سیستم های فازی و کاربردها
سال ششم، شماره دوم (پائیز و زمستان ۱۴۰۲)
صص. ۵۱ تا ۶۴

شاپای چاپی: ۲۷۱۷ـ ۴۴۰۹
شاپای الکترونیکی: ۲۷۱۷ـ ۳۹۸۴
DOI:10.22034/JFSA.2023.188514

چندجمله‌ای‌های فازی برای حل مسئله برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابه فازی

زهرا آرامی، مریم عرب‌عامری* و حسن میش‌مست‌نهی
دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر، دانشگاه سیستان و بلوچستان، زاهدان، ایران

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۴/۲ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۷/۲

نوع مقاله: علمی ـ پژوهشی

چکیده. یکی از روش‌های حل مسائل برنامه‌ریزی چندهدفه، استفاده از مسائل برنامه‌ریزی آرمانی است، به این صورت که تصمیم‌گیرنده برای هر تابع هدف یک سطح آرمان در نظر می‌گیرد. در مسائل زندگی واقعی ممکن است چندین سطح آرمان برای یک تابع هدف در دسترس باشد، و یا این سطوح آرمان از نوع فازی باشند که در این صورت مسائل برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابه فازی به وجود می‌آید. در این مقاله به معرفی و حل مسائل برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابه فازی پرداخته می‌شود، به این صورت که ابتدا مسئله به یک مسئله برنامه‌ریزی چندانتخابه فازی تبدیل می‌شود که در آن انتخاب‌های متعددی برای سمت راست قیود وجود دارد، سپس با استفاده از چندجمله‌ای باینری فازی و چندجمله‌ای کمترین مربعات خطی فازی، یک مسئله برنامه‌ریزی خطی کلاسیک حاصل می‌شود که از حل آن با استفاده از نرم‌افزار لینگو جواب مسئله به دست می‌آید. الگوریتم تشریح شده برای حل یک مثال کاربردی در زمینه مسائل برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابه فازی مورد استفاده قرار می‌گیرد و نتایج موجود قبلی با نتایجی که از این روش به دست می‌آید مورد مقایسه و تجزیه تحلیل قرار می‌گیرد.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 56K05; 90C70; 90C29.
عبارات و کلمات کلیدی. برنامه‌ریزی آرمانی فازی، سطوح آرمان چندانتخابه، سطوح آرمان فازی، چندجمله‌ای باینری فازی، روش کمترین مربعات خطی فازی.

۱. مقدمه

استفاده از مسائل برنامه‌ریزی آرمانی برای حل مسائل برنامه‌ریزی چند هدفه باعث گسترش آن در دنیای واقعی شده است. نخستین بار چارنز[۱] و کوپر[۲] [۹] مسائل برنامه‌ریزی آرمانی را معرفی کردند، مسائل برنامه‌ریزی آرمانی به دو دسته قطعی و غیرقطعی تقسیم می‌گردند، که پژوهشگرانی مانند لی[۳] [۱۳]، تمیز[۴] و همکاران [۱۶] به بررسی آن در حالت قطعی پرداخته‌اند؛ چانگ[۵] نیز در مقاله‌ای مسائل برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابه قطعی را معرفی کرد، و رویکردی برای حل آنها مطرح نمود [۸]. همچنین چانگ [۷] و حنان[۶] [۱۰، ۱۱] و محققانی دیگر مسائل برنامه‌ریزی آرمانی فازی (FGP[۷]) را مورد مطالعه قرار دادند [۲، ۳، ۱۴، ۱۲]. بانکیان[۸] و شاهنگی[۹] مدل برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابه فازی (FMCGP[۱۰]) را معرفی کردند و با استفاده از تابع عضویت اعداد فازی و روشی که زیمرمن[۱۱] برای حل این مدل‌ها مطرح نمود به حل آن پرداختند [۱۷]؛ آنها برای تبدیل مسئله از حالت چندانتخابه به حالت معمول از چندجمله‌ای با متغیرهای باینری استفاده نمودند [۴].

در این مقاله قصد داریم مثال کاربردی حل شده توسط بانکیان و شاهنگی [۴] که از نوع مدل FMCGP می‌باشد را از طریق تبدیل آن به یک مدل برنامه‌ریزی چندانتخابه فازی (FMCLP[۱۲]) حل کنیم. به این ترتیب که ابتدا با در نظر گرفتن مدل معرفی شده در [۱۵] FMCGP را به یک مسئله برنامه‌ریزی چندانتخابه فازی تبدیل می‌کنیم. سپس با استفاده از چندجمله‌ای باینری فازی و چندجمله‌ای کمترین مربعات خطی فازی، یک مدل برنامه‌ریزی خطی کلاسیک حاصل می‌شود که با حل آن جواب مدل اصلی به دست می‌آید.

این مقاله بدین شرح تنظیم شده است: در بخش دوم ابتدا MCGP را معرفی می‌کنیم و سپس آن را به حالت فازی گسترش می‌دهیم. در زیر بخش‌های بعد به چگونگی حل آن را با استفاده از چندجمله‌ای باینری فازی و روش کمترین مربعات خطی فازی می‌پردازیم. در نهایت در بخش

---

[1] Charnes
[2] Cooper
[3] Lee
[4] Tamiz
[5] Chang
[6] Hanan
[7] Fuzzy Goal Programming
[8] Bankian-Tabrizi
[9] Shahanaghi
[10] Fuzzy Multi-Choice Goal Programming
[11] Zimmerman
[12] Fuzzy Multi Choice Linear Programming

سوم با حل مثال کاربردی با استفاده از روش پیشنهادی و مقایسه جواب‌های به‌دست‌آمده با جواب حاصل از روش ارائه شده در [۴] به تجزیه و تحلیل نتایج می‌پردازیم.

۲. مسئله برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابه فازی

مسائل برنامه‌ریزی چندانتخابه آرمانی برای نخستین بار توسط چانگ معرفی شد که فرم کلی آن به صورت زیر می‌باشد [۱۵]:

$$\begin{array}{ll} \min & \left|Z_k(\boldsymbol{x}) - g_k\right|, g_k \in \left\{g_k^{(۱)}, g_k^{(۲)}, g_k^{(۳)}, \dots, g_k^{(R_k)}\right\}, \\ & k = ۱, ۲, ۳, \dots, K, \\ \text{s.t.} & \sum_{j=۱}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i,\ i = ۱, ۲, \dots, m, \\ & x_j \geq ۰,\ j = ۱, ۲, \dots, n, \end{array} \tag{۱.۲}$$

که $\boldsymbol{x} = (x_۱, x_۲, \dots, x_n)^T$. به منظور اینکه تابع هدف مدل (۱.۲)، مینیمم شود، باید فاصله هرتابع هدف با آرمانش کمترین مقدار ممکن باشد؛ به عبارت دیگر متغیرهای کمکی ρ_k و η_k که انحرافات مثبت و منفی از k−امین تابع هدف در نظر گرفته می‌شوند نیز باید مینیمم شوند، پس می‌توان مدل (۱.۲) را به صورت زیر فرمول‌بندی کرد [۱۵]:

$$\begin{array}{ll} \min & \sum_{k=۱}^{k} \omega_k(\rho_k + \eta_k), \\ \text{s.t.} & Z_k(\boldsymbol{x}) + \eta_k - \rho_k = g_k,\ g_k \in \left\{g_k^{(۱)}, g_k^{(۲)}, g_k^{(۳)}, \dots, g_k^{(R_k)}\right\}, \\ & k = ۱, ۲, ۳, \dots, K, \\ & \sum_{j=۱}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i,\ i = ۱, ۲, \dots, m, \\ & \sum_{k=۱}^{K} \omega_k = ۱, \\ & \eta_k, \rho_k, x_j \geq ۰,\ j = ۱, ۲, \dots, n;\ k = ۱, ۲, ۳, \dots, K. \end{array} \tag{۲.۲}$$

که در آن ω_k، ρ_k و η_k به ترتیب نشان دهنده‌ی وزن، انحراف مثبت و انحراف منفی متناظر با k−امین هدف می‌باشند.

هم‌چنین شکل کلی مدل برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابه فازی به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\begin{array}{ll} \min & \left|Z_k(\boldsymbol{x}) - \widetilde{g}_k\right|, \widetilde{g}_k \in \left\{\widetilde{g}_k^{(۱)}, \widetilde{g}_k^{(۲)}, \widetilde{g}_k^{(۳)}, \dots, \widetilde{g}_k^{(R_k)}\right\}, \\ & k = ۱, ۲, ۳, \dots, K, \\ \text{s.t.} & \sum_{j=۱}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i,\ i = ۱, ۲, \dots, m, \\ & x_j \geq ۰,\ j = ۱, ۲, \dots, n. \end{array} \tag{۳.۲}$$

$\widetilde{g}_k^{(r)}$ به ازای $r = ۱, ۲, \dots, R_k$، و K ،$k = ۱, ۲, \dots, K$، اعداد فازی مثلثی می‌باشند.
مشابه آنچه برای مدل (۱.۲) گفته شد در اینجا نیز برای مینیمم کردن فاصله هر تابع هدف با آرمانش باید متغیرهای کمکی متناظر با آنها مینیمم شوند، بنابراین مدل (۳.۲) را می‌توان به شکل زیر نیز فرمول‌بندی کرد [۴]:

$$
\begin{array}{ll}
\min & \sum_{k=۱}^{K} \omega_k(\rho_k + \eta_k), \\
\text{s.t.} & Z_k(\boldsymbol{x}) + \eta_k - \rho_k = \widetilde{g}_k,\ \widetilde{g}_k \in \left\{\widetilde{g}_k^{(۱)}, \widetilde{g}_k^{(۲)}, \widetilde{g}_k^{(۳)}, \dots, \widetilde{g}_k^{(R_k)}\right\}, \\
& k = ۱, ۲, ۳, \dots, K, \\
& \sum_{j=۱}^{n} a_{ij}x_j \le b_i,\ i = ۱, ۲, \dots, m, \\
& \sum_{k=۱}^{K} \omega_k = ۱, \\
& \eta_k, \rho_k, x_j \ge ۰,\ j = ۱, ۲, \dots, n;\ k = ۱, ۲, ۳, \dots, K.
\end{array} \tag{۴.۲}
$$

در اینجا سمت راست قیود مسئله به صورت پارامترهای چندانتخابه فازی می‌باشند. در رویکرد این پژوهش، برای حل آن (۴.۲)، ابتدا براساس مقادیر موجود در سمت راست قیود، زوج مرتب‌های $\left\{\left(۱, \widetilde{g}_k^{(۱)}\right), \left(۲, \widetilde{g}_k^{(۲)}\right), \dots, \left(R_k, \widetilde{g}_k^{(R_k)}\right)\right\}$ را تشکیل می‌دهیم. سپس با استفاده از رویکرد باینری فازی و روش کمترین مربعات خطی فازی به نقاط داده شده چندجمله‌ای $\widetilde{\rho}^k(z)$ به ازای $k = ۱, ۲, \dots, K$ نظیر می‌کنیم. در این صورت مدل زیر حاصل خواهد شد:

$$
\begin{array}{ll}
\min & \sum_{k=۱}^{K} \omega_k \left(\rho_k + \eta_k\right), \\
\text{s.t.} & Z_k\left(\boldsymbol{x}\right) + \eta_k - \rho_k = \widetilde{p}^{(k)}\left(z\right),\ k = ۱, ۲, ۳, \dots, K, \\
& \sum_{j=۱}^{n} a_{ij}x_j \le b_i,\ i = ۱, ۲, \dots, m, \\
& \sum_{k=۱}^{K} \omega_k = ۱, \\
& \eta_k, \rho_k, x_j \ge ۰,\ j = ۱, ۲, \dots, n;\ k = ۱, ۲, ۳, \dots, K.
\end{array} \tag{۵.۲}
$$

سپس با حل مدل (۵.۲) که یک مدل برنامه‌ریزی خطی کلاسیک می‌باشد، نهایتاً جواب مسئله اصلی به دست می‌آید.
در زیربخش‌های پیش‌رو به چگونگی تشکیل چندجمله‌ای‌های باینری فازی و چندجمله‌ای کمترین مربعات خطی فازی و استفاده از آنها برای حل (۴.۲) می‌پردازیم.

۱.۱.۲ حل مسئله FMCGP با استفاده از چندجمله‌ای باینری فازی. برای حل مدل (۴.۲) با استفاده از چندجمله‌ای باینری فازی، با توجه به تعداد پارامترهای چندانتخابه در

سمت راست قیود، از مدل معرفی شده توسط چانگ الگو می‌گیریم. تنها تفاوت مدل چانگ و مدل (۴.۲) این است که در مدل چانگ پارامترهای چندانتخابه قطعی است ولی پارامترهای چندانتخابه در مدل (۴.۲) اعداد فازی مثلثی هستند. بنابراین در سمت راست قیود چندجمله‌ای باینری فازی مثلثی خواهیم داشت [۵، ۶]. به عنوان مثال فرض کنید در سمت راست قیود مسئله (۴.۲) سه آرمان فازی $\tilde{g}_k^{(۱)}$، $\tilde{g}_k^{(۲)}$ و $\tilde{g}_k^{(۳)}$ وجود داشته باشد، در این صورت مدل (۴.۲) به یکی از دو مدل زیر تبدیل خواهد شد:

مدل ۱

$$
\begin{aligned}
\min\quad & \textstyle\sum_{k=۱}^{K} \omega_k\left(\rho_k+\eta_k\right), \\
\text{s.t.}\quad & Z_k(\boldsymbol{x})+\eta_k-\rho_k=\left(۱-z_k^{(۱)}\right)\left(۱-z_k^{(۲)}\right)\tilde{g}_k^{(۱)}+\left(۱-z_k^{(۱)}\right)z_k^{(۲)}\tilde{g}_k^{(۲)} \\
& +z_k^{(۱)}\left(۱-z_k^{(۲)}\right)\tilde{g}_k^{(۳)},\ k=۱,۲,۳,\ldots,K, \\
& \textstyle\sum_{j=۱}^{n} a_{ij}x_j \le b_i,\ i=۱,۲,\ldots,m, \\
& \textstyle\sum_{k=۱}^{K}\omega_k=۱, \\
& z_k^{(۱)}+z_k^{(۲)}\le ۱\ ,\ k=۱,۲,۳,\ldots,K, \\
& z_k^{(۱)},z_k^{(۲)}\in\{۰,۱\},k=۱,۲,۳,\ldots,K, \\
& \eta_k,\rho_k,x_j\ge ۰,j=۱,۲,\ldots,n;\ k=۱,۲,۳,\ldots,K.
\end{aligned}
\tag{۶.۲}
$$

مدل ۲

$$
\begin{aligned}
\min\quad & \textstyle\sum_{k=۱}^{K} \omega_k\left(\rho_k+\eta_k\right), \\
\text{s.t.}\quad & Z_k(\boldsymbol{x})+\eta_k-\rho_k \\
& =\left(۱-z_k^{(۱)}\right)z_k^{(۲)}\tilde{g}_k^{(۱)}+\left(۱-z_k^{(۲)}\right)z_k^{(۱)}\tilde{g}_k^{(۲)}+z_k^{(۱)}z_k^{(۲)}\tilde{g}_k^{(۳)}, \\
& k=۱,۲,۳,\ldots,K, \\
& \textstyle\sum_{j=۱}^{n} a_{ij}x_j \le b_i,\ i=۱,۲,\ldots,m, \\
& \textstyle\sum_{k=۱}^{K}\omega_k=۱, \\
& z_k^{(۱)}+z_k^{(۲)}\ge ۱\ ,\ k=۱,۲,۳,\ldots,K, \\
& z_k^{(۱)},z_k^{(۲)}\in\{۰,۱\},k=۱,۲,۳,\ldots,K, \\
& \eta_k,\rho_k,x_j\ge ۰,j=۱,۲,\ldots,n;k=۱,۲,۳,\ldots,K.
\end{aligned}
\tag{۷.۲}
$$

از هر دو مدل (۶.۲) و (۷.۲) می‌توان برای تبدیل مسئله (۴.۲) به (۵.۲) استفاده کرد؛ تنها تفاوت این دو مدل این است که در مدل (۶.۲) متغیرهای باینری $z_k^۱$ و $z_k^۲$ نمی‌توانند به طور

همزمان مقدار یک را اختیار کنند زیرا در این صورت سمت راست قیود مسئله مقدار صفر را اختیار می‌کند، در مدل (۷.۲) نیز به همین دلیل هر دو متغیر نمی‌توانند همزمان مقدار صفر را اختیار کنند.

برای تعداد انتخاب‌های دیگر نیز مشابه آنچه در مدل (۶.۲) و مدل (۷.۲) گفته شد چندجمله‌ای باینری را معرفی و مدل حاصل را حل می‌کنیم.

۲.۲. حل مسئله FMCGP با استفاده از روش کمترین مربعات خطی فازی. برای حل مدل (۴.۲) با استفاده از روش کمترین مربعات خطی فازی، تابع فازی $\widetilde{g}_k$، $k = 1, 2, \ldots, K$ را در نقاط $1, 2, \ldots, R_k$ در نظر می‌گیریم. هدف یافتن چندجمله‌ای کمترین مربعات خطی فازی متناظر با نقاط مذکور است. بنابراین باید مجموعه مربعات عمودی نقاط $(k, \widetilde{g}_k)$، $k = 1, 2, \ldots, R_k$ از خط $\widetilde{p}(z) = \widetilde{a}_0 + \widetilde{a}_1 z$ کمترین مقدار ممکن شود. در اینجا $\widetilde{a}_0$، $\widetilde{a}_1$ و $\widetilde{g}_k$ اعداد فازی مثلثی به صورت زیر می‌باشند:

$$\widetilde{a}_0 = \left(a_0^1, a_0^2, a_0^3\right), \qquad \widetilde{a}_1 = \left(a_1^1, a_1^2, a_1^3\right), \qquad \widetilde{g}_k = \left(g_k^1, g_k^2, g_k^3\right) \tag{۸.۲}$$

و $\widetilde{p}$ یک چندجمله‌ای کمترین مربعات خطی فازی نامیده می‌شود.

خطای کمترین مربعات را با $\widetilde{E}$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\widetilde{E} = \sum_{k=1}^{K} \left(\widetilde{g}_k - \widetilde{a}_0 - \widetilde{a}_1 z_k\right)^2, \tag{۹.۲}$$

از آنجا که $z_k = 1, 2, \ldots, K$، بنابراین به ازای $k = 1, 2, \ldots, K$ داریم $z_k = k$. بنابراین می‌توان نوشت:

$$\widetilde{E} = \sum_{k=1}^{K} \left(\widetilde{g}_k - \widetilde{a}_0 - \widetilde{a}_1 k\right)^2. \tag{۱۰.۲}$$

شرط لازم و کافی برای اینکه $\widetilde{E}$ مینیمم شود این است که مشتق فازی آن نسبت به $\widetilde{a}_0$ و $\widetilde{a}_1$ برابر صفر شود، در این حالت شرایط زیر را داریم:

$$\begin{cases} \widetilde{a}_0 \left(\sum\limits_{k=1}^{K} k\right) + \widetilde{a}_1 \left(\sum\limits_{k=1}^{K} k^2\right) = \sum\limits_{k=1}^{K} k\widetilde{g}_k, \\ \widetilde{a}_0 \,(K) + \widetilde{a}_1 \left(\sum\limits_{k=1}^{K} k\right) = \sum\limits_{k=1}^{K} \widetilde{g}_k. \end{cases} \tag{۱۱.۲}$$

به عبارت دیگر

$$\begin{cases} (a_0^1, a_0^2, a_0^3)\left(\sum_{k=1}^{K} k\right) + (a_1^1, a_1^2, a_1^3)\left(\sum_{k=1}^{K} k^2\right) = \sum_{k=1}^{K} k\left(g_k^1, g_k^2, g_k^3\right), \\ (a_0^1, a_0^2, a_0^3)(K) + (a_1^1, a_1^2, a_1^3)\left(\sum_{k=1}^{K} k\right) = \sum_{k=1}^{K} \left(g_k^1, g_k^2, g_k^3\right). \end{cases} \tag{۱۲.۲}$$

با ساده کردن دو طرف رابطه (۱۲.۲) دستگاه زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{cases} a_0^1\left(\sum_{k=1}^{K} k\right) + a_1^1\left(\sum_{k=1}^{K} k^2\right) = \sum_{k=1}^{K} k g_k^1, \\ a_0^2\left(\sum_{k=1}^{K} k\right) + a_1^2\left(\sum_{k=1}^{K} k^2\right) = \sum_{k=1}^{K} k g_k^2, \\ a_0^3\left(\sum_{k=1}^{K} k\right) + a_1^3\left(\sum_{k=1}^{K} k^2\right) = \sum_{k=1}^{K} k g_k^3, \\ a_0^1 K + a_1^1\left(\sum_{k=1}^{K} k\right) = \sum_{k=1}^{K} g_k^1, \\ a_0^2 K + a_1^2\left(\sum_{k=1}^{K} k\right) = \sum_{k=1}^{K} g_k^2, \\ a_0^3 K + a_1^3\left(\sum_{k=1}^{K} k\right) = \sum_{k=0}^{K} g_k^3. \end{cases} \tag{۱۳.۲}$$

مقادیر مجهول a_0^1، a_0^2، a_0^3، a_1^1، a_1^2 و a_1^3 با حل دستگاه (۱۳.۲) به دست می‌آیند. در این صورت خط $\widetilde{p}$ به صورت زیر خواهد بود:

$$\widetilde{p}(z) = (l(z), m(z), r(z)) = \left(a_0^1 + a_1^1 z, a_0^2 + a_1^2 z, a_0^3 + a_1^3 z\right). \tag{۱۴.۲}$$

در این صورت نهایتا مدل (۴.۲) به مدل (۵.۲) تبدیل می‌شود.

۳. حل یک مثال کاربردی با استفاده از چندجمله‌ای فازی

یک شرکت درحال تولید سه محصول y_1، y_2 و y_3 است. برای محصول y_1 سه مشتری A، B و C با تقاضای تقریبی ۳۰، ۵۰ و ۷۰ موجود است. ماکزیمم مقدار مجاز انحراف مثبت و منفی مشتریان A، B و C از اهدافشان برابر ۴ و ۵ و ۶ است. سود فروش این محصولات برابر ۱۰ واحد است، اطلاعات این سه محصول در جدول ۱ آمده است. به دلیل برخی محدودیت‌ها این شرکت مجبور است برای هر محصول تنها یک مشتری انتخاب کند، انتظار می‌رود از فروش محصولات حداقل ۸۵۰ واحد سود حاصل شود. برای تولید این محصولات به منابع s_1، s_2 و s_3 نیاز است که مقادیر آن در جدول ۲ آمده است [۴]. در این صورت

جدول ۱: اطلاعات مربوط به محصولات

محصول	مشتری	تقاضا	حداکثر انحراف مثبت و منفی	سود
y_1	A	۳۰	۴	
	B	۵۰	۵	۱۰
	C	۷۰	۶	
y_2	D	۱۵	۳	
	E	۳۰	۴	۱۲
y_3	F	۱۰	۲	
	G	۲۰	۲	۱۵

جدول ۲: میزان منابع مصرفی برای هر محصول

منابع	y_1	y_2	y_3
s_1	۵	۷	۴
s_2	۳	۵	۶
s_3	۱	۲	۱

مدل FMCGP براي این مثال به صورت زیر تبدیل می‌شود ($\omega_1 = ۰/۳$، $\omega_2 = ۰/۳$ و $\omega_3 = ۰/۴$).

$$\begin{aligned}
\min \quad & ۰/۳n_1 + ۰/۳n_2 + ۰/۴n_3 \\
\text{s.t.} \quad & y_1 + n_1 - \rho_1 = \{(۲۶,۳۰,۳۴),(۴۵,۵۰,۵۵),(۶۴,۷۰,۷۶)\} \\
& y_2 + n_2 - \rho_2 = \{(۱۲,۱۵,۱۸),(۲۶,۳۰,۳۴)\} \\
& y_3 + n_3 - \rho_3 = \{(۸,۱۰,۱۲),(۱۷,۲۰,۲۳)\} \\
& ۱۰y_1 + ۱۲y_2 + ۱۵y_3 \geq ۸۵۰ \\
& y_1 \leq \frac{x_{11}}{۵}, y_1 \leq \frac{x_{12}}{۳}, y_1 \leq x_{13}, \\
& y_2 \leq \frac{x_{21}}{۷}, y_2 \leq \frac{x_{22}}{۵}, y_2 \leq \frac{x_{23}}{۲}, \\
& y_3 \leq \frac{x_{31}}{۴}, y_3 \leq \frac{x_{32}}{۶}, y_3 \leq x_{33}, \\
& x_{11}+x_{12}+x_{13} \leq ۴۰۰, \\
& x_{21}+x_{22}+x_{23} \leq ۳۸۰, \\
& x_{31}+x_{32}+x_{33} \leq ۱۲۰.
\end{aligned} \tag{۱.۳}$$

در مدل (۱.۳) سمت راست برخی قیود پارامترهای چندانتخابه فازی می‌باشند. برای تبدیل (۱.۳) به یک مسئله برنامه‌ریزی فازی کلاسیک با استفاده از روش باینری، متغیرهای باینری $z_۱$، $z_۲$، $z_۳$ و $z_۴$ را معرفی می‌کنیم. به این ترتیب در سمت راست این قیود، چندجمله‌ای فازی با متغیرهای باینری ظاهر و مدل (۱.۳) به صورت زیر تبدیل می‌شود (۰.۳ $\omega_۱=$، $\omega_۲=۰/۳$ و $\omega_۳=۰/۴$):

$$
\begin{aligned}
\min\quad & ۰/۳n_۱+۰/۳n_۲+۰/۴n_۳,\\
\text{s.t.}\quad & y_۱+n_۱-\rho_۱=۳۳/۲+۲۰/۸۶z_۲+۴۱/۶z_۱-۹۵/۶z_۱z_۲\\
& y_۲+n_۲-\rho_۲=۳۳/۲-۱۵/۸z_۳,\\
& y_۳+n_۳-\rho_۳=۲۲/۴-۱۰/۸z_۴,\\
& ۱۰y_۱+۱۲y_۲+۱۵y_۳\geq ۸۵۰,\\
& y_۱\leq\frac{x_{۱۱}}{۵},y_۱\leq\frac{x_{۱۲}}{۳},y_۱\leq x_{۱۳},\\
& y_۲\leq\frac{x_{۲۱}}{۷},y_۲\leq\frac{x_{۲۲}}{۵},y_۲\leq\frac{x_{۲۳}}{۲},\\
& y_۳\leq\frac{x_{۳۱}}{۴},y_۳\leq\frac{x_{۳۲}}{۶},y_۳\leq x_{۳۳},\\
& x_{۱۱}+x_{۱۲}+x_{۱۳}\leq ۴۰۰,\\
& x_{۲۱}+x_{۲۲}+x_{۲۳}\leq ۳۸۰,\\
& x_{۳۱}+x_{۳۲}+x_{۳۳}\leq ۱۲۰,\\
& z_۱+z_۲\leq ۱,\\
& z_j\in\{۰,۱\},j=۱,۲,۳,۴.
\end{aligned}
\tag{۲.۳}
$$

با استفاده از نرم افزار لینگو [1] جواب بهینه مدل (۲.۳) محاسبه و در جدول ۳ آمده است.
با استفاده از روش کمترین مربعات خطی فازی شرح داده شده در بخش ۲، مدل (۱.۳) به

[1] Lingo

جدول ۳: جواب بهینه مدل (۲.۳) با استفاده از روش باینری

مقدار	متغیر	مقدار	متغیر	مقدار	متغیر	مقدار	متغیر
۰/۹۳	n_3	۰	n_2	۰	n_1	۰/۹۳	n
۹/۶۵	ρ_1	۱۰/۶۶	y_3	۲۶/۸۶	y_2	۴۲/۸۵	y_1
۰	z_2	۰	z_1	۰	ρ_3	۹/۴۵	ρ_2
۱۴۲/۸۵	x_{12}	۲۱۴/۲۸	x_{11}	۱	z_4	۱	z_3
۵۳/۷۳	x_{23}	۱۳۴/۳۴	x_{22}	۱۹۱/۹۱	x_{21}	۴۲/۸۵	x_{13}
				۶۶/۶۶	x_{32}	۴۲/۶۶	x_{31}

صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & 0.3n_1 + 0.3n_2 + 0.4n_3, \\
\text{s.t.} \quad & y_1 + n_1 - \rho_1 = 32.2 + 20.8z_1, \\
& y_2 + n_2 - \rho_2 = 17.4 + 15.8z_2, \\
& y_3 + n_3 - \rho_3 = 11.6 + 10.8z_3, \\
& 10y_1 + 12y_2 + 15y_3 \geq 850, \\
& y_1 \leq \frac{x_{11}}{5}, y_1 \leq \frac{x_{12}}{3}, y_1 \leq x_{13}, \\
& y_2 \leq \frac{x_{21}}{7}, y_2 \leq \frac{x_{22}}{5}, y_2 \leq \frac{x_{23}}{2}, \\
& y_3 \leq \frac{x_{31}}{4}, y_3 \leq \frac{x_{32}}{6}, y_3 \leq x_{33}, \\
& x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 400, \\
& x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 380, \\
& x_{31} + x_{32} + x_{33} \leq 120, \\
& z_1 \in \{0, 1, 2\}, \\
& z_2 \in \{0, 1\}, \\
& z_3 \in \{0, 1\}.
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

جواب مدل بهینه (۳.۳) با استفاده از نرم افزار لینگو محاسبه و در جدول ۴ آمده است.

جدول ۴: جواب بهینه مدل با استفاده از روش کمترین مربعات فازی

مقدار	متغیر	مقدار	متغیر	مقدار	متغیر
۰/۹۳	n_3	۰	n_2	۰	n_1
۱۰/۶۶	y_3	۲۶/۸۶	y_2	۴۲/۸۵	y_1
۰	ρ_3	۹/۴۶	ρ_2	۱۰/۶۵	ρ_1
۰	z_3	۰	z_2	۰	z_1
۴۲/۸۵	x_{13}	۱۴۲/۸۵	x_{12}	۲۱۴/۲۸	x_{11}
۵۳/۷۳	x_{23}	۱۳۴/۳۴	x_{22}	۱۹۱/۹۱	x_{21}
۱۰/۶۶	x_{33}	۶۶/۶۶	x_{32}	۴۲/۶۶	x_{31}
				۰/۹۳	N

جدول ۵: مقایسه جواب به دست آمده از روش پیشنهادی و روش ارائه شده در [۴]

روش پیشنهادی (باینری)	روش پیشنهادی (کمترین مربعات)	روش ارائه شده در [۴]	
۴۲/۸۵	۴۲/۸۵	۵۲/۸	y_1
۲۶/۸۶	۲۶/۸۶	۱۴/۲	y_2
۱۰/۶۶	۱۰/۶۶	۱۰/۹	y_3
۰	۰	۱	z_1
۰	۰	۰	z_2
۱	۰	۱	z_3
۱	—	۱	z_4
۹۰۷/۲	۹۰۷/۲	۸۵۰/۵	سود

۴. نتیجه‌گیری

در این مقاله ابتدا به معرفی مسئله برنامه‌ریزی آرمانی در حالت قطعی پرداخته و سپس آن را به حالت فازی تعمیم دادیم. با در نظر گرفتن چندین انتخاب فازی برای هر آرمان، فرم معادلی

برای مسئله برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابه فازی در نظر گرفتیم. مدل جدید معرفی شده بدین صورت است که در سمت راست قیود آن، پارامترهای چندانتخابه فازی ظاهر می‌شوند، یعنی با یک مسئله برنامه‌ریزی چندانتخابه فازی مواجه هستیم. برای اینکه مسئله از حالت چندانتخابه فازی به مسئله برنامه‌ریزی فازی کلاسیک تبدیل شود؛ چندجمله‌ای فازی براساس پارامترهای چندانتخابه ساخته می‌شود. در این مقاله با معرفی چندجمله‌ای باینری فازی و روش کمترین مربعات خطی فازی این تبدیل را انجام می‌دهیم و در نهایت مدل حاصل را با درجه لزوم حداقل ۰/۸ حل می‌کنیم. در روش ارائه شده در [۴]، از مفهوم تابع عضویت اعداد فازی استفاده شده است؛ به این ترتیب که به هر آرمان فازی یک تابع عضویت نسبت داده می‌شود و با هدف مینیمم کردن مجموع تابع عضویت‌های مسئله، مدل جدیدی معرفی می‌شود که سمت راست قیود آن چندانتخابه است. مدل حاصل با استفاده از چندجمله‌ای باینری قطعی، از حالت چندانتخابه خارج و حل می‌شود. از مقایسه نتایج به‌دست‌آمده در جدول‌های ۳ و ۴ مشاهده می‌کنیم که جواب به‌دست‌آمده از دو روش به غیر از چند متغیر در بقیه پارامترها با هم برابر است. دلیل این برابری، بدین شرح است که تعداد پارامترهای چندانتخابه فازی در سمت راست قیود مسئله دو و سه پارامتر می‌باشد، اگر تعداد پارامترهای فازی زیاد شود جواب این دو روش با یکدیگر متفاوت خواهد بود. از این روش و جوابی که در مقاله [۴] ارائه شده، مشاهده می‌شود که مقدار $y_۲$ با استفاده از روش پیشنهادی نسبت به مقدار به‌دست‌آمده از روش قبلی بیشتر است. در جدول‌های ۳ و ۴ مقادیر $y_۱$، $y_۲$ و $y_۳$ به ترتیب برابر ۴۲/۸۵، ۲۶/۸۶ و ۱۰/۶۶ می‌باشند؛ در حالی که در روش ارائه شده در [۴]، مقادیر $y_۱$، $y_۲$ و $y_۳$ به ترتیب برابر ۵۲/۸، ۱۳/۲ و ۱۰/۹ هستند. این یعنی، با استفاده از روش پیشنهادی برای محصولات $y_۱$، $y_۲$ و $y_۳$ به ترتیب مشتری‌های B، E و F انتخاب شده‌اند در صورتی که در روش ارائه شده در مرجع [۴]، برای این سه محصول به ترتیب مشتری‌های B، D و F انتخاب گردیده‌اند. باید در نظر داشت که حداقل سود در نظر گرفته شده برای شرکت ۸۵۰ واحد است. اگر سود حاصل از روش این مقاله را با سود حاصل از روش ارائه شده در [۴] را از رابطه $۱۰y_۱ + ۱۲y_۲ + ۱۵y_۳$ به دست آوریم نتیجه می‌گیریم سود روش معرفی شده در این مقاله برابر با ۹۰۷/۷۲ و سود حاصل از روش ارائه شده در [۴] برابر ۸۵۰/۵ می‌باشد؛ یعنی با انتخاب مشتری E به جای مشتری D سود بیشتری نصیب شرکت خواهد شد، که این خود یکی از نقاط قوت روش معرفی شده در این مقاله می‌باشد.

مراجع

[1] Acharya, S., & Biswal, M. P. (2015). Application of multi-choice fuzzy linear programming problem to a garment manufacture company. Journal of Information and Optimization Sciences, 36(6), 569-593.

[2] Aggrawal, S., Sharma, U. (2013). Fully fuzzy multi-choice multi-objective linear programming solution via devition degree. International journal of pure and applied bioscience, 19(1), 49.

[3] Al Qahtani, H., El-Hefnawy, A. El-Ashram, M. M. & Fayomi A. (2019). A goal programming approach to multichoice multiobjective stochastic transoirtation problems with exterma value distribution. Advances in Operator Theory, 1-6.

[4] Bankian-Tabrizi, B., Shahanaghi, K., & Jabalameli, M. S. (2012). Fuzzy multi-choice goal programming. Applied Mathematical Modelling, 36(4), 1415-1420.

[5] Biswal, M. P., & Acharya, S. (2009). Multi-choice multi-objective linear programming problem. Journal of Interdisciplinary Mathematics, 12(5), 606-637.

[6] Biswal, M. P., & Acharya, S. (2009). Transformation of a multi-choice linear programming problem. Applied Mathematics and computation, 210(1), 182-188.

[7] Chang, C. T. (2007). Multi-choice goal programming. Omega, 35(4), 389-396.

[8] Chang, C. T. (2008). Revised multi-choice goal programming. Applied mathematical modelling, 32(12), 2587-2595.

[9] Charnes, A., & Cooper, W. W. (1957). Management models and industrial applications of linear programming. Management science, 4(1), 38-91.

[10] Hannan, E. L. (1985). An assessment of some criticisms of goal programming. Computers & Operations Research, 12(6), 525-541.

[11] Hannan, E. L. (1981). On fuzzy goal programming. Decision sciences, 12(3), 522-531.

[12] Keshteli, G. R.& Nasseri, S. H. (2020) A milti-parametric approach to solve flexible fuzzy multi-choice goal programming. Punjab University Journal of Mathematics, 51(12), 93-108.

[13] Lee, S. M. (1972). Goal programming for decision analysis. Publishers, Philadelphia.

[14] Narasimhan, R. (1980). Goal programming in a fuzzy environment. Decision sciences, 11(2), 325-336.

[15] Patro, K. K., Acharya, M. M., Biswal, M. P., & Acharya, S. (2015). Computation of a multi-choice goal programming problem. Applied Mathematics and Computation, 271, 489-501.

[16] Tamiz, M., Jones, D., & Romero, C. (1998). Goal programming for decision making: An overview of the current state-of-the-art. European Journal of operational research, 111(3), 569-581.

[17] Zimmermann, H. J. (1978). Fuzzy programming and linear programming with several objective functions. Fuzzy sets and systems, 1(1), 45-55.