_{\gamma\lambda}^- \geq q\},$$

آنگاه $T = (\sigma_p^+ \cup \sigma_q^-, \mu_p^+ \cup \mu_q^-)$ گرافی با مجموعه رئوس $\sigma_p^+ \cup \sigma_q^-$ و مجموعه یال‌های $\mu_p^+ \cup \mu_q^-$ می‌باشد. گراف T را *گراف آستانه‌ی* گراف BI- فازی Γ متناظر با مقادیر p و q گویند.

گزاره ۱۶.۳. *فرض کنیم $\Gamma = (V, \Sigma_{\sigma^+,\sigma^-}, I_{\mu^+,\mu^-})$ یک گراف BI- فازی، $0 \leq p_1 \leq p_2 \leq 1$ و $-1 \leq q_1 \leq q_2 \leq 0$، آنگاه گراف آستانه‌ی $T_2 = (\sigma_{p_2}^+ \cup \sigma_{q_2}^-, \mu_{p_2}^+ \cup \mu_{q_2}^-)$ یک زیرگراف از گراف آستانه‌ی $T_1 = (\sigma_{p_1}^+ \cup \sigma_{q_1}^-, \mu_{p_1}^+ \cup \mu_{q_1}^-)$ می‌باشد.*

اثبات. برهان را برای رئوس می‌آوریم، یعنی ثابت می کنیم $\sigma_{p_2}^+ \cup \sigma_{q_2}^- \subseteq \sigma_{p_1}^+ \cup \sigma_{q_1}^-$.

$$\alpha \in \sigma_{p_2}^+ \cup \sigma_{q_2}^- \Rightarrow \begin{cases} \alpha \in \sigma_{p_2}^+ \\ \text{یا} \\ \alpha \in \sigma_{q_2}^- \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_\alpha^+ \geq p_2 \geq p_1 \\ \text{یا} \\ \sigma_\alpha^- \geq q_2 \geq q_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha \in \sigma_{p_1}^+ \\ \text{یا} \\ \alpha \in \sigma_{q_1}^- \end{cases} \Rightarrow \alpha \in \sigma_{p_1}^+ \cup \sigma_{q_1}^-.$$

با روندی کاملا مشابه برای یال‌ها نیز نتیجه می‌شود که $\mu_{p_2}^+ \cup \mu_{q_2}^- \subseteq \mu_{p_1}^+ \cup \mu_{q_1}^-$. □

۴ نتیجه‌گیری

در گراف‌های فازی معکوس دوقطبی پارامترهای مستقل از رابطه‌ی فازی معکوس دو قطبی، نظیر انواع درجات رئوس، اندازه و مرتبه‌ی گراف برابر مقادیرشان در گراف‌های

فازی دوقطبی خواهند بود. حاصلضرب دکارتی و ترکیب دو گراف فازی معکوس دوقطبی یک گراف فازی معکوس دوقطبی است. متمم یک گراف فازی معکوس دوقطبی یک گراف فازی معکوس دوقطبی قوی است. در گراف‌های آستانه نتیجه شده از دو زوج مقدار متفاوت برای یک گراف فازی معکوس دوقطبی، گراف متناظر به مقادیر کوچکتر بر گراف متناظر با مقادیر بزرگتر غالب است.

مراجع

[1] Akram, M. (2011). Bipolar fuzzy graphs. Information Sciences, 181, 5548-5564.

[2] Borzooei, R. A., Almallah, R. (2022). Inverse fuzzy multigraphs and planarity with application in decision-making. Soft Computing, 26, 1531–1539.

[3] Borzooei, R. A., Almallah, R., Jun, Y. B., Ghaznavi, H. (2020). Inverse Fuzzy Graphs with Applications. New Mathematics and Natural Computation, 16, 397-418.

[4] Kaufmann, A. (1973). Introduction a la Theorie des Sous-Ensembles Flous. Masson, Paris, 1, 41-189.

[5] Rosenfeld, A. (1975). Fuzzy graphs. Fuzzy Sets and Their Applications to Cognitive and Decision Processes, Academic Press, New York, 77-95.

[6] Samanta, S., Pal, M. (2012). Irregular Bipolar Fuzzy Graphs. Inernational Journal of Applications of Fuzzy Sets, 2, 91-102.

[7] Tamura, S., Higuchi, S., Tanaka, K. (1971). Pattern Classification Based on Fuzzy Relations, IEEE Trans, SMC-1, 61-66.

[8] Zadeh, L. A. (1971). Similarity relations and fuzzy orderings. Information Sciences, 3 (2), 177-200.

[9] Zhang, W. R. (1994). Bipolar fuzzy sets and relations: a computational framework forcognitive modeling and multiagent decision analysis. Proceedings of IEEE Conf, 305-309.

[10] Zhang, W. R. (1998). Bipolar fuzzy sets. Proceedings of FUZZ-IEEE, 835-840.