سیستم های فازی و کاربردها
سال ششم، شماره دوم (پائیز و زمستان ۱۴۰۲)
صص. ۱ تا ۵۰

شاپای چاپی: ۲۷۱۷ـ۴۴۰۹
شاپای الکترونیکی: ۲۷۱۷ـ۳۹۸۴
DOI:10.22034/JFSA.2023.188278

مروری بر اعدادـZ و کاربردهای آن

فاطمه رضائی احمدی، حامد رفیعی و محمدرضا اکبرزاده توتونچی*
گروه مهندسی برق، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۲/۱ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۷/۲۳

نوع مقاله: علمیـ مروری

چکیده. در دنیای کنونی، با حجم عظیمی از اطلاعات رو به رشد و دارای عدم قطعیت روبه‌رو هستیم. عدم قطعیت موجود در اطلاعات دارای انواع مختلف ابهام، امکان، احتمال، نادقیقی و غیره می‌باشند که استفاده از اطلاعات را با چالش روبه‌رو می‌کنند. منطق فازی به عنوان راه‌حلی برای مقابله با عدم قطعیت، تنها به بخشی تعینی این عدم قطعیت ها می‌پردازد و وجوه دیگر آن را در نظر نمی‌گیرد. زاده در سال ۲۰۱۱ مفهوم اعدادـZ را که از دو جزء محدودیت و قابلیت اطمینان محدودیت تشکیل می‌شوند، برای پوشش عدم قطعیت‌های امکانی و احتمالی به صورت توام پیشنهاد داده‌است. در این مقاله مروری، ابتدا به بررسی مطالعه‌ی پیشینه اعدادـZ و مقدمات ریاضی آن پرداخته می‌شود. سپس مهم‌ترین تحقیقات انجام‌گرفته در حوزه‌های کاربردی اعدادـZ شامل تصمیم‌گیری، رتبه‌بندی، محاسبات با کلمات، یادگیری ماشین، تشخیص پزشکی، بررسی میزان خطر، تحلیل رگرسیون و کنترل مرور می‌شوند. بررسی نتایج مقالات حاکی از آن است که استفاده از اعدادـZ می تواند بهبود قابل ملاحظه‌ای در مقدار خطا و صحت داشته باشد. ولی پیچیدگی محاسبات و چگونگی فرآیند یادگیری در این ساختارها از جمله چالش‌های پیش‌رو در این حوزه است. همچنین استفاده از اعدادـZ در برخی از حوزه‌ها مانند پیش‌بینی و بهینه‌سازی از جمله افق‌های پیش رو می‌باشد.

عبارات و کلمات کلیدی. اعدادـZ، اعداد فازی، عدم قطعیت، سیستم کنترل، تحلیل رگرسیون.

© ۱۴۰۲ (انجمن سیستم‌های فازی)

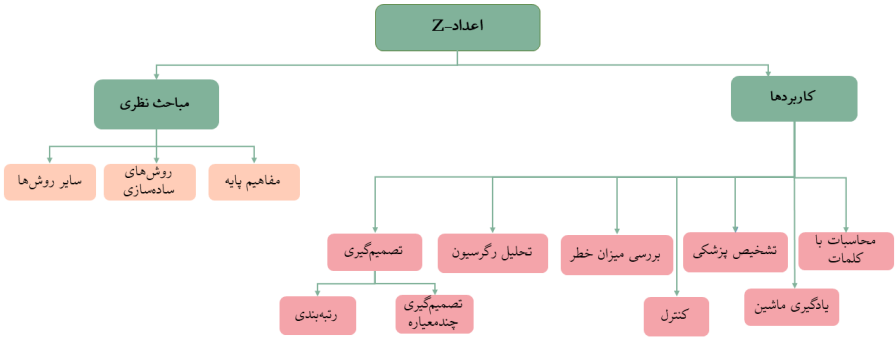
۱. سرآغاز

بسیاری از مشکلات دنیای واقعی مبهم، نادقیق و دارای عدم قطعیت هستند. زاده مفهوم مجموعه های فازی را به عنوان تعمیمی بر مجموعه‌های قطعی[1] به منظور مدیریت چنین اطلاعاتی معرفی کرد [۱]. منطق فازی برای مدل‌سازی مفاهیمی که عدم قطعیت دارند و به وفور در مسائل واقعی از جمله علوم مهندسی، اقتصاد، علوم اجتماعی، علوم رایانه و سایر موارد دیده می شوند، کار برد دارد. پس از آن بسیاری از محققان چندین مفهوم کلی و بهبود یافته از مجموعه فازی را ارائه کردند. بعضی از مهم‌ترین نظریه‌ها را که می‌توان تعمیمی از نظریه مجموعه‌های فازی دانست، شامل مجموعه‌های فازی شهودی[2]، مجموعه‌های فازی نوع دو، مجموعه‌های فازی مردد[3] و مجموعه‌های نوتروسوفیک[4] می‌باشد [۲]. همچنین زاده منطق فازی توسعه‌یافته[5] (FLe) را معرفی کرد، به‌طوری که در سیستم‌های فازی اعتبار اطلاعات به منظور بهبود نتایج نیز در نظر گرفته می‌شود [۳]. لذا سیستم فازی توسعه‌یافته که یک توسعه طبیعی از سیستم‌های فازی است علاوه بر درجه امکان از یک درجه اعتبار نیز بهره می‌برد، به‌طوریکه حداقل یکی از مقدم‌ها و یا تالی‌ها علاوه بر داشتن درجه‌ای از امکان، دارای درجه‌ای از اعتبار در تعریف مجموعه‌شان نیز هستند. صباحی و همکاران در [۴] ف_مودس پوننس را جهت استنتاج تقریبی منطق فازی توسعه‌یافته معرفی و در تقریب سیستم‌های غیرخطی به کار بردند. همچنین [۵] به توسعه منطق فازی گسترده از دیدگاه نظریه مجموعه‌ها و سیستم‌ها می‌پردازد و روشی را برای تبدیل دانش نامشخص به یک نگاشت غیرخطی ارائه می‌دهد.

پس از همه این‌ها، زاده مفهوم اعداد_Z[6] را معرفی کرد، که توانایی نمایش همزمان عدم قطعیت و عدم‌دقت اطلاعات را دارد [۶]. همان‌طورکه زاده اشاره کرد، اعداد_Z یک توصیف مناسب از اطلاعات دنیای واقعی است [۶]. به منظور درک برخی از چالش‌ها هنگام برخورد با اعداد_Z و امکان‌سنجی آن در حل برخی از مشکلات دنیای واقعی، یک بررسی جامع از تحقیقات موجود پیرامون اعداد_Z بسیار ضروری است. شکل ۱ یک نمای کلی از حوزه‌های اعداد_Z را نمایش می‌دهد.

این مقاله مروری، ابتدا به بررسی مطالعه‌ی پیشینه اعداد_Z و مقدمات ریاضی آن می‌پردازد. سپس به تحقیقات انجام‌گرفته در حوزه‌های کاربردی اعداد_Z پرداخته می‌شود و در انتها به

[1] Crisp Set
[2] Intuitionistic Fuzzy Sets
[3] Hesitant fuzzy sets
[4] Neutrosophic sets
[5] Extended fuzzy logic
[6] Z-Numbers



شکل ۱: نمای کلی از حوزه‌های اعداد_Z

جمع‌بندی مطالب پرداخته می‌شود و چالش‌های موجود و همچنین جهت‌گیری‌های تحقیقاتی آینده این حوزه بیان می‌شود.

۲. تاریخچه اعداد_Z

۱.۲. مروری بر کارهای گذشته جهت مدل‌کردن عدم قطعیت. همواره مدل‌سازی و تحمل عدم قطعیت یکی از اساسی‌ترین مشکلات سیستم‌ها بوده است [۷]، به‌طوری که بخش اعظمی از فرآیند طراحی سیستم‌ها، به نحوه کار با عدم قطعیت اطلاعات اختصاص می‌یابد [۸]. روش‌های زیادی برای این منظور معرفی شده‌اند که تفاوت عمده آن‌ها در بیان عدم قطعیت پارامترهای ورودی سیستم است [۹]. منطق فازی از توابع عضویت فازی و احتمالات از توابع چگالی احتمال برای بیان عدم قطعیت سیستم بهره می‌برند، وجه تشابه این دو تعیین اثر ورودی بر خروجی سیستم‌ها است. عدم قطعیت در اطلاعات شامل سلسله مراتبی است، که این سلسله مراتب شامل سطوحی از محدودیت‌هاست،که عدم قطعیت فاصله‌ای، عدم قطعیت فازی نوع ۱، عدم قطعیت فازی نوع ۲ و عدم قطعیت اعداد_ Z را شامل می‌شود [۱۰]. مدل‌سازی عدم قطعیت از گذشته تا هم‌اکنون در شکل ۲ آورده شده است.

۲.۲. معرفی اعداد_Z. زاده در سال ۲۰۱۱ [۶] مفهوم اعداد_Z را به شکل $Z = (A, R)$ معرفی کرده است، که دارای دو مولفه A و R می‌باشد، مولفه‌ی اول $A(x)$ نقش

شکل ۲: مدل‌کردن عدم قطعیت از گذشته تا کنون

محدودکننده فازی روی متغیر غیرقطعی x و مولفه‌ی دوم $R(x)$ قابلیت اطمینان مولفه‌ی اول ($A(x)$) را بیان می‌کند، که به عنوان یک محدودیت فازی بر روی مقدار اندازه احتمال A فرمول‌بندی می‌شود. به طور معمول، A و R نمایش‌های اعداد فازی از کلمات یا عبارات در زبان طبیعی هستند. مقادیر A و R از طریق ارتباط با توابع عضویت مربوطه ($\mu_{R(x)}$ و $\mu_{A(x)}$) به طور دقیق تعیین می‌شوند. به بیان ساده‌تر با توجه به اینکه X یک متغیر تصادفی است، عبارت "قابلیت اطمینان" می‌تواند به عنوان احتمال جفت $<X,A>$ تفسیر شود. به عبارت دیگر، R می‌تواند به عنوان پاسخ به سؤال "چقدر اطمینان دارید که X برابر با A است؟" تفسیر شود. احتمال این رویداد را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

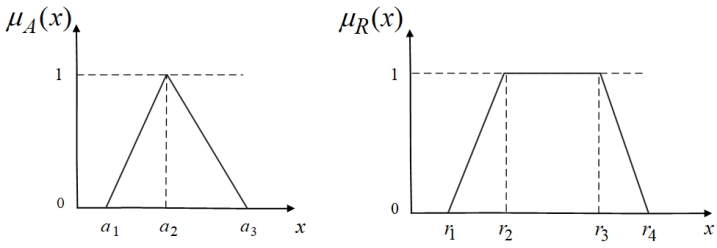
$$p = \int_R \mu_A(u) p_X(u) du$$

$$\int_R \mu_A(u) p_X(u) du \quad is \quad R \qquad (۱.۲)$$

که p_X تابع چگالی احتمال X است. دقت داشته باشید که تنها محدوده‌ی این تابع مشخص است. هر دو مؤلفه بیان شده می‌توانند انواع مختلفی از توابع عضویت ازجمله مثلثی، ذوزنقه‌ای و گوسی باشند. شکل ۳ یک عدد_Z را نشان می‌دهد، به‌طوری که تابع عضویت مثلثی سمت چپ مولفه‌ی اول و تابع عضویت ذوزنقه‌ای سمت راست مولفه‌ی دوم عدد_Z را نشان می‌دهد.

۳.۲. مروری بر کارهای گذشته بر روی مدل‌کردن اعداد_Z. به منظور کاهش پیچیدگی های محاسباتی، کنگ[1] و همکاران رویکردی مبتنی بر تبدیل اعداد_Z به اعداد فازی کلاسیک ارائه کردند، مزیت این روش پیچیدگی تحلیلی و محاسباتی کم آن است،که دامنه وسیعی از کاربردها را میسر می‌سازد. از طرفی تبدیل یک عدد_Z به یک عدد فازی منجر به از دست رفتن قابل توجهی از اطلاعات در نتیجه کاهش عدم قطعیت آن و کاهش مزیت استفاده از اطلاعات مبتنی بر عدد_Z می‌شود [۱۱]. اجزای اعداد_Z اغلب توسط دانش فرد خبره تعیین می‌شوند و فاقد یادگیری هستند. برای غلبه بر این محدودیت، رضائی احمدی و همکاران

[1] Bingyi Kang



شکل ۳: اجزای A و R عدد_Z، تابع عضویت مولفه‌ی اول $\mu_{A(x)}$ نقش محدودکننده فازی روی متغیر غیرقطعی x وتابع عضویت مولفه‌ی دوم $\mu_{R(x)}$ قابلیت اطمینان مولفه‌ی اول را نشان می‌دهد.

[۱۲] یک سیستم استنتاج فازی تطبیقی مبتنی بر اعداد_Z[1] (ZAFIS) معرفی کردند. در روش پیشنهادی پارامترهای اعداد_Z از جفت داده‌های ورودی_خروجی به صورت تطبیقی آموزش داده می‌شوند. ابتدا جزء دوم اعداد_Z به یک عدد واضح تبدیل می‌شود، سپس از این عدد به عنوان وزن برای تابع عضویت فازی بخش اول اعداد_Z بهره برده می‌شود. در نهایت، تابع عضویت حاصل در یک سیستم استنتاج فازی قرار می‌گیرد و پارامترهای سیستم بر اساس جفت داده‌های ورودی_خروجی با استفاده از یک الگوریتم گرادیان نزولی آموزش داده می‌شوند. روش پیشنهادی بر روی چندین تابع با سناریوهای با / بدون نویز ارزیابی می‌شوند. نتایج نشان می‌دهد که ZAFIS در برابر ورودی‌های نویزی از نظر میانگین مربعات خطا (MSE) نسبت به سیستم‌های استنتاج فازی برتری دارد.

اساس یک رویکرد کلی محاسباتی موثر برای محاسبه مستقیم اعداد گسسته_Z در مرجع [۱۰] ارائه شده است، مزیت در نظرگرفتن اعداد گسسته در مقابل اعداد پیوسته این است که، مشکلات دنیای واقعی با اطلاعات زبانی مشخص می‌شوند، اطلاعات مبتنی بر زبان طبیعی دارای چارچوبی گسسته است و پیچیدگی محاسباتی کمتری نسبت به اعداد پیوسته_Z دارد، به این جهت در این مقاله اعداد گسسته_Z در نظر گرفته شده است. برای اولین بار یک سیستم جبری از اعداد گسسته_Z شامل عملیات اساسی مانند جمع، تفریق، ضرب و تقسیم، عملیات مقایسه مانند رتبه‌بندی اعداد_Z و عملیات جبری مانند مربع و جذر از یک عدد_Z پیشنهاد شده است. با چارچوب پیشنهادی ریاضی و محاسبات مستقیم با اعداد_Z، پیچیدگی‌های تحلیلی و محاسباتی کاهش یافته و کاربرد عملی آن را به طور قابل توجهی گسترش می‌دهد

[1] Z-Adaptive Fuzzy Inference System

. در مرجع [۱۳]، الیف[1] و همکاران معتقد بودند که روش پیشنهادی محاسباتی بر روی اعداد پیوسته_Z که توسط زاده ارائه شده در مسائل غیرخطی دارای پیچیدگی‌هایی است و به این منظور رویکردی برای توسعه محاسباتی و برخی از اعمال جبری بر روی اعداد پیوسته_Z پیشنهاد کردند. روش پیشنهادی مبتنی بر برنامه‌ریزی خطی است و برای مقابله با مشکلات پیچیده ناشی از گسترش محدودیت های احتمالی ـ امکانی برای محاسبه با اعداد_Z آمده‌است. همچنین از توابع چگالی نرمال برای مدل‌سازی متغیرهای تصادفی استفاده شده است.مثال‌های زیادی برای نشان‌دادن اعتبار روش پیشنهادی ارائه شده است.

دیدگاه جدیدی از اعداد_Z بر اساس اعداد فازی گسسته ارائه شده است که محاسبات را ساده‌تر اما انعطاف‌پذیری مدل اصلی را از نظر زبانی حفظ می‌کند. مولفه‌ی دوم عدد $Z(A,R)$ یعنی R میزان قابلیت اطمینان مولفه‌ی اول A را بیان می‌کند. این قابلیت اطمینان را می‌توان از نقطه نظرات مختلف از جمله: احتمال، اعتبار، اطمینان مورد بررسی قرار داد. از این جهت مقاله [۱۴]، نسخه متفاوتی از اعداد_Z را بر پایه اعداد فازی گسسته بیان می‌کند که مولفه‌ی دوم عدد_Z را احتمالاتی در نظر نمی‌گیرد بلکه به‌عنوان یک ارزیابی زبانی براساس اعداد فازی گسسته بیان می‌کند. این رویکرد نه تنها باعث افزایش انعطاف پذیری نظرات متخصص می‌شود، بلکه با استفاده از عملگرهای تجمیع در مجموعه اعداد فازی گسسته، عملیات ارزیابی_Z را نیز سهولت می‌بخشد. به طور کلی در مقاله مذکور روشی برای اجتماع و اشتراک فازی پیشنهاد می‌شود. علاوه بر این، نشان داده شده است که این توابع جدیدِ اجتماع، خصوصیات مشابه خصوصیات اولیه را حفظ می‌کنند.

اعداد_Z به دلیل برتری در توصیف اندازه‌گیری قابلیت اطمینان، به نمایشی جدید از اطلاعات ارزیابی تبدیل شده است. مطالعات فعلی عمدتاً بر روی اعداد_Z یک بعدی $Z(A,R)$ مانند ارزیابی زمان رسیدن از محل کار به منزل که می‌توان به صورت عدد_Z (اغلب، حدود ۳۰ دقیقه) نمایش داد، متمرکز است. با این‌حال، از آنجا که مردم اغلب بسیاری از زمینه‌ها را از جنبه‌های مختلف توصیف می‌کنند، استفاده از تنها یک جنبه از اطلاعات برای توصیف کامل وقایع نامطمئن دشوار است. این مقاله [۱۵]، مفهوم اعداد_Z چندبعدی را برای مدیریت اطلاعات پیچیده، مانند (اغلب، حدود ۲۰ مایل ، حدود ۳۰ دقیقه) پیشنهاد داده‌است. اعداد_Z چندبعدی، نه تنها مزایای اعداد_Z را برای توصیف اطلاعات کیفی و مشخص کردن قابلیت اطمینان اطلاعات به همراه دارد، بلکه می‌تواند برای نشان‌دادن اطلاعات ارزیابی با ویژگی‌های چندبعدی نیز مورد استفاده قرار گیرد. عملیات تعریف شده در این مقاله

[1] R. Aliev

رابطه بین توزیع امکان و توزیع احتمال را به خوبی ابعاد اطلاعات درنظر می‌گیرد. برای این منظور، ابتدا عملیات اساسی اعداد_Z چند بعدی را تعریف کرده و سپس یک روش مقایسه عملی را پیشنهاد داده‌است. در این چارچوب می‌توان اطلاعات پیچیده‌تری را مدیریت کرد و کاربرد عملی اعداد_Z را به‌طور قابل توجهی گسترش داد. یک روش رتبه‌بندی بر اساس مرکز برای مقایسه‌ی اعداد_Z چندبعدی با بردارهای محدودکننده مشابه ارائه شده است و برای این کار فقط به مقادیر اطمینان R نیازمند است.

روند تحلیلی سلسله مراتبی[1] (AHP) تحت یک فضای دارای عدم قطعیت هنوز یک مسئله‌ی باز است. هدف از این مطالعه [۱۶] پیشنهاد یک روش جدید تحلیل سلسله مراتبی مبتنی بر عدد_Z برای مقابله با مشکلات تصمیم‌گیری است. سرانجام، با فرآیند سلسله مراتبی تحلیلی عدد_Z موسوم به Z-AHP مدلی برای جستجوی معیارهای ارزیابی بهترین دانشگاه‌ها ایجاد شده است. هدف اصلی این مقاله [۱۷] بررسی رابطه بین دو تعمیم از مجموعه‌های فازی، یعنی مجموعه‌های فازی نوع ۲ و اعداد_Z است. در این مطالعه، نشان داده می‌شود که اگر پردازش داده‌ها را روی اعداد_Z اعمال کنیم، سپس به مجموعه‌های فازی نوع ۲ یکنواخت خواهیم رسید.علاوه بر این، این مقاله اثبات می‌کند که هر مجموعه فازی یکنواخت نوع ۲ می‌تواند به کمک الگوریتم پردازش داده مناسب به صورت اعداد_Z نشان داده شود.

یک روش بنیادی محاسبات با اعداد_U برای مدل‌سازی استدلال منطقی مشترک براساس اطلاعات معمول در این مرجع [۱۸] ارائه شده است. اعداد_U به عنوان یک مورد خاص از اعداد_Z در نظرگرفته می‌شوند، جایی که مولفه‌ی دوم عدد_Z "معمولاً" است. این مفهوم به گزاره‌ای مربوط می‌شود که معمولاً درست و یا به طور دقیق به رویدادهایی اطلاق می‌شود که احتمال وقوع آن‌ها بالاست. برای نشان‌دادن اعتبار و اثربخشی روش پیشنهادی، از تحلیل مقایسه‌ای و مثال‌های عددی استفاده شده است . استدلال تقریبی در مورد استدلال با اطلاعات ناقص است. امروزه، تنوع وسیعی از رویکردها برای استدلال تقریبی با اطلاعات فازی و اطلاعات فازی نوع ۲ وجود دارد. با این حال، باید تأکید کرد که اطلاعات ناقص دنیای واقعی با ترکیبی از عدم قطعیت‌های فازی و احتمالی مشخص می‌شود، که به عنوان اطلاعات دو بعدی شناخته می‌شود. در این مقاله [۱۹]، یک رویکرد جدید برای مطالعه استدلال تقریبی برروی قوانین_Z و تقریب عملگرهای محاسباتی و جبری بر اساس درون‌یابی خطی بر روی اعداد_U ایجاد شده است و امکان مقابله با ترکیبی از عدم قطعیت‌های فازی و احتمالی تحت

[1] Analytical Hierarchy Process

یک پیچیدگی محاسباتی نسبتاً کم را فراهم می‌کند. درنتیجه یک چشم‌انداز از کاربرد بالقوه این رویکرد برای گروه گسترده‌ای از مشکلات دنیای واقعی است.

در پژوهش [۲۰]، از روش‌های خوشه‌بندی و آماری برای حل مشکلات شناسایی اعداد_U از یک مجموعه داده استفاده شده است. همچنین، برای انجام عملیات حسابی بر روی اعداد_U، از عملگرهای حسابی که بر روی اعداد_Z تعریف شده‌اند، استفاده می‌شود. این روش پیشنهادی به دلیل اینکه عدد_U به عنوان یک نوع خاص از عدد_Z در نظر گرفته می‌شود، قابلیت استفاده از عملگرهای حسابی را بر روی آن‌ها فراهم می‌کند. در پایان، برای نشان‌دادن اعتبار روش پیشنهادی، یک مسئله به عنوان نمونه استفاده شده است.

در حال حاضر، روش‌های استفاده شده برای عملیات روی اعداد_Z معمولاً بر اساس ریاضیات فازی مبتنی بر برش_آلفا[1] و اصل گسترش زاده[2] است. اما این روش‌ها دارای معایبی هستند. یکی از معایب این روش‌ها، افزایش آنتروپی است که پس از اعمال آن بر روی اعداد فازی، عددی با سطح اطلاعات پایین‌تر تولید می‌شود و این باعث افزایش عدم دقت می‌شود، که در مواجهه با بسیاری از اعداد فازی مهم می‌شود. در مرجع [۱۸]، یک روش برای توسعه محاسبات با اعداد_Z پیشنهاد شده است که نتیجه محاسبه را با سطح اطلاعات مشخصی به دست می‌آورد. این روش بر اساس استفاده از توابع عضویت افقی و اندازه‌گیری مفهوم ویژگی است. یک مسئله‌ی محاسبه با اعداد_Z به عنوان یک مسئله‌ی بهینه‌سازی فرموله شده استفاده شده و یک راه‌حل برای آن ارائه شده است. نشان داده شده است که رویکرد پیشنهادی، محتوای اطلاعات بهتری نسبت به روش‌های کلاسیک فراهم می‌کند. محاسبه با اعداد_Z یک مسئله‌ی مهم در محاسبات فازی است و افزایش آنتروپی به طور طبیعی منجر به کاهش اطلاعات می‌شود. این موضوع زمانی اهمیت پیدا می‌کند که محاسبات روی تعداد زیادی اعداد_Z انجام شود، که در بسیاری از مسائل عملی و تحلیل تصمیم‌گیری رخ می‌دهد. به همین دلیل، یک روش برای محاسبه روی تعداد زیادی اعداد_Z پیشنهاد شده است که با محدود کردن کاهش اطلاعات، نتایج محاسبات را با سطح اطلاعاتی که پیش تعریف شده است، به دست می‌آورد. در این روش، میزان اطلاع دهندگی عدد_Z به عنوان یک اندازه‌گیری در نظر گرفته می‌شود.

در مقاله [۲۱]، یک روش جدید برای محاسبات روی تعداد زیادی اعداد_Z ارائه شده است که به نتایج محاسباتی مناسب از نظر محتوای اطلاعاتی دست می‌یابد. دراین رویکرد، از روش پهنای باند [۶] و اندازه گیری فاصله نسبی[3] (RDM) استفاده می‌شود که به وسیله آن

[1] α-Cut
[2] Zadeh's extension principle
[3] Relative Distance Measur

محاسبات ساده‌تر می‌شود. همچنین محاسبات RDM فازی[1] [۲۲] نیز به کار برده می‌شود که امکان تجزیه و تحلیل اطلاعات را فراهم می‌کند. روش پیشنهادی در مقاله برای یک مثال معتبر ارائه شده است، که نشان می‌دهد که این روش قابلیت ارائه نتایج معتبر را دارد.

در مقاله [۲۳]، مطالعاتی درباره توابع اعداد_Z و خصوصیات آنها انجام شده است. در این مطالعه، اعداد_Z به عنوان توصیف‌گرهایی برای اطلاعات ناقص مربوط به متغیرهای تصادفی مستقل در نظر گرفته شده‌اند. روش پیشنهادی در این مقاله با محدود کردن افزایش آنتروپی، که در پردازش اطلاعات گرانول ناقص به طور طبیعی رخ می‌دهد، توابع مقادیراعداد_Z را حفظ می‌کند. روش کلی برای ساخت توابع اعداد_Z بر اساس اصل توسعه اعداد_Z پیشنهاد شده است و برخی از توابع اساسی اعداد_Z مانند جمع، ضرب، حداقل اعداد_Z، جذر و مربع نیز ارائه شده‌اند. این روش ابزاری مهم برای درنظر گرفتن ترکیبی از عدم قطعیت‌های احتمالی و فازی مرتبط با مسائل واقعی در قلمروی سیستم‌های انسان‌محور مانند اقتصاد، تحلیل تصمیم‌گیری، پیش‌بینی و سایر زمینه‌هاست. رویکرد پیشنهادی تا حدی قادر به پردازش اطلاعات نادرست است. برای اعتبارسنجی روش پیشنهادی، طیفی از مثال‌ها ارائه شده است. با این حال، روش پیشنهادی به لحاظ محاسباتی دارای پیچیدگی زیادی است و کلیت مطالعه بر اساس تجزیه و تحلیل نظری توابع اعداد_Z است.

در مرجع [۲۴]، یک روش جدید برای حل عددی معادلات دیفرانسیل مرتبه اول با مقادیر اولیه با استفاده از اعداد_Z بر اساس توابع پایه شعاعی[2] (RBF) پیشنهاد شده است که منجر به تقریب دقیق‌تر می‌شود.

در دنیای پژوهش و مهندسی، مواجهه با مسائل برنامه‌ریزی خطی با متغیرهایی که به عنوان اعداد_Z تعریف شده باشد، یک چالش مهم است. در مرجع [۲۵]، ابتدا مفهوم برنامه‌ریزی خطی_Z کامل[3] (FZLP) معرفی می‌شود که در آن همه‌ی پارامترها، از جمله ضرایب متغیرها در توابع هدف، ضرایب متغیرها در محدودیت‌ها، سمت راست محدودیت‌ها و متغیرهای تصمیم‌گیری به عنوان اعداد_Z در نظر گرفته شده است. این روش جدید به توسعه الگوریتم‌هایی مبتنی براعداد_Z و ارائه راهکارهای موثر برای یافتن جواب بهینه در مسائل می‌پردازد.

در مرجع [۲۶]، یک چارچوب برای مطالعه‌ی معادلات دیفرانسیل نامعین با مشتقات درجه دلخواه تحت عنوان معادلات دیفرانسیل_Z^+ ارائه شده است. این چارچوب جدید

[1] The fuzzy RDM arithmetic
[2] Radial basis function
[3] Full Z-linear programming problem

ابتدا به تعریف دقیق اعداد_Z^+ می‌پردازد و سپس عملیات جبری اساسی بر روی این اعداد از جمله جمع، ضرب در عدد اسکالر و تفاضل هوکوهارا[1] را معرفی می‌کند. سپس، مفاهیم حد و پیوستگی توابع، تحت تعریف یک متریک در فضای اعداد_Z^+ تشریح می‌شود. در ادامه، مفاهیم مهمی مانند مشتق‌پذیری_Z^+ ، انتگرال_Z^+ و تبدیل لاپلاس_Z^+ به تفصیل مورد بررسی قرار می‌گیرد. در نهایت، با ارائه تعدادی قضیه، وجود و یکتایی معادلات دیفرانسیل_Z^+ را بررسی و کارایی رویکردهای ارائه شده را با حل دو مثال نمونه در این زمینه نشان می‌دهد.

در مرجع [۲۷]، یک روش عددی برای حل سیستم‌های معادلات خطی با داده‌های اعداد_Z معرفی شده است. نویسندگان با شبیه‌سازی و حل چند مثال مرتبط، معادلات خطی مبتنی بر اعداد_Z را توضیح داده و همچنین یک مسئله اقتصادی (تعیین ارزش تعادل بازار) که با استفاده از یک سیستم معادلات خطی مبتنی اعداد_Z مدل‌سازی شده است را مورد بررسی قرار دادند.

برای حل مسائل برنامه‌ریزی خطی با استفاده از اعداد_Z، به ویژه زمانی که تمام متغیرها و پارامترها به عنوان اعداد_Z و بخش قابلیت اعتماد اعداد_Z یک تابع توزیع در نظر گرفته شود، معمولاً یافتن جواب دقیق دشوار است. در مقاله [۲۸]، یک روش عددی جدید برای حل این نوع مسائل بر اساس تابع رتبه‌بندی معرفی شده است. مزیت این روش پیشنهادی این است که برای استفاده از آن هیچ محدودیتی بر روی عناصر ماتریس ضرایب وجود ندارد و نتایج به دست آمده تمام محدودیت‌ها را با دقت بالایی برآورده می‌کند. همچنین، این روش این امکان را می‌دهد که جواب مسئله برای مقادیر مختلف λ به دست آید.

۳. مبانی ریاضی اعداد_Z

یک عدد_Z از یک جفت عدد فازی به صورت $Z = (A, R)$ تشکیل می‌شود. به عنوان مثال، اگر A یک عدد فازی ذوزنقه‌ای R یک عدد فازی مثلثی باشد، می‌توان این عدد را به شکل ۳ نشان داد. محاسبات به وسیله اعداد_Z می‌تواند پیچیده باشند، زیرا افزایش ابعاد در محاسبات با اعداد_Z شامل افزایش پارامترها و بار محاسباتی یک فرآیند پیچیده است. برای کاهش این پیچیدگی، برخی از مفاهیم نظری و رویکردها ارائه می‌شوند. با این حال محاسبه با اعداد_Z هنوز یک مسئله باز است و مطالعه بیشتری برای بهبود روش‌ها و الگوریتم‌های محاسباتی با اعداد_Z مورد نیاز است. در این مثال، متغیر X

[1] Hukuhara difference

"پیش‌بینی مشارکت مردم در انتخابات" در نظر گرفته شده است. عدد_Z مربوط به این متغیر به صورت $Z =$ (به احتمال زیاد, تقریبا پنجاه میلیون, پیش‌بینی مشارکت مردم در انتخابات) نمایش داده می‌شود. بخش اول عدد_Z، (A)، به عنوان "تقریبا پنجاه میلیون" توصیف می‌شود و بخش دوم، (R)، به عنوان "به احتمال زیاد" نشان داده می‌شود. این توصیفات با استفاده از اعداد فازی ارائه شده‌اند. با استفاده از اعداد_Z، می‌توانیم پیچیدگی‌های دنیای واقعی را بهتر در نظر بگیریم، زیرا تنها با استفاده از نمایش‌های بازه‌ای یا اعداد فازی نوع_۱ نمی‌توان به طور کامل این پیچیدگی‌ها را تصویر کرد. عنصر (R) در اعداد_Z، قابلیت در برگیری "احساس شخصی" و عاملیت در قطعیت هر گونه اطلاعات را دارد. این به معنای این است که می‌توان با استفاده از اعداد_Z، عدم قطعیت‌ها و احساسات شخصی را در توصیف متغیرها در نظر گرفت.

زاده در مرجع [۶] مقدماتی از ریاضیات حوزه اعداد_Z آورده‌است که در ادامه به آن خواهیم پرداخت.

جمع دو عدد_Z، $Z_۱ = (A_X, R_X)$ و $Z_۲ = (A_Y, R_Y)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(A_X, R_X) + (A_Y, R_Y) = (A_X + A_Y, R_Z), \tag{۱.۳}$$

$A_X + A_Y$، به منظور جمع دو عدد فازی A_X و A_Y برای جزء اول اعداد_Z از محاسبات مرسوم فازی استفاده می‌شود.

$$\mu_{A_Z}(u) = \mu_{A_X+A_Y} = \sup_u(\mu_{A_X}(u) \wedge \mu_{A_Y}(v-u)), \quad \wedge = min. \tag{۲.۳}$$

به طور مشابه برای محاسبه R_Z، با فرض اینکه P_X و P_Y توابع چگالی احتمال مستقل هستند، تابع چگالی احتمال از طریق کانولوشن توابع چگالی احتمال p_X و p_Y، $(p_Z = p_X \circ p_Y)$ قابل دستیابی است.

$$p_{X+Y} = \int_R p_X(u)p_Y(v-u)du, \tag{۳.۳}$$

که در نتیجه آن جمع دو عدد_Zبه صورت زیر خلاصه می‌شود:

$$Z_X + Z_Y = (A_X + A_Y, p_{R_X} \circ p_{R_Y}). \tag{۴.۳}$$

باید توجه داشت که فرض مستقل بودن P_X و P_Y دلالت بر تحلیل بدترین حالت دارد.

از سویی دیگر اگر p_X و p_Y اعداد_Z مشخص نباشند بلکه محدودیت‌هایی روی p_X و p_Y وجود داشته باشد:

$$\begin{aligned} &\int_R \mu_{A_X}(u)p_X(u)du \quad is \quad R_X \\ &\int_R \mu_{A_Y}(u)p_Y(u)du \quad is \quad R_Y \end{aligned} \tag{۵.۳}$$

در این صورت با استفاده از اصل گسترش[1] در منطق فازی [۲۹، ۳۰] که به محدودیت‌های احتمالی مربوط می‌شود، می‌توان محدودیت بر روی R_Z را محاسبه کرد:

$$\mu_{p_Z}(p_Z) = \sup_{p_X,p_Y} (\mu_{R_X}(\int_R \mu_{A_X}(u)p_X(u)du) \wedge \mu R_Y(\int_R \mu_{A_Y}(u)p_Y(u)du)),$$

$$(P_Z = p_X \circ p_Y),$$

$$\int_R p_X(u)du = ۱,$$

$$\int_R p_Y(u)du = ۱.$$

(۶.۳)

در منطق فازی، اندازه گیری احتمال رویداد فازی X، A است، که در آن A یک مجموعه فازی و X یک متغیر تصادفی با چگالی احتمال p_X است که به صورت زیر تعریف می شود:

$$\int_R \mu_A(u)p_X(u)du. \tag{۷.۳}$$

با استفاده از این عبارت، حال اگر p_Z تابع چگالی احتمال شناخته شده باشد در نتیجه آن می‌توان R_Z را محاسبه کرد:

$$R_Z = \int_R \mu_{A_Z}(u)p_Z(u)du. \tag{۸.۳}$$

جایی که:

$$\mu_{A_Z}(u) = \sup_v(\mu_{A_X}(v) \wedge \mu_{A_Y}(u-v)). \tag{۹.۳}$$

[1] Extension principle

با اعمال اصل گسترش به بیانی از μ_{R_Z} خواهیم رسید و نتیجه به شکل زیر نمایش داده می‌شود:

$$\mu_{R_Z}(w) = \sup_{p_Z} \mu_{p_Z}(p_Z),$$

$$W = \int_R \mu_{A_Z}(u)\, p_Z(u) du. \qquad (۱۰.۳)$$

به روشی مشابه، سایر عملیات ریاضی برای اعداد_Z محاسبه می‌شوند. اما همانگونه که در محاسبات قبل مشاهده شد، این محاسبات سخت و پیچیده است، از این رو کنگ[1] و همکاران [۱۱] روشی را برای تبدیل اعداد_Z به اعداد فازی کلاسیک بر اساس انتظار فازی[2] پیشنهاد دادند. این روش به وسیله تخصیص یک انتظار فازی به عنصر R از اعداد_Z، سهولت در محاسبات و کاهش پیچیدگی را فراهم می‌کند. با این حال، در این روش ممکن است در طول فرآیند تبدیل، بخشی از اطلاعات از دست برود. اما محققان معتقدند که از دست دادن این مقدار اطلاعات به میزان قابل توجهی نیست و می‌توان آن را در نظر نگرفت. در ادامه به بررسی دقیق‌تر این روش پرداخته شده است.

تعریف: انتظار فازی: اگر A یک مجموعه فازی روی مجموعه جهانی X در نظر گرفته شود به صورت $A = \{\prec x, \mu_A(x) \succ | x \in X\}$ که در این رابطه $\mu_A : X \longrightarrow [۰, ۱]$ تابع عضویت A است، آنگاه انتظار فازی از طریق رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$E_A(x) = \int_x x\mu_A(x) dx. \qquad (۱۱.۳)$$

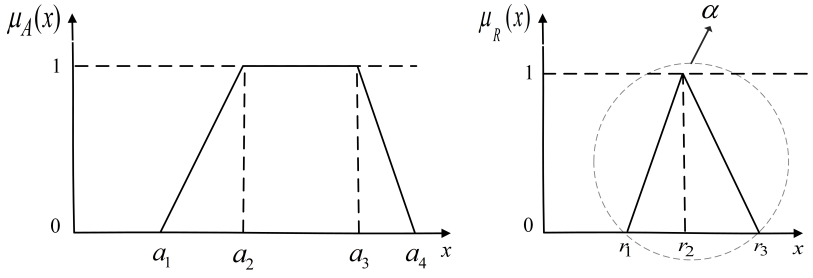
برای توضیحات بیشتر، یک عدد_Z $Z = (A, R)$ در نظر بگیرید به طوری که $A = \{\prec x, \mu_A(x) \succ | x \in [۰, ۱]\}$ و $R = \{\prec x, \mu_{R(x)} \succ | x \in [۰, ۱]\}$ و در آن $\mu_A(x)$ یک تابع عضویت ذوزنقه‌ای و $\mu_R(x)$ یک تابع عضویت مثلثی می‌باشد. برای تبدیل یک عدد_Z به یک عدد فازی کلاسیک به ترتیب مراحل زیر را پیش خواهیم گرفت:

۱) در ابتدا مولفه‌ی دوم عدد_Z (مقدار قابلیت اطمینان مولفه‌ی اول عدد_Z) را به یک مقدار قطعی[3] مطابق شکل ۴ و رابطه (۱۲.۳) تبدیل می‌کنیم:

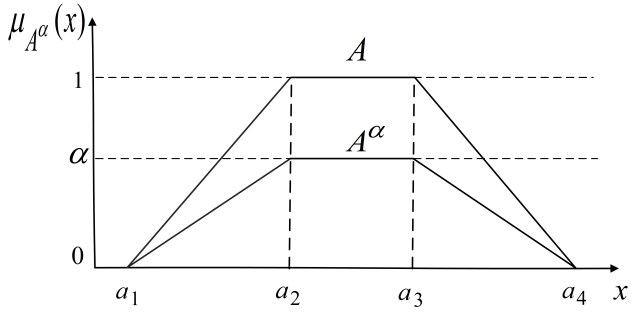
$$\alpha = \frac{\int x\mu_R(x) dx}{\int \mu_R(x) dx} \qquad (۱۲.۳)$$

۲) سپس وزن مولفه‌ی دوم (مقدار قابلیت اطمینان مولفه‌ی اول عدد_Z) را در مولفه‌ی اول عدد_Z ضرب می‌کنیم. عدد_Z وزن‌دار حاصله به شکل

[1] Bingyi Kang
[2] Fuzzy expectation
[3] Crisp number



شکل ۴: تبدیل جزء دوم عدد_Z به α [۱۱]



شکل ۵: عدد_Z بعد از ضرب قابلیت اطمینان [۱۱]

$Z^\alpha = \{\prec x, \mu_{A^\alpha}(x) \mid \mu_{A^\alpha}(x) = \alpha\mu_{A(x)},\ x \in [۰, ۱] \succ\}$ نمایش داده می‌شود.

قضیه(۱):

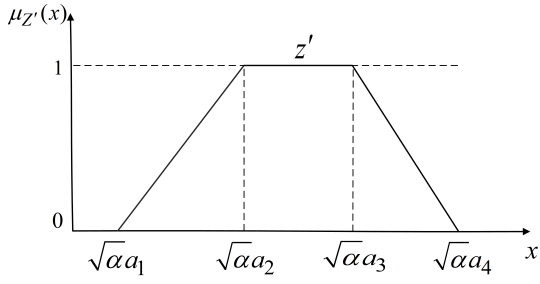
$$E_{A^\alpha}(x) = \alpha E_A(x),\ x \in X \qquad (۱۳.۳)$$

$$\mu_{A^\alpha}(x) = \alpha\mu_A(x) \qquad (۱۴.۳)$$

عدد_Z بعد از ضرب قابلیت اطمینان در شکل ۵ نمایش داده شده است.

۳) حال عدد فازی غیرمعمول[1] را به اعداد فازی معمول[2] تبدیل می‌کنیم. مجموعه فازی معمول به دست آمده به صورت $Z' = \left\{\prec X, \mu_{Z'}(x) | \mu_{Z'}(x) = \mu_A(\frac{x}{\sqrt{\alpha}}), x \in [۰, ۱] \succ\right\}$

[1] The irregular fuzzy number
[2] Regular fuzzy number



شکل ۶: عدد فازی حاصل از عدد_Z [۱۱]

نمایش داده می‌شود.

قضیه ۲:

$$E_{Z'}(x) = \alpha E_A(x),\ x \in \sqrt{\alpha}X \tag{۱۵.۳}$$

$$\mu_{Z'}(x) = \mu_A(\frac{x}{\sqrt{\alpha}})\ ,\ x \in \sqrt{\alpha}X \tag{۱۶.۳}$$

عدد فازی به دست آمده از عدد_Z در شکل ۶ نشان داده شده است.

قضیه ۳:

$$E_{Z'}(x) = E_{A^\alpha}(x). \tag{۱۷.۳}$$

با توجه به قضیه (۳) نشان داده می‌شود که Z و Z^α دارای انتظار فازی یکسانی هستند. در صورت لزوم اثبات قضیه‌های (۱۴.۳)، (۱۶.۳)، (۱۷.۳) به مقاله [۱۱] مراجعه گردد. در ادامه مثالی برای نشان دادن این رویکرد بررسی می‌کنیم.

فرض کنید فرد خبره نظر خود را به صورت زیر بیان کند:

$$A = (۰/۲۵, ۰/۳۵, /۰۴۵, ۱; ۱),$$

و مقدار قابلیت اطمینان نظرِ فرد خبره نیز به صورت زیر باشد،

$$R = (۰/۸, ۰/۹, ۱; ۱),$$

دانش فرد خبره را می‌توان به صورت یک عدد_Z مدل کرد:

$$Z = (A, R) = [(۰/۲۵, ۰/۳۵, ۰/۴۵, ۱; ۱), (۰/۸, ۰/۹, ۱; ۱)].$$

ابتدا بخش قابلیت اطمینان نظر فرد خبره (R) را به یک عدد قطعی مطابق رابطه (۱۲.۳) تبدیل می‌کنیم.

$$\alpha = \frac{\int_{۰/۸}^{۰/۹} x(\frac{x-۰/۸}{۰/۹-۰/۸})dx + \int_{۰/۹}^{۱} x(\frac{۱-x}{۱-۰/۹})dx}{\int_{۰/۸}^{۰/۹} (\frac{x-۰/۸}{۰/۹-۰/۸})dx + \int_{۰/۹}^{۱} (\frac{۱-x}{۱-۰/۹})dx} = ۰/۹,$$

سپس وزن به دست آمده از مولفه‌ی دوم عدد_Z را به مولفه‌ی اول اضافه می‌کنیم.

$$Z^{\alpha} = (۰/۲۵, ۰/۳۵, ۰/۴۵, ۱; ۰/۹).$$

و در پایان عدد_Z وزن‌دار را به عدد فازی معمول مطابق رویکرد پیشنهادی تبدیل می‌کنیم.

$$Z' = (\sqrt{۰/۹} \times ۰/۲۵, \sqrt{۰/۹} \times ۰/۳۵, \sqrt{۰/۹} \times ۰/۴۵, \sqrt{۰/۹} \times ۱; ۱)$$

$$= (۰/۹۴۸۷ \times ۰/۲۵, ۰/۹۴۸۷ \times ۰/۳۵, ۰/۹۴۸۷ \times ۰/۴۵, ۰/۹۴۸۷ \times ۱; ۱)$$

$$= (۰/۲۳۷۲, ۰/۳۳۲۰, ۰/۴۲۷۰, ۰/۹۴۸۷; ۱).$$

۴. کاربرد اعداد_Z

مفهوم اعداد_Z در حوزه‌های بسیاری به‌ویژه در زمینه‌ی محاسبه با احتمالات و وقایع توصیف‌شده با زبان طبیعی پتانسیل زیادی دارد. اعداد_Z در حوزه‌های مختلفی مانند تصمیم‌گیری، سیستم‌های کنترل، تحلیل رگرسیون، تشخیص بیماری و ارزیابی میزان خطر، رتبه‌بندی، محاسبات با کلمات و یادگیری ماشین کاربرد دارد.

در حوزه‌ی تصمیم‌گیری، اعداد_Z می‌توانند به عنوان مدل‌های احتمالی برای توصیف اطلاعات ناقص و مبهم در فرآیند تصمیم‌گیری استفاده شوند. این اطلاعات می‌توانند شامل ارزیابی‌ها، اولویت‌ها، ریسک‌ها و مقادیر غیرقطعی دیگر باشند. در سیستم‌های کنترل، اعداد_Z می‌توانند برای توصیف واقعیت‌ها و وضعیت‌های نامشخص استفاده شوند. این اعداد می‌توانند به عنوان ورودی‌ها یا خروجی‌های سیستم‌های کنترل استفاده شده و به سیستم‌ها کمک کنند تا با توجه به این عدم قطعیت، تصمیمات مناسبی اتخاذ کنند.

در تحلیل رگرسیون، اعداد_Z می‌توانند برای توصیف رابطه بین متغیرها با در نظر گرفتن عدم قطعیت در داده‌ها استفاده شوند. این رویکرد می‌تواند به محاسبه‌ی مدل‌های رگرسیون با دقت بالاتر و برازش بهتر به داده‌ها کمک کند. در تشخیص بیماری و ارزیابی میزان خطر،

اعداد_Z می‌توانند برای مدل‌سازی و پیش‌بینی عوارض و خطرات مرتبط با بیماری‌ها استفاده شوند. بعلاوه می‌تواند به بهبود تشخیص و پیش‌بینی بیماری‌ها و ارزیابی میزان خطر آنها کمک کند. همچنین، در رتبه‌بندی، محاسبات با کلمات و یادگیری ماشین، اعداد_Z می‌توانند برای توصیف و ارزیابی ابهام و ناهماهنگی در داده‌ها استفاده شوند. این رویکرد می‌تواند به بهبود دقت و عملکرد مدل‌ها در زمینه‌های مختلف مانند پردازش زبان طبیعی و تصمیم‌گیری هوشمند کمک کند.

در کل، استفاده از اعداد_Z در این حوزه‌ها امکان توصیف و مدل‌سازی اطلاعات ناقص و مبهم را فراهم می‌کند و بهبود در دقت و کارایی مدل‌ها را ممکن می‌سازد. در این بخش یک بررسی مهم درباره‌ی رویکردها و کاربردهای اعداد_Z ارائه می‌شود.

۱.۴. تصمیم‌گیری چند معیاره در چارچوب اعداد_Z. در چند دهه‌ی گذشته، تصمیم‌گیری براساس چندین معیار مورد توجه قرار گرفته است. با این حال، بسیاری از اطلاعات مورد نیاز برای این تصمیم‌گیری‌ها دارای عدم قطعیت هستند. به همین دلیل، مجموعه‌های فازی کلاسیک در زمینه‌ی تصمیم‌گیری فازی در چند دهه‌ی گذشته به طور فراوان مورد استفاده قرار گرفته‌اند. در روند ساخت مدل‌های مختلف، با تخمین‌ها و اندازه‌گیری‌های مختلفی سروکار داریم که معمولاً امکان نمایش آنها با قابلیت اطمینان مطلق وجود ندارد. این واقعیت عینی باعث پیچیدگی چشمگیری در روش‌های تصمیم‌گیری می‌شود، زیرا برای انجام تصمیم‌گیری صحیح و دقیق، باید قابلیت اطمینان اطلاعات را ارزیابی کنیم. تاکنون مشکل اصلی در تصمیم‌گیری، عدم ارزیابی صحیح قابلیت اطمینان اطلاعات ورودی بوده است، که پس از معرفی اعداد_Z توسط زاده تا حد زیادی برطرف شد. اعداد_Z نسبت به اعداد فازی کلاسیک، توانایی بیشتری در توصیف دانش انسانی دارند. این اعداد می‌توانند به عنوان مدلی برای نشان دادن میزان قطعیت اطلاعات استفاده شوند. به عبارت دیگر، اعداد_Z می‌توانند به صورت همزمان اطلاعات و اعتماد به اطلاعات را در نظر بگیرند. لذا، اعداد_Z که توانایی بیشتری نسبت به اعداد فازی کلاسیک در تعامل با اطلاعات دارند، به عنوان یک ابزار قدرتمند در توصیف دانش انسانی همراه با عدم قطعیت استفاده می‌شوند. استفاده از اعداد_Z در توصیف دانش انسانی به ما امکان مقابله بهتر با عدم قطعیت در داده‌ها را می‌دهد تا اطلاعات را به طور دقیق‌تری توصیف کنیم. با استفاده از اعداد_Z، می‌توان مدل‌های تصمیم‌گیری قدرتمندی ایجاد کرد که با توجه به عدم قطعیت موجود در داده‌ها، تصمیمات بهتری اتخاذ کنند.

در مرجع [۳۱] اعداد_Z در حل مسئله‌ی تصمیم‌گیری چند شاخصه با استفاده از اطلاعات دارای عدم قطعیت مورد استفاده قرار گرفته و یک چارچوب مسئله‌ی تصمیم‌گیری با استفاده از اعداد_Z پیشنهاد شده است. همچنین یاکوب وLTRfootnoteYaakob همکاران [۳۲] به منظور رسیدگی به مسئله انتخاب سهام، از اعداد_Z استفاده کرده و روش جدیدی با نام Z-TOPSIS را معرفی کرده‌اند. در این کار با اصلاح روش تاپسیس[1] راه حلی برای تسهیل مشکلات تصمیم‌گیری چندمعیاره بر اساس مفهوم اعداد_Z، ارائه شده است. روش پیشنهادی با استفاده از قابلیت اطمینان تصمیم‌گیرندگان، یک ساختار معنی‌دار برای رسمی‌کردن اطلاعات مسئله تصمیم‌گیری می‌سازد.

انتخاب تأمین‌کنندگان یک مسئله‌ی مهم در مدیریت کسب‌وکار است. هر چه سازمان وابستگی بیشتری به تأمین‌کنندگان خود داشته باشد، عواقب مستقیم و غیرمستقیم بیشتری در تصمیم‌گیری‌های ضعیف وجود خواهد داشت. هرگونه کمبود در هماهنگی زنجیره‌ی تأمین باعث تاخیرهای بیشتر و ارائه‌ی خدمات ضعیف به مشتری خواهد شد. از این رو، انتخاب تأمین‌کننده‌ی مناسب یک مسئله‌ی قابل توجه در تصمیم‌گیری‌های چندمعیاره (MCDM) است. تاکنون، روش‌های کلاسیک فازی به طور گسترده در مطالعات مربوط به انتخاب تأمین‌کننده مورد استفاده قرار گرفته‌اند. اما معمولاً قابلیت اطمینان اطلاعات از سوی کارشناسان این حوزه به طور کافی و کارآمد مورد توجه قرار نمی‌گیرد. در صورتی که اطلاعات موجود در مورد تأمین‌کنندگان وابسته به تخمین‌ها و اندازه‌گیری‌های مختلف باشد، ما با مشکلاتی در تصمیم‌گیری روبرو خواهیم شد. این شکاف اطمینان، قدرت تصمیم‌گیری را به طور قابل توجهی کاهش می‌دهد. با توجه به اهمیت انتخاب تأمین‌کننده‌ی مناسب، لازم است روش‌های جدیدی مورد بررسی قرار گیرند که به اطلاعات دارای عدم قطعیت بپردازند و قابلیت اطمینان را به طور کامل در نظر بگیرند. در مقاله [۳۳]، یک روش برای انتخاب تأمین‌کننده با استفاده از اعداد_Z ارائه شده است. که شامل دو بخش است: یکی مسئله‌ی چگونگی تبدیل اعداد_Z به اعداد فازی کلاسیک که طبق انتظار فازی ارائه می‌شود و دیگری چگونگی به دست آوردن وزن اولویت بهینه برای انتخاب تامین‌کننده با الگوریتم ژنتیک (GA)، که در مقایسه با فازی سلسه مراتبی (AHP) روشی کارآمد و انعطاف پذیر برای محاسبه وزن اولویت ماتریس تصمیم‌گیری است.

[1] TOPSIS

کنگ و همکاران [۳۴] سودمندی کل[1] (TU) اعداد_Z را بر اساس اعداد فازی کلاسیک تعریف کرده‌اند. در این مرجع، مفهوم جدیدی از سودمندی کل اعداد_Z برای اندازه‌گیری اثرات کل یک عدد_Z ارائه شده است که به ویژگی‌های ریاضی ذاتی اعداد_Z بستگی دارد. سپس مفهوم پیشنهادی مطلوبیت کل اعداد_Z برای تعیین رتبه‌بندی اعداد_Z استفاده می‌شود. روش پیشنهادی به راحتی می‌تواند در کاربرد تصمیم‌گیری چند معیاره مورد استفاده قرار گیرد. برخی از نمونه‌ها برای نشان‌دادن اثربخشی روش پیشنهادی استفاده شده اند.

تحلیل پوششی داده‌ها[2] که به اختصار DEA نیز گفته می‌شود، یک روش ناپارامتری در حوزه‌ی تحقیق در عملیات و اقتصاد است که کار آن اندازه‌گیری یا برآورد کارایی عملکرد واحدهای تولیدی است. البته در اینجا منظور از واحد تولیدی می‌تواند شامل کارخانجات و همین‌طور شرکت‌های ارائه‌کننده‌ی خدمات نیز باشد. در نتیجه می‌توان از تحلیل پوششی داده‌ها در هر نوع فعالیت اقتصادی استفاده کرد تا از ورودی‌ها و خروجی‌های مختلف برای اندازه‌گیری کارایی واحدهای تصمیم‌گیری در آن حوزه استفاده کند. با این حال، در مشکلات واقعی دستیابی به داده‌های ورودیِ با کیفیت، آسان نیست. اگرچه مفهوم مجموعه‌ی فازی برای تعیین کمیت داده‌های مبهم معرفی شده است، مدل‌های DEA فازی محدودیت‌هایی دارند. هنگام برخورد با اطلاعات واقعی، تنها توجه به فازی‌بودن کافی نیست، بلکه قابلیت اطمینان اطلاعات نیز بسیار مهم است. از آنجایی که یک عدد_Z توانایی به تصویر کشیدن اطلاعات دارای عدم قطعیت را دارد، بنابراین در مقاله [۳۵] یک تحلیل پوششی داده‌ی جدید با استفاده از یک مدل برنامه‌نویسی خطی کاملا فازی (FFLP) ارائه شده است، که در آن تمام ورودی ها، خروجی‌ها و وزن آن‌ها عدد_Z هستند. برای تبدیل یک عدد_Z به عدد فازی کلاسیک از روش کنگ[3] و همکاران [۱۱] استفاده شده است. سرانجام، از مدل FFLP[4] استفاده کرده و مدل کاملاً مبهم را به مدل برنامه‌ریزی خطی کلاسیک تبدیل نموده است. همچنین با ارائه‌ی روش جدید محاسباتی رو به جلو نیاز به محاسبات کمتری وجود دارد به علاوه روالی منظم در اختیار قرار می‌دهد که می‌تواند به سادگی گسترش یابد تا با مشکلات مختلف تصمیم‌گیری و رتبه‌بندی مقابله کند.

یک مدل تحلیل پوششی داده[5] (Z-DEA) برای حل مدل CCR_ اولین مدل تحلیل پوششی داده‌ها_ در مرجع [۳۶] ارائه شده است که در آن ورودی و خروجی اعداد_Z هستند. روند

[1] Total utility
[2] Data Envelopment Analysis
[3] Bingyi Kang
[4] Fully fuzzy linear programming
[5] Z-number Data Envelopment Analysis

انجام این کار با تبدیل مدل Z-DEA به DEA فازی معمول بر اساس روش کنگ و همکاران [۱۱] انجام می‌شود. اگرچه تبدیل اعداد_Z به اعداد فازی استاندارد منجر به از دست دادن اطلاعات می شود.

در مقاله [۳۷]، نسخه‌ی جدیدی از اعداد_Z برای مدل‌های CCR و BCC برای داده‌های دارای عدم قطعیت به ویژه برای تجزیه‌وتحلیل آینده‌ی واحدهای تصمیم‌گیری ارائه شده است. روش تبدیل این مدل‌ها به مدل‌های احتمالی و سپس استفاده از برش_آلفا برای به دست آوردن مدل‌های برنامه‌ریزی خطی واضح نیز پیشنهاد شده است. از مدل پیشنهادی می‌توان برای رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیری استفاده کرد، که در آنها ورودی و خروجی هر دو عدد_Z باشند. برای نشان‌دادن کاربرد مدل پیشنهادی، از یک مسئله‌ی انتخاب نمونه کارها در علوم اطلاعات استفاده شده است.

تصمیمات منطقی براساس اطلاعات دارای عدم قطعیت معمولاً مبهم و ناقص هستند. نظریه‌های تصمیم‌گیری موجود با سه سطح تعمیم اطلاعات از جمله ارزیابی عددی، ارزیابی بازه‌ای و ارزیابی فازی سروکار دارند. نظریه‌های تصمیم کلاسیک، همچون نظریه‌ی مطلوبیت انتظاری توسط نویمان_مورگنشترن[1] از اولین سطح تعمیم، یعنی از منظر ارزیابی عددی استفاده می‌کنند. این رویکرد مستلزم آن است که، احتمالات عینی یا احتمالات ذهنی و مقادیر مطلوبیت دقیقاً مشخص شوند، اما در دنیای واقعی در بسیاری از موارد، تعیین مقادیر دقیق اطلاعات مورد نیاز غیرممکن است. از این‌رو در تصمیم‌گیری‌ها از تجزیه‌وتحلیل فاصله و تئوری‌های مجموعه فازی کلاسیک استفاده شده و نتایج خوبی نیز حاصل شده است. اما مسئله این است که در نظریه‌های تصمیم‌گیری ذکر شده، قابلیت اطمینان اطلاعات مربوط به تصمیم‌گیری به خوبی مورد توجه قرار نگرفته است. زاده مفهوم اعداد_Z را برای توصیف اطلاعات دارای عدم قطعیت معرفی کرد، استفاده از اطلاعات_Z برای رسمیت بخشیدن به ساختار اطلاعاتی مسئله‌ی تصمیم‌گیری مناسب و از نظر شهودی معنی‌دار است. در مقاله [۳۸]، از اعداد_Z برای تصمیم‌گیری استفاده شده و دو رویکرد ازجمله تبدیل اعداد_Z به اعداد فازی کلاسیک، استفاده از انتگرال چوکوئت [2] و محاسبه مستقیم با استفاده از اعداد_Z را دنبال می‌کند.

در مرجع [۳۹]، روشی برای حل مشکل انتخاب تامین‌کننده، تحت قابلیت اطمینان جزئی اطلاعات با استفاده از اعداد_Z پیشنهاد شده که بر اساس محاسبه‌ی عدد_Z و فاصله‌ی بین اعداد_Z می‌باشد، که از مفهوم راه‌حل ایده‌آل استفاده می‌کند. در این روش، اطلاعات با

[1] Von Neumann–Morgenstern
[2] Choquet integral

ارزش اعداد–Z به اطلاعات فازی تبدیل نمی‌شوند، بلکه بهترین گزینه (تامین‌کننده) موردی است که بهترین تعادل فاصله تا راه‌حل ایده‌آل و راه‌حل ایده‌آل منفی را داشته باشد. برای تأیید روش پیشنهادی، یک مثال عددی ارائه شده است. مزیت اصلی این روش استفاده‌ی مستقیم از اطلاعات با ارزش عدد–Z بدون تبدیل آنها به فرم فازی است.

در تصمیم‌گیری‌ها و تحلیل‌های مختلف، اطلاعات قابل اعتماد بسیار مهم هستند. این اعتمادپذیری در بسیاری از موارد به شرایط خاصی وابسته است. مقاله [۴۰]، به معرفی اعداد–Z پیشرفته[1] (ZA-number) می‌پردازد. عدد ZA به دو حالت اصلی تقسیم می‌شود. حالت اول به صورت $ZA_{one} = ((y_i, A_{y_i}), B, C)$ تعریف می‌شود که شامل ۳ عضو است. جزء اول از اعداد y_i و A_{y_i} تشکیل شده است، که هر A_{y_i}، محدودیت مربوط به y_i متناظر خودش را نشان می‌دهد. جزء دوم B یک محدودیت بر روی متغیرهای حقیقی ناشناخته x ارائه می‌دهد. جزء سوم، C یک مقیاس محرمانگی[2] مرتبط با B است. حالت دوم به صورت $ZA_{tow} = ((y_{۱,i}, A_{y_{۱,i}}), (y_{۲,j}, A_{y_{۲,j}}), ..., (y_{n,z}, A_{y_{n,z}}), B, C)$ که شامل $(n+۲)$ عضو است، تعریف می‌شود. بخش اول شامل اعضای i ام به شکل A_{y_i} می‌باشد، به گونه‌ای که هر یک از $A_{y_{۱,i}}$ مقدار تقریبی برای $y_{۱,i}$ متناظر خودش است. بخش دوم شامل عضو j ام به شکل A_{y_j} است که هر یک از $A_{y_{۲,j}}$ محدودیت برای $y_{۲,j}$ متناظر خودش است که به $A_{y_{۱,i}}$ قبل از خود وابسته است. به همین ترتیب، بخش n ام شامل اعداد–Z به شکل A_{y_z} می‌باشد که هر یک از $A_{y_{۱,z}}$ مقدار تقریبی برای $y_{۱,z}$ متناظر خودش است که به A_y قبل از خود وابسته است. بخش $(n+۱)$ام، یعنی B، محدودیت برای روی متغیر ناشناخته x است و بخش $(n+۲)$ ام، یعنی C، مقیاس محرمانگی مرتبط با مؤلفه $(n+۱)$ ام می‌باشد.

برخی افراد ممکن است توانایی قابل توجهی برای اتخاذ تصمیمات منطقی بر اساس اطلاعات دارای عدم قطعیت و ناقص داشته باشند. معتمدی‌پور و همکاران [۴۱]، فرمول‌بندی داده‌های دارای عدم قطعیت و نمایش این توانایی را با استفاده از مفهوم اعداد–Z مبتنی سیستم معادلات خطی پیشنهاد می‌دهند.

۲.۴. رتبه‌بندی. اعداد حقیقی را می‌توان با توجه به بزرگ‌تر یا کوچک‌تر بودن آن‌ها رتبه‌بندی کرد ولی از آنجایی که اعداد فازی با توابع توزیع احتمال نشان داده می‌شوند و این توابع در برخی نقاط با یکدیگر هم‌پوشانی دارند، تعیین رتبه‌بندی اعداد فازی دشوار است. در چندین دهه‌ی گذشته مجموعه‌های فازی کلاسیک در زمینه‌هایی مانند کنترل فازی، تصمیم‌گیری

[1] Z-Advanced number
[2] Confidentiality

فازی، بهینه‌سازی، پیش‌بینی و غیره مورد استفاده‌ی بسیاری قرار گرفته‌اند [۴۲، ۴۳، ۴۴]. از آنجایی که رتبه‌بندی اعداد فازی نقش مهمی در چنین مسائلی ایفا می‌کند، این موضوع از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. تلاش‌های زیادی در جهت تعیین روش‌ها و معیارهایی برای رتبه‌بندی اعداد فازی انجام شده است و همچنان این حوزه موضوع تحقیقات بسیاری قرار می‌گیرد. بنابراین، اهمیت رتبه‌بندی اعداد فازی به عنوان یک مسئله‌ی مهم در تحقیقات و کاربردهای عملی آن قابل تأکید است.

رتبه‌بندی اعداد فازی مورد توجه پژوهشگران بسیاری قرار گرفته که از جمله‌ی آن‌ها می‌توان به [۴۵] اشاره داشت. در این تحقیق یاگر[1] چهار شاخص را به منظور مرتب‌کردن مقادیر فازی پیشنهاد کرده است. چنگ[2] [۴۶] و همکاران روش رتبه‌بندی اعداد فازی با استفاده از روش فاصله از مرکز ثقل معرفی کرده اند. این روش نیز دارای نواقصی بود که توانایی رتبه‌بندی تمامی اعداد فازی را نداشت، به همین خاطر پژوهشگران دیگری به دنبال راه‌حل‌هایی بودند تا بتوانند اعدادی که دارای مرکز ثقل یکسانی هستند را رتبه‌بندی کنند. برای نمونه می‌توان به مقالات [۴۳، ۴۴، ۴۷] اشاره داشت. در این راستا مرجع [۴۲]، روش بهبود یافته‌ای بر اساس فاصله‌ی چنگ معرفی کرده است که مشکل روش مطرح شده در مرجع [۴۶] را بر طرف می‌کند.

از آغاز مطرح‌شدن تئوری فازی پژوهشگران تلاش نموده‌اند تا از این مفهوم در حوزه‌های مختلف استفاده کنند. بحث روش‌های تصمیم‌گیری چند شاخصه یکی از این موارد است، که در آن خروجی و وزن به دست آمده به صورت فازی می‌باشد. در این حالت، مرتب‌کردن اعداد فازی و رتبه‌بندی آن‌ها از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. در نتیجه رتبه‌بندی اعداد فازی یکی از مولفه‌های مهم مراحل تصمیم‌گیری می‌باشد. به همین منظور تلاش‌های زیادی برای معرفی روش‌های مختلفی برای مقایسه و در نتیجه رتبه‌بندی اعداد_Z صورت گرفته است. برای مقایسه‌ی دو عدد فازی و در نتیجه رتبه‌بندی آن‌ها، دو روش کلی مطرح شده است. یکی از روش‌ها، غیرفازی کردن اعداد فازی و سپس مقایسه‌ی مقادیر قطعی به دست آمده برای آن‌ها است. در این روش، ابتدا اعداد فازی به اعداد قطعی تبدیل می‌شوند و سپس مقادیر قطعی به عنوان معیار برای مقایسه و رتبه‌بندی استفاده می‌شوند. روش دیگر، مقایسه‌ی اعداد فازی به صورت فازی با یکدیگر است. در این حالت، اعداد فازی مستقیماً با یکدیگر مقایسه می‌شوند و نتیجه‌ی مقایسه نیز به صورت فازی به دست می‌آید. در مجموعه‌های فازی معیاری برای

[1] Yager
[2] Cheng

قابلیت اطمینان اطلاعات در نظر گرفته نشده است به همین منظور زاده در [۶] با معرفی مفهوم اعداد_Z درصدد رفع این مشکل برآمده است.

تصمیم‌گیری تحت اطلاعات مبتنی بر اعداد_Z مستلزم رتبه‌بندی اعداد_Z است. در مرجع [۴۸]، یک روش اساسی شبه انسانی برای رتبه‌بندی اعداد_Z ارائه شده، که بر اساس دو ایده‌ی اصلی است. ایده‌ی اول درجات بهینه‌بودن اعداد_Z را محاسبه می‌کند و در ایده‌ی دوم درجات بهینگی به دست آمده با استفاده از نظر یک کاربر با یک درجه بدبینی را برای در نظرگرفتن نظر یک انسان وزن می‌کند. دو نمونه و یک برنامه‌ی کاربردی در دنیای واقعی برای نشان‌دادن اعتبار تحقیق پیشنهادی ارائه شده است .

در مرجع [۴۹]، مدل‌هایی برای ارزیابی رتبه‌بندی اشیاء و نظارت بر عملکرد آن‌ها تحت اطلاعات_Z تهیه شده است. در این مدل‌ها، رتبه‌بندی اشیاء بر اساس خصوصیات کیفی تعیین می‌شود و از اطلاعات آماری یا نظرسنجی متخصصان برای ساخت مدل‌ها استفاده می‌شود. برای عملیات با اعداد_Z در این مدل‌ها، نقاط وزنی در نظر گرفته می‌شوند تا اطلاعات مربوط به اعداد_Z در تمام برش‌های آلفا جمع شوند. در واقع، این نقاط وزنی به تعداد مؤلفه‌های اعداد_Z مرتبط هستند. شناخت حالات اشیاء بر اساس ارزیابی رتبه‌بندی آنها صورت می‌گیرد و فاصله‌ی بین اعداد_Z بر اساس نقاط وزنی تعیین می‌شود. در اینجا، فاصله با در نظر گرفتن مؤلفه‌های اول و دوم عدد_Z محاسبه می‌شود و همچنین مؤلفه‌ی اول در وزن مؤلفه‌ی دوم ضرب می‌شود. نظارت بر عملکرد اشیاء نیز بر اساس مقایسه‌ی اجزای اول اعداد_Z و در صورت برابری آن‌ها، بر اساس مؤلفه‌های دوم اعداد_Z انجام می‌شود. این مدل‌ها و روش‌ها می‌توانند به کمک اعداد_Z به عنوان ابزاری برای رتبه‌بندی و نظارت بر عملکرد اشیاء استفاده شوند، که با در نظر گرفتن عدم قطعیت و ابهام، امکان مدل‌سازی دقیق‌تر و بهبود کارایی را فراهم می‌کنند.

مرجع [۵۰]، یک روش رتبه بندی جدید را برای اعداد فازی و اعداد_Z بر اساس تابع تانژانت هیپربولیک[1] و ترکیب محدب[2] پیشنهاد داده است. در این روش به یک رویکرد چندلایه‌ای با استفاده از تابع تانژانت هیپربولیک برای رتبه‌بندی اعداد_Z پرداخته شده است. به‌طوری که در لایه اول و دوم، قابلیت اعتماد و میانگین انحراف معیار عدد_Z بر روی ترکیب اعداد فازی محدب به دست می‌آید. سپس در لایه سوم، با استفاده از تابع تانژانت هیپربولیک به همراه نتایج لایه‌های اول و دوم، رتبه‌بندی اعداد_Z انجام می‌شود.

[1] Hyperbolic tangent function
[2] Convex combination

در مرجع [۵۱]، ابتدا مفهوم اعداد_Z معرفی و سپس عملیات محاسباتی برای آن تعریف می‌شود. علاوه بر این، چندین روش برای رتبه‌بندی اعداد_Z بررسی می‌شود. همچنین به عنوان یکی از کاربردها، یک روش رگرسیون بر اساس تکنیک شبکه عصبی به تفصیل توضیح داده شده است.

مرجع [۵۲]، یک روش نوآورانه به منظور رتبه‌بندی اعداد_Z ارائه می دهد که قابلیت تصمیم‌گیری با حساسیت بالا را داشته باشد. هدف این رویکرد این است که با استفاده از عملیات حسابی بر روی اعداد_Z، فرآیند تصمیم‌گیری را با گام‌های مختلف انجام دهد. به این ترتیب، این مقاله سعی دارد تا روشی جدید برای رتبه‌بندی اعداد_Z ارائه دهد که در تصمیم‌گیری‌هایی که حیات انسان در معرض خطر است یا تصمیم‌گیری یک سازمان که ممکن است تأثیر مهمی بر وضعیت جامعه دارد، حساسیت بیشتری داشته باشد.

مقاله [۵۳]، به ارتقاء فرآیند رتبه‌بندی اعداد_Z می‌پردازد. نویسندگان معیاری برای محاسبه مقدار بزرگی اعداد_Z ارائه می‌دهند. این مقاله سعی دارد یک روش نوآورانه ارائه دهد که به تصمیم‌گیران کمک کند تا اعداد_Z را بر اساس مقدار بزرگی[1] آن ها به بهترین شکل ممکن رتبه‌بندی کنند.

در دنیای واقعی، داده‌های مرتبط با تصمیم‌گیری معمولاً دقیق نیستند و تحلیل دقیق و مقایسه این داده‌ها از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. اعداد فازی و اعداد_Z ابزارهایی مهم برای مدیریت این عدم قطعیت‌ها و انجام تصمیم‌گیری‌های دقیق‌تر در مواجهه با داده‌های دارای عدم قطعیت و مبهم محسوب می‌شوند. در این مرجع [۵۴]،یک روش جدید برای رتبه‌بندی اعداد_Z معرفی می‌شود که بر اساس نقطه‌ی مرکزی اعداد_Z تعریف شده است. این روش با ارزیابی فاصله بین نقاط مرکزی اعداد_Z، امکان رتبه‌بندی دقیق‌تر را فراهم می‌کند. الگوریتم ارائه شده در این روش محاسبات ساده‌ای دارد و نتایج قابل قبولی را برای داده‌های مختلف در شرایط مختلف ارائه می‌دهد. نویسندگان برای اثبات کارایی این روش، از دو مثال عملی بهره برده‌اند. ابتدا، با رتبه‌بندی بازده دارایی‌های بورس تهران با استفاده از این روش، سهام‌هایی با ریسک بالا و کمترین ریسک را مشخص کردند. مزیت این روش نسبت به روش‌های فازی معمولی، در نظر گرفتن عدم قطعیت و اختصاص اعتبار به دیدگاه متخصصان برای تخمین پارامترهای فازی است. در مثال دوم، عوامل مؤثر بر بهره‌وری امنیت گردشگری را رتبه‌بندی کرده و با استفاده از الگوریتم پیشنهادی، مهم‌ترین و بی‌اهمیت‌ترین عوامل برای بودجه‌بندی امنیت گردشگری معرفی شده است.

[1] Magnitude value

در مقاله [۵۵]، یک روش جدید برای رتبه‌بندی اعداد_Z و تعمیم‌های آن ارائه می‌شود. این روش بر اساس ساختار داخلی شبکه‌های عصبی مصنوعی توسعه داده شده است. ساختار این شبکه عصبی از وزن‌های ورودی و توابع انتقال خطی، غیرخطی و حتی ترکیبی از خطی و غیرخطی تشکیل شده است. اثبات می‌شود که روش پیشنهادی در مقایسه با روش‌های مبتنی بر مرکز گرانش قابلیت رتبه‌بندی منطقی‌تری را در مواردی که اعداد_Z دارای مؤلفه‌های اول برابر هستند و بازه‌های اطمینان آن‌ها مرکز گرانش یکسانی دارند، ارائه می‌دهد.

۳.۴. محاسبات با کلمات. محاسبه با کلمات روشی است که در آن کلمات به جای اعداد برای محاسبه و استدلال به کار می‌روند. این روش از تکنیک‌های مختلف منطق فازی در دهه‌های گذشته بهره برده و قابلیت اطمینان را در نظر نگرفته است. اعداد_Z به عنوان یک الگوی نوظهور در محاسبات با کلمات استفاده می‌شوند. این مفهوم به عنوان مبنایی برای محاسباتی که قابلیت اطمینان و احتمال را در نظر می‌گیرند، مطرح شده است. اعداد_Z تلاقی بین دو روش برجسته‌ی عدم قطعیت، امکان و احتمال است که محاسبات عبارات پیچیده را امکان‌پذیر می‌کند. با این حال، محاسبات روی اعداد_Z نیازمند حل یک مسئله‌ی بهینه‌سازی پیچیده بر روی تمام فضای توزیع امکانی و احتمالی است. این مسئله‌ی بهینه‌سازی می‌تواند منجر به کند شدن محاسبات با کلمات شود.

مقاله [۵۶]، یک مدل کاربردی از اعداد_Z را بر اساس برخی مفروضات با توجه به توزیع احتمال ارائه می‌دهد. این مدل با استفاده از نظر یک متخصص دامنه و تعداد توزیع احتمال مجاز در محاسبه‌ی اعداد_Z، محدودیت‌هایی را اعمال می‌کند. این محدودیت‌ها در واقع تعیین‌کننده‌هایی هستند که باید توسط توزیع‌های احتمال رعایت شوند تا در محاسبات اعداد_Z استفاده شوند. این رویکرد امکان ارائه‌ی یک نسخه‌ی ساده و مجزا از محاسبات اعداد_Z را فراهم می‌کند. در این مرجع یک الگوریتم و یک مثال برای نشان دادن کارایی مدل پیشنهادی ارائه شده است.

از آنجایی که برخی محاسبات مربوط به اعداد_Z مبهم و پیچیده هستند که منجر به پیچیدگی مسئله در حوزه‌هایی مانند محاسبه با کلمات می‌شوند و یکی از مهم‌ترین عوامل کمک‌کننده به پیچیدگی استفاده از توزیع‌های احتمال در محاسبات است. مرجع [۵۷] به دنبال ارائه‌ی یک مدل کاربردی از اعداد_Z بر اساس پیش‌فرض‌های واقعی در مورد توزیع احتمالات است. الگوریتم‌هایی برای پیاده‌سازی این مدل و تکمیل آن با یک سیستم خبره برای محاسبه با کلماتی به نام CWShell ارائه شده است. CWShell ابزاری نرم‌افزاری است که محاسبات

اساسی مورد نیاز برای محاسبه با کلمات را خلاصه می‌کند و روشی مناسب برای نمایش و محاسبه‌ی زبان طبیعی بدون ساختار با استفاده از زبان تخصصی به‌نام زبان عمومی محدود شده[1] (GCL) فراهم می‌کند. این مقاله ساختارهای جدیدی را برای اعداد_Z در GCL معرفی می‌کند و مکانیسم استنباط دقیق و استراتژی محاسبه‌ی آن ساختارها را ارائه می‌دهد. این پژوهش به وسیله‌ی CWShell و استفاده از زبان عمومی محدود شده (GCL)، توانسته است راهکارهایی برای کاهش پیچیدگی در محاسبات با اعداد_Z و محاسبات با زبان طبیعی ارائه دهد.

اعداد_Z فلسفه‌ی اساسی محاسبات با کلمات[2] (CWW) را گسترش می‌دهد تا شامل درک عدم اطمینان اطلاعات منتقل شده توسط زبان طبیعی باشد. بنابراین اعداد_Z، به عنوان الگوی جمع‌بندی زبانی از زبان طبیعی عمل می‌کند و روشی برای ادغام دیدگاه‌های انسانی و عاطفی در محاسبه با کلمات است، در نتیجه می‌توان پیش‌بینی کرد که نقشی اساسی در حوزه‌ی طراحی سیستم مبتنی بر محاسبات با کلمات و پردازش زبان طبیعی[3] (NLP) خواهد داشت. مقاله [۵۸]، به بررسی رویکرد اعداد_Z در حوزه‌ی محاسبه با کلمات می‌پردازد و ارزیابی دقیقی از این رویکرد ارائه می‌دهد. نویسندگان در این مطالعه الگوریتمی را برای محاسبات با کلمات با استفاده از اعداد_Z پیشنهاد می‌کنند.

مرجع [۵۹]، به برخی از مشارکت‌های اعداد_Z در محاسبات با کلمات از منظر پردازش زبان طبیعی (NLP) می‌پردازد. الگوریتمی نیز برای انجام محاسبات با کلمات با استفاده از اعداد_Z برای شبیه‌سازی سناریوهای مرتبط با محاسبات با کلمات در زندگی واقعی پیشنهاد شده است. با این حال، اجرای واقعی اعداد_Z هنوز به دلیل برخی مسائل اساسی انجام نشده است. به‌ویژه، الگوریتم‌های استخراج مسائل اعداد_Z از عبارات زبان طبیعی و تبدیل اعداد_Z به عبارات ریاضی و عبارات زبان طبیعی هنوز به طور کامل در دسترس نیستند. این مسئله نشان می‌دهد که هنوز نیاز به تحقیقات و توسعه‌ی بیشتر در این زمینه وجود دارد تا بتوان اعداد_Z را به طور کامل در محاسبات با کلمات و پردازش زبان طبیعی به کار برد.

۴.۴. یادگیری ماشین. مدل‌سازی اعتماد در دنیای مجازی برای تعامل بین دو طرف، مانند کاربران و سیستم‌های هوشمند، بسیار مهم است و یک جنبه‌ی حیاتی از هوش تجاری است. در این مدل‌ها، پیش‌بینی دقیق ارزش اعتماد آینده‌ی یک طرف تعامل، از اهمیت بالایی برخوردار است. بعضی از مدل‌های اعتماد پیشنهادی، ارزش اعتماد را به صورت کیفی

[1] Generalized Cnstraint Language
[2] Computing with Words
[3] Natural Language Processing

مدل‌سازی می‌کنند. به عبارت دیگر، این مدل‌ها به طرف دوم اعتماد یا عدم اعتماد را اختصاص می‌دهند و این ارزش اعتماد اختصاص یافته، مبنایی برای ارائه‌ی پیشنهادها و تصمیم‌گیری‌ها را تشکیل می‌دهد. مدل‌های اعتماد پیشنهادی می‌توانند براساس مجموعه‌ای از ویژگی‌ها و معیارها، مانند تجربه‌ی گذشته، قابلیت اطمینان سیستم، شفافیت عملکرد و تعهدات قبلی، ارزش اعتماد را تعیین کنند. با مدل‌سازی این معیارها به صورت کمّی و استفاده از روش‌های آماری و ماشینی، پیش‌بینی دقیق‌تری برای ارزش اعتماد آینده ارائه می‌شود. هدف از مدل‌سازی اعتماد در دنیای مجازی، افزایش اطمینان و کاهش عدم قطعیت در تعاملات است. با استفاده از مدل‌های اعتماد قوی و قابل اعتماد، می‌توان بهبود کیفیت تصمیم‌گیری‌ها، افزایش رضایت طرف‌های تعامل و حفظ اعتماد در محیط‌های مجازی را بهبود بخشید. به طور کلی، مدل‌سازی اعتماد در دنیای مجازی اهمیت بالایی دارد و با استفاده از روش‌های متنوع و معتبر، می‌توان ارزش اعتماد طرف تعامل را به طور دقیق پیش‌بینی کرده و به بهبود صحت و کارایی تصمیم‌گیری‌ها و تعاملات در دنیای مجازی کمک کرد. همچنین، ایجاد روابط بر پایه‌ی اعتماد قابلیت سازمان‌دهی و همکاری مؤثر را در محیط‌های مجازی تسهیل می‌کند.

در مرجع [۶۰]، برای پیش‌بینی مقادیر اعتماد، یک روش هوشمند برای پیش‌بینی ارزش اعتماد آینده یک نهاد مورد اعتماد به صورت اعداد ـ Z که نشان‌دهنده‌ی هر دو مقدار اعتماد و قابلیت اطمینان مربوط به آن باشد، پیشنهاد می‌شود تا عبارات کیفی را به اعداد واقعی تبدیل کند. رویکرد پیشنهادی این مقاله مکانیسمی را برای کمک به تصمیم‌گیرندگان در تدوین یک روش تصمیم‌گیری موثر برای پیش‌بینی ارزش اعتماد آینده سایر نهادها فراهم می‌کند. هدف این است که تصمیم‌گیرندگان را از رفتار آینده‌ی نماینده مورد اعتماد آگاه کند، تا هزینه و ریسک را که ممکن است توسط عامل اعتماد در تعاملات آینده با نماینده‌ی معتمد متحمل شود، کاهش یابد. برای دست‌یابی به این هدف، تعیین و تجزیه و تحلیل مقادیر اعتماد گذشته بین دو عامل و یک روش مفید برای غلبه بر غیرخطی بودن رفتار عامل قابل اعتماد است. برای انجام این فرآیند، استفاده از داده‌های گذشته ارزش اعتماد لازم است. به عبارت دیگر، فعل و انفعالات گذشته بین نماینده مورد اعتماد داده‌شده و تمام طرف‌های تعامل آن (یا نمایندگان معتمد) و مقداری که توسط هر یک از آنها به نماینده مورد اعتماد اختصاص داده شده است. در این مرجع سری‌های زمانی برای پیش‌بینی اعتماد در دو سناریوی کوتاه مدت و میان مدت در نظر گرفته شده است. به منظور اعتبارسنجی رویکرد پیش‌بینی، برای هر یک از این سناریوها یک سری زمانی ایجاد کرده و از شبکه‌های عصبی مصنوعی[1] (ANN) برای پیش‌بینی اعتماد استفاده

[1] Artificial neural network

می‌شود. در این کار زمان یک ماه در نظر گرفته شده است. بنابراین، تعامل بین سایر عوامل جامعه و نماینده مورد اعتماد باید هر ماه یک بار انجام شود. مدت زمان دوره‌ی کوتاه مدت را ۱۲ ماه و دوره میان مدت ۲۱ ماه در نظر گرفته شده است. از روش کنگ وهمکاران [۱۱] برای تبدیل هر مقدار اعتماد (به صورت یک عدد_Z) به یک مجموعه فازی معمولی استفاده می‌شود و سپس از روش‌های فازی‌ساز برای تغییر این مجموعه‌ی فازی به اعداد واقعی استفاده می‌شود که مقادیر اعتماد را در هر بار نشان می‌دهد. الگوریتم پیشنهادی تمام سناریوهای منطقی رفتارهای اعتماد گذشته را ایجاد می‌کند و بهترین شبکه عصبی مصنوعی را برای این سناریوها انتخاب می‌کند. برای تخمین عملکرد شبکه عصبی مصنوعی طراحی‌شده، از روش اعتبارسنجی متقابل استفاده شده است. در اعتبارسنجی متقابل، مجموعه داده ابتدا به k قسمت تقسیم می‌شود. یک قسمت برای آزمایش و بقیه برای اهداف آموزشی استفاده می‌شود. این مراحل تکرار می‌شوند تا زمانی که از همه قطعات به عنوان مجموعه‌ی آزمایش استفاده شود. ویژگی اصلی این الگوریتم این‌است که مقادیر اعتماد گذشته را به صورت متغیرهای زبانی گرفته و با وارد کردن قابلیت اطمینان گفته‌های نماینده معتمد، از ویژگی‌های اعداد_Z برای پردازش مقادیر اعتماد استفاده می‌کند.

برنامه‌ریزی خطی[1] (LP) یک تکنیک تحقیق در عملیات است که به طور مکرر در زمینه‌های علوم، اقتصاد، تجارت، علوم مدیریت و مهندسی مورد استفاده قرار می‌گیرد. اگرچه چند دهه مورد بررسی و استفاده قرار گرفته است و مدل‌های LP با سطوح متفاوت تعمیم اطلاعات مربوط به پارامترها از جمله مدل‌هایی با پارامترهای فاصله، فازی، فازی تعمیم‌یافته و اعداد تصادفی در نظر گرفته شده‌اند، اما تاکنون هیچ رویکردی برای اطمینان از قابلیت اطمینان اطلاعات آن‌ها وجود ندارد. در مرجع [۶۱]، یک مدل برنامه‌ریزی خطی مبتنی بر اعداد_Z (Z-LP) را معرفی می‌کند که در آن هر دو پارامتر و متغیرهای تصمیم مدل برنامه‌ریزی خطی با استفاده از اعداد_Z توصیف می‌شوند. این مدل از روش بهینه‌سازی تکاملی تفاضلی[2] (DE) برای حل مسئله استفاده می‌کند. یکی از مزایای اصلی این روش نسبت به مدل‌های برنامه‌ریزی خطی مبتنی بر اعداد فازی، قابلیت اطمینان نتیجه به دست آمده با استفاده از روش پیشنهادی است. استفاده از اعداد_Z به جای اعداد فازی می‌تواند به ساختار اطلاعاتی مسئله‌ی تصمیم‌گیری رسمیت بخشد و نتایجی معنی‌دار و قابل شهود ارائه دهد. این مدل پیشنهادی مبتنی بر اعداد_Z به دلیل توانایی آن در مدل‌سازی داده‌های ناقص و تا حدی قابل اعتماد، در زمینه‌های تجزیه و تحلیل

[1] Linear Programming
[2] Differential Evaluation

تصمیم، تجزیه و تحلیل سیستم، کنترل، بهینه‌سازی، پیش‌بینی و سایر زمینه‌های مرتبط با دنیای واقعی مفید خواهد بود. با این حال، لازم به ذکر است که روش پیشنهادی نیازمند محاسبات پیچیده‌تری است و هنوز برخی مسائل و موانع مربوط به اعداد_Z در محاسبات با کلمات و پردازش زبان طبیعی باقی می‌ماند. تحقیقات و توسعه بیشتر در این زمینه می‌تواند به استفاده بهتر و گسترده‌تر از اعداد_Z در محاسبات با کلمات و پردازش زبان طبیعی کمک کند.

مقاله [۶۲]، در زمینه طراحی ذهن ماشین به منظور درک واقعی از جهان تلاش می‌کند. این مقاله براساس نظریه‌های شناختی مینسکی، فلسفه‌ی اعداد_Z و فرایندهای درک مغز انسان ساخته شده است. این مقاله ایده‌هایی را ارائه می‌دهد که همزیستی انسان و ماشین را تصور می‌کنند و هدف آن‌ها کمک به تولید یک ذهن مصنوعی است که توانایی تقلید از درک سفارشی جهان واقعی را داشته باشد. این ذهن ماشین تلاش می‌کند با تلفیق مفاهیمی از نظریه‌های شناختی، فلسفه‌ی اعداد_Z و فرایندهای درک مغز انسان، به یک درک واقعی از دنیا برسد. اهمیت این مقاله در این است که تلاش می‌کند بهبودی در درک ماشین از دنیای واقعی و تولید ذهن مصنوعی با توانایی درک سفارشی جهان را به ارمغان بیاورد. این موضوع می‌تواند به تحقّق هدف‌هایی مانند ادراک، احساس، فکر و برنامه‌ریزی ماشین و همچنین بهبود فرایندهای شناختی و عاطفی ناخودآگاه آن کمک کند.

۵.۴. تشخیص پزشکی و بررسی میزان خطر. سلامت انسان چنان مسئله‌ی مهمی است که تشخیص پزشکی بسیار شایسته‌ی مطالعه است. روش‌های مختلفی برای حل مشکلات تشخیص پزشکی معرفی شده است. با توجه به ویژگی‌های خاص پزشکی، مفهوم ابهام و عدم قطعیت بیشتر، اعداد فازی که توانایی مقابله با اطلاعات مبهم و دارای عدم اطمینان را دارند، می‌توانند روش فوق‌العاده ای برای مطالعه چنین مواردی ارائه دهند. در بیشتر مطالعات موجود، از اعداد فازی برای نشان‌دادن اطلاعات دارای عدم قطعیت مانند تشخیص پزشکی استفاده می‌شود. با این‌حال اعداد فازی قادر به توصیف مناسب قابلیت اطمینان اطلاعات نیستند. بر این اساس اعداد_Z که در آن محدودیت و قابلیت اطمینان اطلاعات در نظر گرفته می‌شوند، پیشنهاد شده است.

تأثیر فعالیت‌های بدنی به ویژه در ورزش پیلاتس بر انگیزه، اضطراب و پیشرفت تحصیلی دانش آموز موضوعی آشکار است. تمرینات پیلاتس تاثیر مفیدی بر سلامت جسمی و روحی انسان نشان داده است. در مقاله [۶۳]، یک رویکرد فازی مبتنی بر اعداد_Z برای مدل‌سازی تأثیر تمرینات پیلاتس بر انگیزه، توجه، اضطراب و پیشرفت تحصیلی ارائه شده است. این

مقاله از ابزارهای شناخته شده بین‌المللی برای اندازه‌گیری پارامترهای روانشناختی استفاده می‌کند. مقیاس انگیزش تحصیلی[۱] (AMS) ،آزمایش توجه[۲] (آزمایش $D2$) و آزمایش اضطراب اسپیلبرگر[۳] توسط دانش‌آموزان تکمیل شده است. همچنین، معدل دانش‌آموزان به عنوان معیاری برای سنجش پیشرفت تحصیلی استفاده شده است. استفاده از قانون اگر_آنگاه مبتنی بر اعداد_Z برای مدل‌سازی رابطه بین پارامترهای روانشناختی و قابلیت اطمینان جزئی آن‌ها استفاده شده است. استفاده از مدل‌سازی اطلاعات_Z این امکان را می‌دهد تا در صورت عدم اطمینان از داده‌های ورودی ایجاد شده از پرسش‌نامه‌های تکمیل شده، دقت و قابلیت اطمینان نتایج پردازش داده‌ها را افزایش دهند. همچنین، در این مقاله از روش استنتاج تقریبی بر اساس روش درون‌یابی مبتنی بر اعداد_Z استفاده شده است. این روش به منظور مقایسه‌ی قوانین ناقص و عدم تطبیق آنها استفاده می‌شود. در ضمن، مراحل اساسی مدل‌سازی مبتنی بر اعداد_Z با استفاده از راه‌حل‌های عددی نیز در این مقاله ارائه شده است.

در مرجع [۶۴]، با استفاده از روش مبتنی بر اعداد_Z به انتخاب روش درمان بهینه برای بیماری حاد پالپیت [۴] می‌پردازد. هدف اساسی این مطالعه ایجاد رویکردی برای تصمیم‌گیری تحت اطلاعات اعداد_Z در حوزه پزشکی است. در این مقاله، اثربخشی استفاده از روش‌های مختلف درمان در هر مرحله از بیماری توسط یک دندان پزشک ارزیابی می‌شود. همچنین، مراحل بیماری نیز توسط یک دندان پزشک به صورت زبانی توصیف می‌شود. این توصیفات زبانی توسط اطلاعات_Z نمایش داده می‌شوند. برای تعیین روش درمانی که مؤثرترین استفاده را دارد، اثربخشی کل هر روش درمانی با استفاده از اعداد_Z محاسبه می‌شود. سپس با استفاده از رتبه بندی اعداد گسسته_Z، روش درمانی که بیشترین موثریت را دارد، تعیین می‌شود. به طور خلاصه، این مقاله با استفاده از روش مبتنی بر اعداد_Z، به انتخاب روش درمانی بهینه برای بیماری حاد پالپیت می‌پردازد و با استفاده از معیارهای اعداد_Z، تصمیم‌گیری را در حوزه پزشکی تسهیل می‌کند.

چگونگی کنترل عدم قطعیت در تشخیص پزشکی یک مسئله‌ی باز است. مرجع [۶۵]، یک روش جدید تصمیم‌گیری مبتنی بر اعداد_Z ارائه می‌دهد. در این روش، نظرات خبرگان با استفاده از اعداد_Z نمایش داده می‌شوند به‌طوری که مولفه‌ی اول و دوم عدد_Z دو عدد فازی مستقل در نظر گرفته شده است. سپس، روش جدیدی برای رتبه بندی اعداد فازی پیشنهاد شده

[1] Academic Motivation Scale
[2] Test of attention
[3] Spielberger's anxiety test
[4] Pulpitis disease

است. بر اساس این روش تبدیل اعداد_Z به انتساب احتمال اولیه[1] (BPA) ارائه شده است. سپس قانون ترکیبی دمستر شفر[2] برای ترکیب (BPA) تولیدشده اعمال می‌شود و تصمیم نهایی گرفته می‌شود. استفاده از قانون ترکیبی دمستر_شافر به دلیل مزیت تلفیق اطلاعات منطقی، در تصمیم‌گیری نهایی مورد استفاده قرار می‌گیرد. سرانجام، دو آزمایش تجزیه و تحلیل خطر و تشخیص پزشکی برای ارزیابی کارایی روش پیشنهادی ارائه شده در مقاله انجام می‌شود. در کل، این مقاله یک روش جدید برای تصمیم‌گیری مبتنی بر اعداد_Z ارائه می‌دهد و با استفاده از ترکیب قانون ترکیبی دمستر_شافر، تصمیم‌گیری نهایی را انجام می‌دهد. همچنین، کارایی روش پیشنهادی در آزمایش‌های تجزیه و تحلیل خطر و تشخیص پزشکی مورد بررسی قرار می‌گیرد.

در هر مرحله از فرآیند مدیریت پروژه، خطرات مختلفی به دلیل وقوع حوادث نامشخص رخ می‌دهد و عدم‌اطمینان از اطلاعات پروژه به دلیل پیچیدگی ماهیت پروژه ایجاد می‌شود. خطرات مستقیماً بر اهداف، مدت زمان، هزینه و کیفیت پروژه تأثیر می‌گذارند و به دلیل این عوامل، مدیریت ریسک بخشی جدانشدنی از مدیریت پروژه است که بایستی خطرات شناسایی، ارزیابی و کنترل شوند. در این مرجع [۶۶]، رویکردهای مختلفی از جمله نظریه احتمال، تئوری امکان، رویکرد فازی و اعداد_Z را برای بهبود کیفیت ارزیابی ریسک در نظر می‌گیرد. این روش می‌تواند با استفاده از ترکیب اطلاعات اعداد_Z و رویکرد قوانین فازی مبتنی بر اعداد_Z، ارزیابی ریسک را بهبود بخشد. این رویکرد از رتبه‌بندی اعداد_Z استفاده می‌کند و امکان تجزیه و تحلیل موقعیت‌های ریسک چندگانه را فراهم می‌کند.

استفاده از اعداد_Z در رتبه‌بندی اولویت ریسک، مفهوم بسیار جدیدی است. تأثیر اعداد_Z در رتبه‌بندی معیارها و همچنین رتبه‌بندی گزینه‌ها قبلاً به طور کامل بررسی نشده است. از این‌رو، برای درک اساس رتبه‌بندی اعداد_Z نیاز به بینش بیشتری است. ترکیب فرآیند سلسله مراتبی تجزیه و تحلیل پوششی داده‌های فازی معمولاً در حل مشکلات تصمیم‌گیری چندمعیار برای پوشش عدم قطعیت و قضاوت‌های انسانی مورد استفاده قرار می‌گیرد. در مقاله [۶۷]، روشی جدید برای ترکیب فرآیند سلسله مراتبی تجزیه و تحلیل پوششی داده‌های فازی با استفاده از اعداد_Z معرفی شده است. این روش برای حل مشکلات تصمیم‌گیری چندمعیار با توجه به عدم قطعیت و قضاوت‌های انسانی استفاده می‌شود. دو عمل مختلف رابطه‌ی ضرب برای تبدیل اعداد_Z به اعداد فازی با تبدیل مؤلفه‌ی قابلیت اطمینان به مؤلفه‌ی محدودیت با کمک

[1] Basic Probability Assignment
[2] Dempster-Shafer

روش کنگ [۱۱، ۳۱] استفاده شده است. با این حال، باید توجه داشت که با این تبدیل، بخشی از اطلاعات موجود در عدد_Z از دست می‌رود. مرحله‌ی بعد ادغام وزن معیارها در فرآیند تحلیل پوششی داده‌ی اعداد _Z است. برای نشان دادن کارایی روش پیشنهادی، از روش سلسله مراتبی تجزیه و تحلیل پوششی داده‌های فازی (AHP-DEA) [۱] برای ارزیابی ریسک استفاده شده است. این مقاله نشان می‌دهد که استفاده از اعداد_Z در رتبه‌بندی و ارزیابی ریسک، یک مفهوم جدید است و بهبودی در ارزیابی تصمیم‌ها و اولویت‌بندی حالت‌های شکست ارائه می‌دهد.

در مرجع [۶۸]، روش جدیدی برای تجزیه و تحلیل وجه شکست و تحلیل عوامل (FMEA) [۲] بر اساس اعداد_Z معرفی کرده است. این روش برای ارزیابی صحیح سطح خطر استفاده می‌شود و اعداد_Z برای ارزیابی فاکتورهای ریسک به کار می‌روند. ارزیابی اعداد _Z با استفاده از یک روش میانگین وزنی فازی با عوامل خطر ادغام می‌شود. در این روش، یک عدد اولویت ریسک به نام ZRPN [۳] برای اولویت‌بندی حالت‌های شکست بر اساس روش اصلاح شده‌ی رتبه‌بندی اعداد فازی محاسبه می‌شود. این روش دارای مزایایی نسبت به روش‌های موجود است. به طور خاص، قابلیت در نظر گرفتن قابلیت اطمینان مربوط به جزء دوم اعداد_Z، غلبه بر مشکل ساخت تعداد زیادی از توابع عضویت و قوانین موجود و همچنین پیچیدگی محاسباتی کمتری را داراست. مطالعه‌ی موردی در این مقاله از داده‌های پره‌های روتور یک توربین هواپیما برای تأیید روش پیشنهادی استفاده کرده است. این مقاله نشان می‌دهد که روش پیشنهادی توانایی بهبود ارزیابی وجه شکست و اولویت‌بندی حالت‌های شکست ارا دارد.

برای پروژه‌های انتقال برق منطقه‌ای، سازوکار قیمت‌گذاری انتقال دو بخشی پیشنهاد می‌شود تا توسعه پایدار تجارت برق منطقه‌ای را ارتقاء ببخشد. در سازوکار قیمت‌گذاری انتقال دو بخشی، تعیین مناسب نسبت ظرفیت زیر بار گذاشتن[۴] (CCR) مسئله‌ی مهمی است که به خوبی حل نشده است. در مرجع [۶۹]، یک مدل مذاکره با حداقل ریسک برای شرکت انتقال و خریدار برق مبتنی بر اعداد_Z برای دست‌یابی به نسبت ظرفیت زیر بار گذاشتن قابل قبول (CCR) تحت اطلاعات ناقص توسعه‌یافته است. آنها برای تخمین توزیع عدم قطعیت مقدار انتقال برق در آینده، یک ارزیابی چندگانه‌ی اعداد _Z را ارائه داده‌اند. سپس، سود و

[1] Analytic Hierarchy Process-Fuzzy Data Envelopment Analysis
[2] Failure Mode and Effects Analysis
[3] Z Risk Priority Number
[4] Capacity Charging Ratio

زیان ریسک اندازه‌گیری شده توسط یک مقدار متعارف قراردادی در معرض ریسک[1] (CVaR) برای دو طرف شرکت‌کننده مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته است برای نشان دادن خصوصیات اساسی مدل توسعه‌یافته از داده‌های مطالعه‌ی موردی استفاده شده است. در نهایت، پروژه‌ی انتقال نیروی ۵۰۰ کیلوولت در منطقه جنوب چین برای نشان دادن ویژگی‌های اساسی مدل توسعه‌یافته استفاده شده و اثرات برخی پارامترهای مهم نتایج مذاکره برای تصمیم‌گیری مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌گیرد.

۶.۴. کنترل. در صنعت، برخی از سیستم‌های دینامیکی در محیط‌هایی با عدم قطعیت عمل می‌کنند و اطلاعات غیردقیقی را مورد استفاده قرار می‌دهند. مدل‌های قطعی معمولاً نمی‌توانند به‌طور کامل این فرایندها را توصیف کنند، بنابراین استفاده از سیستم‌های فازی به منظور مدل‌سازی و کنترل این سیستم‌ها روشی مؤثر است. زیرا که اصول سیستم‌های فازی بر اساس استفاده از دانش فرد خبره یا تجربه‌ی متخصص می‌باشد. منطق فازی امکان مدیریت دانش غیردقیق و همراه با عدم قطعیت را فراهم می‌آورد. طراحی قوانین و قابلیت اعتماد به مقادیر متغیرهای زبانی در این قوانین، یک چالش مهم در مدل‌سازی سیستم‌ها است. با در نظرگرفتن درجه‌ای از اطمینان برای مقادیر فازی استفاده شده در قوانین اگر–آنگاه فازی، طراحی ماژول تصمیم‌گیری اهمیت پیدا می‌کند که شرح این سازوکار تصمیم‌گیری بسیار سخت و شبیه‌سازی آن دشوار است، بدین منظور زاده اعداد–Z راپیشنهاد داد تا با درجه‌ای از اطمینان از اطلاعات دارای عدم قطعیت استفاده شود.

عدم قطعیت در سیستم‌های واقعی اجتناب ناپذیر است. در کنترل سیستم‌های دارای عدم قطعیت، دو روش مستقیم و غیرمستقیم مورد استفاده قرار می‌گیرند. در روش کنترل مستقیم، از سیستم نامعین به عنوان یک مکانیزم کنترل استفاده می‌شود. به عبارت دیگر، سعی شده با استفاده‌ی مستقیم از خروجی سیستم نامعین، کنترل مورد نیاز برای مقابله با عدم قطعیت اعمال شود. این روش معمولاً در مواردی استفاده می‌شود که کنترل نیاز بع دقت بالایی نداشته باشد و در صورت وجود عدم قطعیت کوچک، می‌توان از روش‌های ساده و مستقیم برای کنترل استفاده کرد. همچنین در روش کنترل غیرمستقیم، از مدل نامعین برای تقریب سیستم غیرخطی استفاده می‌شود. ابتدا با استفاده از مدل نامعین، تقریبی از رفتار سیستم به دست می‌آید. سپس بر اساس این مدل نامعین، کنترلری طراحی می‌شود تا بهبود و کاهش عدم قطعیت در سیستم حاصل

[1] Conventional Value at Risk

شود. روش‌های غیرمستقیم معمولاً برای کنترل سیستم‌های دارای عدم قطعیت یا غیرخطی استفاده می‌شوند. بیشتر مقالات این زیربخش براساس تکنیک غیرمستقیم می‌باشند.

غالباً در مدل‌سازی سیستم‌های فازی، قابلیت اطمینان مقادیر زبانی متغیرها در قوانین از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. با درنظر گرفتن درجه‌ی اطمینان مقادیر فازی متغیرهای این قوانین، طراحی مکانیسم استنتاج اهمیت پیدا می‌کند. به این منظور، قوانین فازی مبتنی بر اعداد_Z که شامل درجه‌ی محدودیت و قابلیت اطمینان اطلاعات هستند، ساخته می‌شوند. برای قوانین پراکنده، درون‌یابی قوانین فازی برای طراحی موتور استنتاج سیستم مبتنی بر قوانین فازی ارائه شده است.

روش استنتاج منطق فازی مشابه قابلیت استدلال انسان است. روش‌های مختلف استدلال فازی برای پردازش اطلاعات نامشخص و افزایش عملکرد سیستم‌های طراحی شده ارائه شده است. این روش‌های استدلال فازی عمدتاً مبتنی بر قانون استنتاج ترکیبی، مقایسه، درون‌یابی شباهت[1] و مفهوم فاصله است. روش استنتاج پیشنهادی مبتنی بر اندازه‌گیری فاصله است. بدین منظور در مرجع [۷۰]، یک کنترلر فازی مبتنی بر اعداد_Z برای کنترل سیستم پویا طراحی شده است. در این مقاله، کنترلر فازی طراحی شده با یک کنترلر فازی معمولی در عملکرد پاسخ گذرا مقایسه می‌شود. نتایج مقایسه نشان می‌دهند که سیستم طراحی‌شده با استفاده از کنترلر فازی مبتنی بر اعداد_Z دارای عملکرد مناسبی در کنترل سیستم پویا است. این مقاله نشان می‌دهد که استفاده از اعداد_Z در طراحی کنترلر فازی، می‌تواند بهبود قابل توجهی در عملکرد کنترل سیستم پویا ایجاد کند. به طور خلاصه، مقاله‌ی مذکور ارزیابی مقایسه‌ای بین کنترلر فازی مبتنی بر اعداد_Z و کنترلر فازی معمولی ارائه می‌دهد و نشان می‌دهد که کنترلر فازی مبتنی بر اعداد_Z عملکرد بهتری در کنترل سیستم پویا دارد.

در مرجع [۷۱]، مدل‌سازی یک سیستم غیرخطی نامعین با استفاده از معادلات فازی و اعداد_Z انجام می‌شود. در این مقاله، ضرایب معادلات فازی با استفاده از اعداد_Z مشخص شده و رابطه‌ی بین حل معادلات فازی و کنترلر تعریف می‌شود. برای برآورد راه‌حل معادلات فازی، از شبکه‌های عصبی پیشخور[2] و پسخور[3] استفاده می‌شود. در این مقاله، یک نمونه معیار برای اعتبارسنجی تکنیک‌های پیشنهادی استفاده شده است. همچنین در مقاله‌ی دیگری [۷۲]، نویسندگان یک معادله‌ی فازی کلاسیک را اصلاح کرده‌اند که ضرایب آن اعداد_Z است و نوع دوگانه‌ی معادله‌ی فازی برای حل یک سیستم غیرخطی نامعین اعمال شده است. رابطه‌ی

[1] Similarity interpolation
[2] Feed forward neural network
[3] Feedback neural network

بین حل معادلات فازی و کنترل سیستم غیرخطی و قابلیت کنترل سیستم فازی پیشنهاد شده است. راه‌حل‌های معادلات فازی با استفاده از شبکه‌های عصبی پیشخور و پسخور تقریب‌زده می‌شوند. با این‌حال، این اثر مشابه مقاله‌ی قبل است و تنها تفاوت در استفاده از یک معادله‌ی فازی نوع دو است. مطالعه عمدتاً به صورت نظری می‌باشد.

کنترل ربات‌های متحرک در یک محیط نامشخص با موانع دینامیکی زیاد مسئله‌ی مهمی در رباتیک است. نظریه‌ی مجموعه‌های فازی یکی از مهم‌ترین ابزارها برای توصیف عدم اطمینان و طراحی سیستم کنترل ربات موبایل است. در مرجع [۷۳]، یک سیستم استنتاج فازی بر مبنای اعداد_Z برای کنترل ربات فوتبال همه جهته پیشنهاد شده است. در مرحله اول، مدل حرکتی ربات فوتبال چهار چرخ متحرک همه جهته مدل‌سازی شده است. سپس، سیستم کنترل برای کنترل سرعت خطی و زاویه‌ای طراحی شده و از قوانین فازی مبتنی بر اعداد_Z و استدلال سیستم استنتاج فازی بر مبنای اعداد_Z استفاده شده است. این روش برای کنترل ربات همه جهته استفاده می‌شود. الگوریتم کنترل پیشنهادی با شبیه‌سازی آزمایش شده است. انحراف بین سیگنال خروجی سیستم فعلی و سیگنال مرجع را به حداقل رسانده و نتایج مطلوبی در زمان اجرا ارائه داده است. همچنین، یک تجزیه و تحلیل مقایسه‌ای بین کنترل‌کننده‌های مختلف انجام شده است تا کارایی کنترلر فازی بر مبنای اعداد_Z در کنترل ربات موبایل نشان داده شود. نتایج شبیه‌سازی و آزمایش‌ها، عملکرد خوبی را با توجه به ردیابی توسط کنترل‌کننده‌ی فازی مبتنی بر اعداد_Z نشان می‌دهند.

در مقاله [۷۴] شبکه عصبی فازی مبتنی برعدد_Z (ZFNN)[1] برای کنترل سیستم پویا پیشنهاد شده است. ساختار و طراحی الگوریتم‌های ZFNN با استفاده از مکانیسم استنباط درون‌یابی ارائه شده است. برای تنظیم پارامترهای شبکه عصبی، از الگوریتم گرادیان نزولی استفاده می‌شود. ساختار پیشنهادی برای کنترل یک سیستم پویا در آزمایش‌ها مورد ارزیابی قرار گرفته و عملکرد کنترلر مبتنی بر ZFNN با عملکرد کنترلرهای دیگر مقایسه شده است. نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهند که استفاده از سیستم طراحی شده به نسبت روش‌های دیگر برای کنترل سیستم‌های دینامیکی، بهبود قابل توجهی در کارایی کنترل ارائه می‌دهد.

در صنعت سیستم‌های پویا در محیط‌های دارای عدم قطعیت کار می‌کنند و با عدم قطعیت‌هایی که مربوط به ساختار و پارامترهای آن‌ها است مشخص می‌شوند، به همین منظور مدل‌های قطعی به خوبی نمی‌توانند این سیستم‌ها را توصیف کنند و از طرفی با این مدل‌های دارای عدم قطعیت دست‌یابی به کارایی کنترل مورد نیاز دشوار است. استفاده از تئوری‌های

[1] Z-number Based Fuzzy Neural Network

مجموعه‌های فازی برای ساخت سیستم‌های کنترل تا حدی این عدم قطعیت را جبران می‌کند. در مرجع [۷۵]، استفاده از درون‌یابی قوانین برای تعداد کم قوانین پیشنهاد شده است. این روش می‌تواند برای تقریب فرایند استنتاج سیستم فازی مبتنی بر اعداد_Z استفاده شود. در مرجع [۷۰] نیز، استنتاج مبتنی بر درون‌یابی قوانین برای فرایند استنتاج سیستم فازی مبتنی بر اعداد_Z مورد استفاده قرار گرفته است. این روش‌ها و استفاده از تئوری مجموعه‌های فازی مبتنی بر اعداد_Z، امکان توصیف و کنترل سیستم‌های پویا با عدم قطعیت را بهبود می‌بخشد و به نوعی جبران کننده‌ی نقاط ضعف مدل‌های قطعی در این زمینه است.

سیستم تعلیق یا فنربندی [1] قسمتی از خودرو است که باعث می‌شود نوسانات حاصل از حرکت خودرو بر روی سطوح ناهموار به جِرم معلق شامل اتاق، شاسی، متعلقات و سرنشینان وارد نشود. در مرجع [۷۶]، روشی برای کنترل سیستم تعلیق فنر خودرو با استفاده از سیستم استنتاج فازی مبتنی بر اعداد_Z پیشنهاد شده است. این روش کنترل فشار فنر بادی محصور شده را به عهده دارد و بهبود عملکرد سیستم تعلیق فنر بادی در فرکانس‌های نزدیک به فرکانس طبیعی سیستم را به هدف دارد. با استفاده از سیستم استنتاج فازی مبتنی بر اعداد_Z، امکان تعیین کنترل‌های مناسب برای فشار فنر بادی در نقاط مختلف زمانی و شرایط عملیاتی فراهم می‌شود. این روش مبتنی بر تئوری مجموعه‌های فازی با استفاده از اعداد_Z، با قابلیت مدل‌سازی عدم قطعیت‌ها و ابهام‌ها، قادر به بهبود کارایی سیستم تعلیق فنر خودرو . به کمک این روش، می‌توان فشار فنر بادی را در هر لحظه بر اساس شرایط محیطی، نوسانات سیستم و سایر پارامترهای ورودی تعیین کرده و با تنظیم مناسب آن، عملکرد سیستم تعلیق را بهبود داد. این روش می‌تواند منجر به کاهش نوسانات و ارتعاشات ناشی از حرکت خودرو برروی سطوح ناهموار شود و راحتی سفر را برای سرنشینان بهبود دهد.

متغیرهای ورودی و خروجی سیستم‌هایی بر پایه‌ی قوانین فازی اساساً با مقادیر زبانی توصیف می‌شوند [۷۷]. قابلیت اطمینان این مقادیر فازی برای طراحی دقیق قوانین و به طبع آن مدل‌سازی سیستم‌های کنترل دارای اهمیت به‌سزایی هستند. از اعداد_Z برای هر متغیر فازی در قوانین فازی استفاده می‌شود. با استفاده از این اطلاعات، اعداد_Z دانش ناقص در قوانین را پوشش می‌دهند. طراحی قوانین فازی گام بسیار مهمی در طراحی سیستم فازی است. یکی از رویکردهای مؤثر در طراحی سیستم فازی، استفاده از شبکه‌های عصبی مصنوعی است. در مرجع [۷۴]، شبکه عصبی فازی مبتنی بر عدد_Z [2] (ZFNN)با استفاده از استدلال

[1] Suspension system
[2] Fuzzy Neural Network based Z-number

درون‌یابی [1] برای کنترل سیستم پویا پیشنهاد شده است. این روش شامل طراحی قوانین فازی بر پایه‌ی سیستم ممدانی است که با استفاده از قابلیت آموزش شبکه‌های عصبی، قوانین فازی را در ساختار شبکه توسعه می‌دهد. الگوریتم گرادیان نزولی برای تنظیم پارامترهای شبکه عصبی فازی استفاده می‌شود. قوانین بر پایه‌ی اعداد_Z و مکانیسم استنباط برای یک سیستم چند ورودی و یک خروجی در نظر گرفته شده است. با استفاده از اندازه‌گیری فاصله، استدلال درون‌یابی در [۷۵، ۷۸] ارائه شده و برای طراحی ZFNN استفاده شده است. ساختار پیشنهادی برای کنترل سیستم پویا آزمایش شده و عملکرد کنترلر مبتنی بر ZFNN با کنترلرهای دیگر مقایسه شده است. نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهد که استفاده از سیستم طراحی شده برای کنترل سیستم‌های دینامیکی بهبود کارایی را به ارمغان می‌آورد.

سیستم‌ها و مجموعه‌های فازی قادرند تا حد خوبی با عدم قطعیت‌ها در سیستم‌های غیرخطی مقابله کنند. مدل‌های فازی ابزاری قدرتمند برای مدل‌سازی سیستم‌های غیرخطی همراه با عدم قطعیت هستند. روش‌های مختلفی برای مدل‌سازی سیستم‌های غیرخطی با عدم قطعیت وجود دارد. برخی از این روش‌ها شامل تقریب سیستم غیرخطی به چندین سیستم خطی تکه‌ای (روش تاکاگی_سوگنو) و استفاده از مدل‌های ممدانی با استفاده از قوانین فازی می‌باشند که عملکرد خوبی در جهت مقابله با عدم قطعیت از خود نشان داده‌اند. اما اخیراً با استفاده از اعداد فازی، مدیریت عدم قطعیت‌ها بهبود یافته است. در مورد حل معادلات فازی نیز روش‌های مختلفی وجود دارد. برخی از روش‌های حل معادلات فازی شامل استفاده از پارامترهای عددی برای نمایش اعداد فازی و جایگزین کردن معادلات فازی اصلی با سیستم‌های خطی قطعی می‌باشند. همچنین، روش‌های نقطه ثابت و نیوتون و سایر روش‌ها نیز برای حل معادلات فازی استفاده می‌شوند.

راه‌حل‌های تحلیلی برای معادلات فازی معمولاً پیچیده هستند و اغلب به تکنیک‌های پیچیده‌تری نیاز دارند. از طرف دیگر، شبکه‌های عصبی و منطق فازی به عنوان تخمین‌گرهای عمومی می‌توانند مورد استفاده قرار گیرند و توانایی تقریب دقیق توابع غیرخطی را داشته باشند. استفاده از اعداد فازی برای اعتبارسنجی دانش و افزایش قابلیت اطمینان در تصمیم‌گیری بسیار مفید است. اعداد فازی، به عنوان نماینده‌ای از عدم قطعیت و اطمینان، امکان مدل‌سازی دانش ناقص را فراهم می‌کنند. این اعداد می‌توانند برای توصیف قابلیت اطمینان و قابلیت اعتماد در دانش و اطلاعات مورد استفاده قرار گیرند. با استفاده از اعداد فازی، می‌توانیم مفاهیم فازی مانند "بالا"، "کم"، "متوسط" و غیره را به صورت دقیق و قابل اندازه‌گیری مدل کنیم. این

[1] Interpolative reasoning

اعداد می‌توانند به ما کمک کنند تا میزان قابلیت اعتماد و اعتبار را در تصمیم‌گیری‌هایمان در نظر بگیریم. بنابراین، استفاده از اعداد فازی و قابلیت اطمینانی که آن‌ها فراهم می‌کنند، به ما امکان می‌دهد تا در تصمیم‌گیری‌ها از دانش قابل اعتماد و اعتبارسنجی شده استفاده کنیم و نتیجه‌گیری‌های بهتری به دست آوریم.

در مقاله [۷۲]، به مدل‌سازی سیستم‌های غیرخطی با پارامترهای دارای عدم قطعیت با استفاده از معادله‌ی فازی اصلاح شده با ضرایب اعداد_Z می‌پردازد. این مقاله نشان می‌دهد که رابطه‌ای بین معادله‌ی فازی و کنترل سیستم غیرخطی وجود دارد و مدل فازی اصلاح شده این امکان را فراهم می‌کند تا سیستم را به صورت فازی کنترل کنیم. برای پیاده‌سازی اعداد_Z از تبدیل اعداد_Z به مجموعه‌های فازی معمولی استفاده شده است [۱۱]، اعداد_Z پیچیدگی کمتری در مقایسه با سایر روش‌های مدل‌سازی سیستم‌های غیرخطی دارند. در این مسئله معادلات فازی دوگانه برای مدل‌سازی سیستم غیرخطی همراه با عدم قطعیت استفاده شده است. اعداد_Z در دو طرف معادله حضور دارند ولی قادر به جابه‌جایی بین دو طرف معادله نیستند، درنتیجه معادلات فازی دوگانه را می‌توان پیچیده‌تر دانست. دو نوع شبکه عصبی پیشخور و پسخور برای تقریب معادلات فازی با ضرایب عدد_Z و برای آموزش شبکه عصبی الگوریتم گرادیان نزولی[1] پیشنهاد شده است. این روش پیشنهادی توسط چندین نمونه معیار تأیید شده است.

در مرجع [۷۱]، با استفاده از معادلات فازی که ضرایب آن با اعداد_ Z مشخص شده است، مدل‌سازی یک سیستم غیرخطی نامعین را آغاز کرده‌اند و رابطه بین حل معادلات فازی و کنترلر را تعریف کرده‌اند. برای اعتبارسنجی تکنیک‌های پیشنهادی از یک نمونه معیار استفاده کرده است. راه‌حل‌های معادلات فازی با استفاده از شبکه‌های عصبی پیشخور و پسخور تقریب زده می‌شوند. با این‌حال، این اثر مشابه مقاله قبل است، تنها تفاوت در استفاده از یک معادله فازی معمولی است.

۷.۴. تحلیل رگرسیون. تحلیل رگرسیون روشی قدرتمند و قابل اعتماد برای تعیین تاثیر یک یا چند متغیر مستقل بر یک متغیر وابسته است. این روش بیشترین استفاده را در بین تمام روش‌های آماری دارد و کاربرد وسیعی برای مسائل عملی متعدد دارد. در تحلیل رگرسیون کلاسیک، هر دو متغیر وابسته و مستقل اعداد واقعی هستند. با این‌حال در بسیاری از شرایط دنیای واقعی اتخاذ یک دید کلی‌تر در مواردی که متغیرهای رگرسیون به صورت متغیرهای

[1] Gradient descent algorithm

زبانی ارائه می‌شوند مورد نیاز است [۷۹]. از این جهت محققان مختلفی پس از معرفی مفهوم مجموعه‌های فازی توسط زاده در سال ۱۹۶۵ تحلیل رگرسیون فازی را توسعه داده‌اند [۸۰]. تحلیل رگرسیون فازی یک توسعه از تحلیل رگرسیون کلاسیک است که برای مدل‌سازی روابط بین متغیرهای وابسته و مستقل با استفاده از اطلاعات مبهم به کار می‌رود. در رگرسیون فازی، برخی از عناصر مدل رگرسیون با استفاده از مفاهیم و اصول سیستم‌های فازی و با درجه‌ای از قابلیت اطمینان مشخص می‌شوند. در مرجع [۸۱]، رگرسیون خطی فازی[1] پیشنهاد شد. توسعه‌ی آنالیز رگرسیون کلاسیک به ابزاری قدرتمند برای کشف روابط مبهم تبدیل شده است. در واقع در رگرسیون فازی، برخی از عناصر مدل رگرسیون با اطلاعات مبهم ارائه می‌شوند. روش‌های مختلفی برای حل این نوع مسائل ارائه شده‌اند. که از جمله‌ی این روش‌ها استفاده از روش حداقل مربعات برای مدل‌های رگرسیون فازی است [۸۲]. تحلیل رگرسیون اعداد_Z، توسعه‌ای از تحلیل رگرسیون فازی است که برخی از عناصر موجود در این مدل با اطلاعات مبهم و دارای یک درجه قابلیت اطمینان می‌باشند.

تجزیه و تحلیل رگرسیون به طور گسترده‌ای برای مدل‌سازی فرآیندهای دنیای واقعی در زمینه‌های مختلف استفاده می‌شود. از آنجایی که اطلاعات مربوط به فرآیندهای دنیای واقعی با عدم دقت و قابلیت اطمینان جزئی شامل عدم قطعیت‌های امکانی و احتمالی مشخص می‌شوند. برای پوشش عدم قطعیت‌های موجود می‌توان از مفهوم اعداد_Z بهره برد. در مرجع [۸۳]، یک تحلیل رگرسیون چندگانه با ارزش اعداد_Z که یک گسترش از تحلیل رگرسیون فازی محسوب می‌شود ارائه شده است. این مقاله به بررسی کاربرد این روش در یک مسئله‌ی تصمیم‌گیری در دنیای واقعی می‌پردازد و نتایج به‌دست آمده نشان می‌دهد که روش پیشنهادی مؤثر است. با استفاده از روش پهنای باند[2] چهار عملیات ضرب، تقسیم، جمع و تفریق برای اعداد_Z محاسبه می‌شوند. مدل رگرسیون ارائه شده دارای تعداد زیادی اعداد_Z است. این روش پهنای باند به منظور کاهش پیچیدگی محاسباتی در مدل رگرسیون استفاده می‌شود. همچنین این مدل رگرسیون یک حالت کلی را در زمانی که همه‌ی متغیرها و ضرایب مدل رگرسیون عدد_Z باشند، توصیف می‌کند. در چنین شرایطی استفاده از تکنیک‌های کلاسیک به عنوان مثال روش‌های مبتنی بر گرادیان، برای ساخت مدل رگرسیون به دلیل پیچیدگی نمایش مشتق یک تابع ارزش_Z مناسب نیست. به این خاطر از یک روش مبتنی بر بهینه‌سازی تکاملی تفاضلی[3] استفاده شده است. در مثالی که در مقاله ذکر شده، ارزیابی بندرهای دریایی با استفاده از

[1] Fuzzy linear regression (FLR)
[2] Bandwidth method
[3] The Differential Evolution (DE)

چندین معیار عملکرد (مسئله‌ی تصمیم‌گیری چندمعیاره) مورد بررسی قرار می‌گیرد. نتایج به دست آمده نشان می‌دهد که روش پیشنهادی در این مسئله عملکرد مطلوبی دارد و اعتبار آن را تأیید می‌کند.

در مرجع [۸۴]، یک مدل ریاضی از رگرسیون خطی با ضرایب عدد_Z و یک شبکه عصبی مبتنی بر عدد_Z معرفی شده است. سپس ضرایب رگرسیون خطی مبتنی بر عدد_Z با استفاده از شبکه عصبی مصنوعی، روش بهینه‌سازی و حداقل خطای مربع بر اساس فاصله‌ی بین دو عدد فازی محاسبه شده است. در اینجا خطا نیز به صورت عدد_Z بیان شده است. شبکه عصبی مصنوعی پیشخور از دو لایه تشکیل شده است، لایه اول شامل ورودی‌ها و لایه‌ی دوم با تابع انتقال خطی خروجی‌ها را تشکیل می‌دهد. از این شبکه می‌توان برای پیش‌بینی، شناسایی و طبقه‌بندی الگو استفاده کرد. در طراحی شبکه عصبی، تعداد ورودی‌ها از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است، برای به دست آوردن تعداد گره‌های ورودی در اینجا از روش آزمون و خطا استفاده شده است، تعداد گره‌های ورودی دقیقاً برابر با تعداد مجهولات مسئله است، یعنی ضرایب رگرسیون برابر با تعداد گره‌ها است و تعداد ضرایب رگرسیون و تعداد گره‌ها بسته به نوع مسئله متفاوت می‌باشند. شبکه عصبی مبتنی بر اعداد_Z از دو شبکه عصبی فازی تشکیل شده که هر کدام از آن‌ها مربوط به مؤلفه‌ی اول و دوم اعداد_Z می‌باشند. ورودی‌های شبکه عصبی مشترک، اما خروجی‌های آن متمایز هستند. خروجی شبکه عصبی فازی اول با توجه به متغیر بخش اول اعداد_Z و خروجی شبکه عصبی فازی دوم براساس متغیر بخش دوم آن است. از این‌رو، شبکه عصبی ZNN از دو تابع هدف مستقل تشکیل شده است. که در آن دو تابع مجموع مربعات خطا از یکدیگر مستقل هستند. از این شبکه می‌توان برای پیش‌بینی، شناسایی و طبقه‌بندی الگو استفاده کرد.

مقاله [۸۵]، یک مدل رگرسیون مبتنی بر اعداد_Z برای توصیف وابستگی پیشرفت تحصیلی به انگیزه، توجه و اضطراب پیشنهاد می‌دهد. داده‌های مشاهده شده در این مطالعه به صورت فازی و با قابلیت اطمینان جزئی توصیف می‌شوند و به عنوان اعداد_Z مدل‌سازی می‌شوند. به منظور جلوگیری از از دست دادن اطلاعات، نویسندگان از محاسبه‌ی مستقیم با اعداد_Z گسسته استفاده کرده‌اند. سرانجام معیار تشابه جاکارد برای اثبات صحت و اعتبار روش پیشنهادی استفاده می‌شود. با این وجود، مدل پیشنهادی رگرسیون با ارزش اعداد_Z فقط درمورد مسئله‌ی ارائه شده در مطالعات قابل استفاده است و همچنان نیاز به ساخت یک مدل رگرسیون کلی با ارزش_Z وجود دارد. به عبارت دیگر، مدل پیشنهاد شده در این مقاله منحصر به فرد است و نیاز به تعمیم‌پذیری به سایر مسائل رگرسیون با اعداد_Z دارد.

دریاکناری و همکاران [۸۶]، دو مدل جدید به منظور پیش‌بینی قیمت آتی سکه بهار آزادی ارائه می‌دهند. این الگوها بر اساس مدل رگرسیون خطی در یک محیط مبهم و مبتنی بر اعداد_Z ایجاد می‌شود. به این منظور، تخمین رگرسیون توسط شبکه عصبی با ضرایب مبتنی بر اعداد_Z و روش بهینه‌سازی بر اساس فاصله استفاده شده است. نتایج حاکی از آن است که روش پیشنهادی دقت بالاتر و هزینه‌ی محاسباتی کمتری دارد.

جدول ۱، به مقایسه‌ی مقالات کاربردی در حوزه‌ی کنترل و تحلیل رگرسیون می‌پردازد. جدول ۲ به طور خلاصه به دسته‌بندی پژوهش‌های بررسی شده در این مقاله پرداخته است. این جدول به دو قسمت کلی کاربردها و مباحث نظری تقسیم شده است. در قسمت کاربردها به شش حوزه‌ی کنترل، رگرسیون، تصمیم‌گیری، تشخیص پزشکی و بررسی میزان خطر، یادگیری ماشین و محاسبات با کلمات به همراه مقالات برجسته‌ی آن‌ها پرداخته می‌شود. مقالات مباحث نظری هم به دو حوزه‌ی محاسبات اعداد_Z و اجزای اعداد_Z تقیسم می‌شوند. در قسمت محاسبات، بخشی از مقالات به محاسبات مستقیم با استفاده از اعداد_Z و بخشی دیگر به محاسبات با استفاده از تبدیل اعداد_Z به اعداد فازی کلاسیک می‌پردازند. در ادامه نیز نمودار زمانی ۳، مربوط به زمان‌بندی مقالات مطرح از نقطه نظر تعداد ارجاع و جدید بودن آورده شده است.

نتیجه‌گیری. در این مقاله‌ی مروری، در ابتدا به بررسی اعداد_Z و مبانی ریاضی آن می‌پردازیم و سپس بر روی کاربردهای مهم آن در حوزه‌های مختلف تمرکز می‌کنیم. این مقاله به برخی از چالش‌های محاسبه و کاربرد اعداد_Z و همچنین جهت‌گیری آینده اشاره می‌کند. در واقع اعداد_Z یک منطق نوظهور است که چارچوب جدید و واقع‌گرایانه‌ای برای کمک به تکمیل پایه‌ی منطق فازی در جهت کاهش عدم قطعیت ارائه می‌دهد. البته نمی‌توان گفت که اعداد_Z کاملاً ایده‌آل هستند و می‌توانند عدم قطعیت را به طور کامل مدل کنند ولی توانایی بهتری در این زمینه از خود نشان می‌دهند. دو مشکل عمده در مورد محاسبه‌ی اعداد_ Z وجود دارد که نیاز به مطالعات بیشتر دارد. مورد اول روش تبدیل اعداد_Z به اعداد فازی است که توسط کنگ پیشنهاد شده است. این روش نوید سادگی محاسباتی را می‌دهد اما ممکن است منجر به از دست رفتن اطلاعات شود. مورد دوم محاسبه‌ی مستقیم اعداد_Z بدون تبدیل به اعداد فازی است. این رویکرد دارای پیچیدگی محاسباتی بالا و افزایش آنتروپی است. بنابراین، برای محاسبه‌ی اعداد_Z نیاز به یک رویکرد کلی، ساده و همچنین محاسبات کارآمدتر داریم تا بتوانیم بر محدودیت‌های روش‌های موجود غلبه کنیم. اگرچه در دهه‌ی اخیر

جدول ۱: جدول مقایسه‌ی مقالات حوزه‌ی کنترل و رگرسیون

ارجاع	مقاله	فازی/ شبکه عصبی فازی/ معادله خطی	خبره/ یادگیری/ بهینه سازی	برخط/ غیربرخط	کنترل/ پیش‌بینی/ مدلسازی	MIMO /MISO /SISO	Couple /merge
[۷۰]	سیستم استنتاج فازی مبتنی بر اعداد_Z برای کنترل سیستم پویا	فازی	خبره	غیر برخط	کنترل	MISO	merge
[۷۳]	کنترل ربات چندسویه با استفاده از سیستم فازی مبتنی بر عدد_Z	فازی	خبره	غیر برخط	کنترل	MISO	merg
[۷۶]	کنترل سیستم تعلیق فنر خودرو با استفاده از اعداد_Z بر مبنای سیستم فازی	فازی	خبره	غیر برخط	کنترل	MISO	merge
[۷۴]	سیستم کنترل پویا با استفاده ازشبکه عصبی فازی مبتنی بر اعداد_Z	شبکه عصبی فازی	یادگیری	غیر برخط	کنترل	MISO	merge
[۷۱]	معادلات فازی و اعداد_Z برای کنترل سیستم‌های غیرخطی	معادلات خطی	یادگیری	غیر برخط	مدل‌سازی	MISO	merge
[۷۲]	جواب عددی معادلات فازی مبتنی بر اعداد_Z با استفاده از شبکه عصبی	معادلات خطی	یادگیری	غیر برخط	مدل‌سازی	MISO	merge
[۸۳]	مدل‌سازی رگرسیون خطی مبتنی بر اعداد_Zو کاربردش	معادلات خطی	خبره	غیربرخط	مدل‌سازی	MISO	couple
[۸۴]	جواب عددی رگرسیون خطی مبتنی بر اعداد_Z توسط شبکه عصبی توسعه یافته	معادلات خطی	بهینه‌سازی	غیربرخط	مدل‌سازی	MISO	couple

تلاش‌های زیادی در جهت توسعه‌ی نظری اعداد_Z انجام شده اما هنوز کارهای اساسی در زمینه‌ی تحقق عملی این حوزه باقی مانده است. به عبارت دیگر، ارتباط میان علم نظری و کاربردهای عملی اعداد_Z هنوز در مراحل اولیه قرار دارد. به دلیل قابلیت بالای اعداد_Z در توصیف عدم قطعیت اطلاعات، اکثر مطالعات موجود عمدتاً در زمینه تصمیم‌گیری می‌باشند. همچنین دیدیم که سایر رویکردهای هوش مصنوعی در حال ادغام با اعداد_Z هستند. به علاوه، به کار بردن اعداد_Z در رگرسیون و کنترل یکی از کاربردهای مناسب این اعداد است که باعث پوشش بهتر عدم قطعیت و کاهش خطا می‌گردد. این چالش‌ها و مسائل مطرح شده

جدول ۲: دسته‌بندی مقالات

اعداد_Z	کاربردها	کنترل		[۷۰، ۷۱، ۷۲، ۷۳، ۷۴، ۷۶]
		تحلیل رگرسیون		[۸۳، ۸۵، ۸۴]
		تصمیم‌گیری		[۳۱، ۳۲، ۳۳، ۳۴، ۳۵، ۳۶، ۳۷، ۳۸، ۳۹، ۴۸، ۴۹، ۱۶]
		تشخیص پزشکی و بررسی میزان خطر		[۶۳، ۶۴، ۶۵، ۶۶، ۶۷، ۶۸، ۶۹]
		یادگیری ماشین		[۶۰، ۶۱، ۶۲]
		محاسبات با کلمات		[۵۶، ۵۷، ۵۸، ۵۹]
	مباحث نظری	محاسبات	تبدیل به فازی	[۱۱]
			محاسبات در حوزه اعداد_Z	[۱۰، ۱۳، ۱۴، ۱۵، ۱۹، ۱۷، ۱۸، ۲۱، ۲۳، ۱۵، ۱۲]
		اجزای عدد_Z	اعداد _ U	[۱۸، ۲۰]

می‌توانند به عنوان راهنمایی برای تحقیقات آینده و پیشرفت در این زمینه‌ها تلقی شوند و به ارتقای قابلیت‌ها و کارایی اعداد_Z در مسائل واقعی و همچنین در فهم بهتر تجربه‌ی انسانی و تعامل انسان_ماشین کمک کنند.

مراجع

[1] Zadeh, LA. Zadeh, fuzzy sets. *Inform Control*, 8:338–353, 1965.

[۲] نظریه مجموعه های فازی و تعمیم های آن. *سیستم های فازی و کاربرده*، ۱، ۲۰۱۸.

[3] Zadeh, Lotfi A. Toward extended fuzzy logic—a first step. *Fuzzy sets and systems*, 160(21):3175–3181, 2009.

[۴] شناسایی سیستم های غیرخطی بر اساس منطق فازی توسعه یافته. *مهندسی برق دانشگاه تبریز*، ۴۴، ۲۰۱۴.

[5] Sabahi, Farnaz and Akbarzadeh-T, Mohammad Reza. Extended fuzzy logic: Sets and systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 24(3):530–543, 2015.

[6] Zadeh, Lotfi A. A note on z-numbers. *Information Sciences*, 181(14):2923–2932, 2011.

[7] Attoh-Okine, Nii O and Ayyub, Bilal M. *Applied research in uncertainty modeling and analysis*. Springer, 2005.

[8] Conejo, Antonio J, Carrión, Miguel, Morales, Juan M, et al. *Decision making under uncertainty in electricity markets*, vol. 1. Springer, 2010.

[9] Soroudi, Alireza and Amraee, Turaj. Decision making under uncertainty in energy systems: State of the art. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, 28:376–384, 2013.

[10] Aliev, Rafik Aziz, Alizadeh, Akif, Aliyev, Rashad Rafig, and Huseynov, Oleg H. Arithmetic of z-numbers, the: theory and applications. 2015.

[11] Kang, Bingyi, Wei, Daijun, Li, Ya, and Deng, Yong. A method of converting z-number to classical fuzzy number. *Journal of Information &computational Science*, 9(3):703–709, 2012.

جدول ۳: زمان‌بندی مقالات مطرح حوزه اعداد_Z

مقاله	سال
مجموعه‌های فازی [۱]	۱۹۶۵
اعداد_Z [۶]	۲۰۱۱
محاسبات اعداد_Z [۱۱] محاسبه اعداد_Z	۲۰۱۱
تصمیم‌گیری مبتنی بر اعداد_Z [۳۱] تصمیم‌گیری	۲۰۱۲
تحلیل سلسه مراتبی مبتنی بر اعداد_Z [۱۶] تصمیم‌گیری	۲۰۱۲
پردازش زبان طبیعی مبتنی بر اعداد_Z [۵۹] محاسبات کلمات	۲۰۱۳
پیش‌بینی اعتماد مبتنی بر اعداد_ Z [۶۰] یادگیری ماشین	۲۰۱۴
برنامه‌نویسی خطی مبتنی بر اعداد_Z [۶۱] یادگیری ماشین	۲۰۱۵
رویکرد کلی محاسبات با اعداد_Z [۱۰] محاسبه اعداد_Z	۲۰۱۵
سیستم استنتاج فازی مبتنی بر اعداد_Z [۷۰] کنترل	۲۰۱۶
معادلات فازی دوگانه مبتنی بر اعداد_Z [۷۲] کنترل	۲۰۱۷
رگرسیون خطی مبتنی بر اعداد_Z [۸۴] رگرسیون	۲۰۱۷
اعداد_U [۱۸] اجزای عدد_Z	۲۰۱۷
تشخیص پزشکی مبتنی بر اعداد_Z [۶۵] تشخیص پزشکی	۲۰۱۸
اعداد_Z چند بعدی [۱۵] اجزای عدد_Z	۲۰۱۹
شبکه عصبی فازی مبتنی بر اعداد_Z [۷۴] کنترل	۲۰۲۰
سیستم استنتاج فازی تطبیقی مبتنی بر اعداد_Z (ZAFIS) [۱۲] اجزای عدد_Z	۲۰۲۰

[12] Rezaee-Ahmadi, Fatemeh, Rafiei, Hamed, and Akbarzadeh-T, Mohammad-R. Z-adaptive fuzzy inference systems. in *2021 IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE)*, pp. 1–6. IEEE, 2021.

[13] Aliev, Rafik A, Huseynov, Oleg H, and Zeinalova, Lala M. The arithmetic of continuous z-numbers. *Information Sciences*, 373:441–460, 2016.

[14] Massanet, Sebastia, Riera, Juan Vicente, and Torrens, Joan. On the aggregation of zadeh's z-numbers based on discrete fuzzy numbers. in *International Summer School on Aggregation Operators*, pp. 118–129. Springer, 2017.

[15] Shen, Kai-Wen, Wang, Jian-Qiang, and Wang, Tie-Li. The arithmetic of multidimensional z-number. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, 36(2):1647–1661, 2019.

[16] Azadeh, Ali, Saberi, Morteza, Atashbar, Nasim Zandi, Chang, Elizabeth, and Pazhoheshfar, Peiman. Z-ahp: A z-number extension of fuzzy analytical hierarchy process. in *2013 7th IEEE International Conference on Digital Ecosystems and Technologies (DEST)*, pp. 141–147. IEEE, 2013.

[17] Aliev, RA and Kreinovich, Vladik. Z-numbers and type-2 fuzzy sets: a representation result. *Intelligent Automation & Soft Computing*, pp. 1–5, 2017.

[18] Aliev, RA. Introduction to u-number calculus. *Intelligent Automation & Soft Computing*, pp. 1–6, 2017.

[19] Aliev, Rafik A, Pedrycz, Witold, Huseynov, Oleg H, and Eyupoglu, Serife Zihni. Approximate reasoning on a basis ofz-number-valued if–then rules. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 25(6):1589–1600, 2016.

[20] Lala, Zeinalova M. Identification of usual numbers. *Procedia computer science*, 120:758–765, 2017.

[21] Aliev, RA, Huseynov, OH, and Aliyev, RR. A sum of a large number of z-numbers. *Procedia computer science*, 120:16–22, 2017.

[22] Lodwick, Weldon A and Kacprzyk, Janusz. *Fuzzy optimization: Recent advances and applications*, vol. 254. Springer, 2010.

[23] Aliev, Rafik A, Pedrycz, Witold, and Huseynov, Oleg H. Functions defined on a set of z-numbers. *Information Sciences*, 423:353–375, 2018.

[24] Qalehe, Leila, Afshar Kermani, Mozhdeh, and Allahviranloo, Tofigh. Solving first-order differential equations of z-numbers' initial value using radial basic function. *International Journal of Differential Equations*, 2020:1–11, 2020.

[25] Hasankhani, Fatemeh, Daneshian, Behrouz, Allahviranloo, Tofigh, and Khiyabani, Farzin Modarres. A new method for solving linear programming problems using z-numbers' ranking. *Mathematical Sciences*, pp. 1–11, 2021.

[26] Lordejani, Maryam Ardeshiri, Kermani, Mozhdeh Afshar, and Allahviranloo, Tofigh. Z+-laplace transforms and z+-differential equations of the arbitrary-order, theory and applications. *Information Sciences*, 617:65–90, 2022.

[27] Motamedi Pour, Zeinab, Allahviranloo, Tofigh, Afshar Kermani, Mozhdeh, Abbasbandy, Saeid, et al. Solving a system of linear equations based on z-numbers to determinate the market balance value. *Advances in Fuzzy Systems*, 2023, 2023.

[28] Joghataee, M, Allahviranloo, T, Hosseinzadeh Lotfi, F, Ebrahimnejad, A, Abbasbandy, S, Amirteimoori, A, and Catak, M. Solving fully linear programming problem based on z-numbers. *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, 20(7):157–174, 2023.

[29] Zadeh, Lotfi Asker. Probability measures of fuzzy events. *Journal of mathematical analysis and applications*, 23(2):421–427, 1968.

[30] Yager, Ronald R. Measures of specificity. in *Computational intelligence: Soft computing and fuzzy-neuro integration with applications*, pp. 94–113. Springer, 1998.

[31] Kang, Bingyi, Wei, Daijun, Li, Ya, and Deng, Yong. Decision making using z-numbers under uncertain environment. *Journal of computational Information systems*, 8(7):2807–2814, 2012.

[32] Yaakob, Abdul Malek and Gegov, Alexander. Interactive topsis based group decision making methodology using z-numbers. *International Journal of Computational Intelligence Systems*, 9(2):311–324, 2016.

[33] Kang, Bingyi, Hu, Yong, Deng, Yong, and Zhou, Deyun. A new methodology of multicriteria decision-making in supplier selection based on-numbers. *Mathematical problems in engineering*, 2016, 2016.

[34] Kang, Bingyi, Deng, Yong, and Sadiq, Rehan. Total utility of z-number. *Applied Intelligence*, 48(3):703–729, 2018.

[35] Sotoudeh-Anvari, Alireza, Najafi, Esmaeil, and Sadi-Nezhad, Soheil. A new data envelopment analysis in fully fuzzy environment on the base of the degree of certainty of information. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, 30(6):3131–3142, 2016.

[36] Sadi-Nezhad, Soheil and Sotoudeh-Anvari, Alireza. A new data envelopment analysis under uncertain environment with respect to fuzziness and an estimation of reliability. *Opsearch*, 53(1):103–115, 2016.

[37] Azadeh, Ali and Kokabi, Reza. Z-number dea: A new possibilistic dea in the context of z-numbers. *Advanced engineering informatics*, 30(3):604–617, 2016.

[38] Aliev, Rafik A and Zeinalova, Lala M. Decision making under z-information. in *Human-centric decision-making models for social sciences*, pp. 233–252. Springer, 2014.

[39] Agakishiyev, E. Supplier selection problem under z-information. *Procedia Computer Science*, 102:418–425, 2016.

[40] Allahviranloo, Tofigh and Ezadi, Somayeh. Z-advanced numbers processes. *Information Sciences*, 480:130–143, 2019.

[41] Motamedi Pour, Zeynab, Allahviranloo, Tofigh, and Afshar Kermani, Mozhdeh. Z-numbers for uncertainty formulation. in *Progress in Intelligent Decision Science: Proceeding of IDS 2020*, pp. 975–985. Springer International Publishing, 2021.

[42] Abbasbandy, Saeid and Hajjari, T. An improvement in centroid point method for ranking of fuzzy numbers. 2011.

[43] Allahviranloo, Tofigh and Saneifard, Rahim. Defuzzification method for ranking fuzzy numbers based on center of gravity. 2012.

[44] Deng, Yong, Zhenfu, Zhu, and Qi, Liu. Ranking fuzzy numbers with an area method using radius of gyration. *Computers & Mathematics with Applications*, 51(6-7):1127–1136, 2006.

[45] Yager, Ronald R. A procedure for ordering fuzzy subsets of the unit interval. *Information sciences*, 24(2):143–161, 1981.

[46] Cheng, Ching-Hsue. A new approach for ranking fuzzy numbers by distance method. *Fuzzy sets and systems*, 95(3):307–317, 1998.

[47] Wang, Zhong-Xing, Liu, Yong-Jun, Fan, Zhi-Ping, and Feng, Bo. Ranking l–r fuzzy number based on deviation degree. *Information Sciences*, 179(13):2070–2077, 2009.

[48] Aliev, Rafik A, Huseynov, Oleg H, and Serdaroglu, R. Ranking of z-numbers and its application in decision making. *International Journal of Information Technology & Decision Making*, 15(06):1503–1519, 2016.

[49] Poleshchuk, Olga M. Object monitoring under z-information based on rating points. in *International Conference on Intelligent and Fuzzy Systems*, pp. 1191–1198. Springer, 2020.

[50] Ezadi, Somayeh and Allahviranloo, Tofigh. New multi-layer method for z-number ranking using hyperbolic tangent function and convex combination. *Intelligent Automation & Soft Computing*, pp. 1–7, 2017.

[51] Allahviranloo, Tofigh and Ezadi, Somayeh. On the z-numbers. *Recent Developments in Fuzzy Logic and Fuzzy Sets: Dedicated to Lotfi A. Zadeh*, pp. 119–151, 2020.

[52] Ezadi, Somayeh, Allahviranloo, Tofigh, Salahshour, Soheil, and Ahmed El Sissi, Nermine. A new model for ranking z-numbers to make decisions with high sensitivity. in *Progress in Intelligent Decision Science: Proceeding of IDS 2020*, pp. 328–342. Springer International Publishing, 2021.

[53] Farzam, M, kermani, M Afshar, Allahviranloo, T, and Belaghi, Mahmoud JS. A new method for ranking of z-numbers based on magnitude value. in *Progress in Intelligent Decision Science: Proceeding of IDS 2020*, pp. 841–850. Springer International Publishing, 2021.

[54] Farzam, Maryam, Afshar Kermani, Mozhdeh, Allahviranloo, Tofigh, Aminataei, Azim, et al. Ranking the return on assets of tehran stock exchange by a new method based on z-numbers data. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 2023, 2021.

[55] Motamedi Pour, Zeinab, Allahviranloo, Tofigh, Afshar Kermani, Mozhdeh, and Abbasbandy, Saeid. A method for ranking z-numbers. *Journal of New Researches in Mathematics*, 2023.

[56] Patel, Purvag, Rahimi, Shahram, and Khorasani, Elham. Applied z-numbers. in *2015 Annual Conference of the North American Fuzzy Information Processing Society (NAFIPS) held jointly with 2015 5th World Conference on Soft Computing (WConSC)*, pp. 1–6. IEEE, 2015.

[57] Patel, Purvag, Khorasani, Elham S, and Rahimi, Shahram. Modeling and implementation of z-number. *Soft Computing*, 20(4):1341–1364, 2016.

[58] Pal, Sankar K, Banerjee, Romi, Dutta, Soumitra, and Sarma, Samar Sen. An insight into the z-number approach to cww. *Fundamenta Informaticae*, 124(1-2):197–229, 2013.

[59] Banerjee, Romi and Pal, Sankar K. The z-number enigma: a study through an experiment. in *Soft computing: state of the art theory and novel applications*, pp. 71–88. Springer, 2013.

[60] Azadeh, Ali, Kokabi, Reza, Saberi, Morteza, Hussain, Farookh Khadeer, and Hussain, Omar Khadeer. Trust prediction using z-numbers and artificial neural networks. in *2014 IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE)*, pp. 522–528. IEEE, 2014.

[61] Aliev, Rafik A, Alizadeh, Akif V, Huseynov, Oleg H, and Jabbarova, KI. Z-number-based linear programming. *International Journal of Intelligent Systems*, 30(5):563–589, 2015.

[62] Banerjee, Romi and Pal, Sankar K. A machine-mind architecture and z*-numbers for real-world comprehension. in *Pattern Recognition and Big Data*, pp. 805–842. World Scientific, 2017.

[63] Aliev, Rafik and Memmedova, Konul. Application of-number based modeling in psychological research. *Computational intelligence and neuroscience*, 2015, 2015.

[64] Aliev, Bahadur F and Gardashova, Latafat A. Selection of an optimal treatment method for acute pulpitis disease. *Procedia computer science*, 120:539–546, 2017.

[65] Wu, Dong, Liu, Xiang, Xue, Feng, Zheng, Hanqing, Shou, Yehang, and Jiang, Wen. A new medical diagnosis method based on z-numbers. *Applied Intelligence*, 48(4):854–867, 2018.

[66] Nuriyev, AM. application of z-numbers based approach to project risks assessment. *European Journal of Interdisciplinary Studies*, 5(2):67–73, 2019.

[67] Sahrom, Nor Ashikin and Dom, Rosma Mohd. A z-number extension of the hybrid analytic hierarchy process-fuzzy data envelopment analysis for risk assessment. in *2015 International Conference on Research and Education in Mathematics (ICREM7)*, pp. 19–24. IEEE, 2015.

[68] Jiang, Wen, Xie, Chunhe, Wei, Boya, and Tang, Yongchuan. Failure mode and effects analysis based on z-numbers. *Intelligent Automation & Soft Computing*, pp. 1–8, 2017.

[69] Zou, Bo, Zhou, Ying, Hu, Jiahua, Wen, Fushuan, Dong, Zhao-Yang, Zheng, Yu, and Zhang, Rui. Z-number-based negotiation model for determining two-part transmission tariffs of cross-regional transmission projects. *IET Generation, Transmission & Distribution*, 11(7):1829–1838, 2017.

[70] Abiyev, Rahib H. Number based fuzzy inference system for dynamic plant control. *Advances in Fuzzy Systems*, 2016, 2016.

[71] Razvarz, Sina and Tahmasbi, Mohammad. Fuzzy equations and z-numbers for nonlinear systems control. *Procedia computer science*, 120:923–930, 2017.

[72] Jafari, Raheleh, Yu, Wen, and Li, Xiaoou. Numerical solution of fuzzy equations with z-numbers using neural networks. *Intelligent Automation & Soft Computing*, pp. 1–7, 2017.

[73] Abiyev, Rahib H, Akkaya, Nurullah, and Gunsel, Irfan. Control of omnidirectional robot using z-number-based fuzzy system. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 49(1):238–252, 2018.

[74] Abiyev, Rahib H. Dynamic system control using z-number based fuzzy neural network. in *International Conference on Intelligent and Fuzzy Systems*, pp. 964–972. Springer, 2020.

[75] Kóczy, LászlóT and Hirota, Kaoru. Approximate reasoning by linear rule interpolation and general approximation. *International Journal of Approximate Reasoning*, 9(3):197–225, 1993.

[76] Shalabi, Mohamed Essam, El-Hussieny, Haitham, Abouelsoud, AA, and Elbab, Ahmed MR Fath. Control of automotive air-spring suspension system using z-number based fuzzy system. in *2019 IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics (ROBIO)*, pp. 1306–1311. IEEE, 2019.

[77] Zadeh, Lotfi A. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning—i. *Information sciences*, 8(3):199–249, 1975.

[78] Kóczy, LászlóT and Hirota, Kaoru. Interpolative reasoning with insufficient evidence in sparse fuzzy rule bases. *Information Sciences*, 71(1-2):169–201, 1993.

[79] Cheng, Chi-Bin and Lee, E Stanley. Fuzzy regression with radial basis function network. *Fuzzy Sets and Systems*, 119(2):291–301, 2001.

[80] Zadeh, Lofti A. Information and control. *Fuzzy sets*, 8(3):338–353, 1965.

[81] Coppi, Renato. Management of uncertainty in statistical reasoning: the case of regression analysis. *International Journal of Approximate Reasoning*, 47(3):284–305, 2008.

[82] Celmiņš, Aivars. Least squares model fitting to fuzzy vector data. *Fuzzy sets and systems*, 22(3):245–269, 1987.

[83] Zeinalova, Lala M, Huseynov, OH, and Sharghi, P. A z-number valued regression model and its application. *Intelligent Automation & Soft Computing*, pp. 1–5, 2017.

[84] Ezadi, Somayeh and Allahviranloo, Tofigh. Numerical solution of linear regression based on z-numbers by improved neural network. *Intelligent Automation & Soft Computing*, pp. 1–11, 2017.

[85] Sadikoglu, Fahreddin, Huseynov, Oleg, and Memmedova, Konul. Z-regression analysis in psychological and educational researches. *Procedia Computer Science*, 102:385–389, 2016.

[86] Daryakenari, Nina, Allahviranloo, Tofigh, and Nouri, Mostafa. Providing a model for predicting futures contract of gold coin price by using models based on z-numbers. *Mathematical Sciences*, 15:215–228, 2021.