سیستم های فازی و کاربردها
شاپای چاپی: ۲۷۱۷ـ۴۴۰۹
سال ششم، شماره دوم (پائیز و زمستان ۱۴۰۲)
شاپای الکترونیکی: ۲۷۱۷ـ۳۹۸۴
صص. ۱۳۳ تا ۱۴۸
DOI:10.22034/JFSA.2024.358027.1179

(f, g)ـ مشتقات در مشبکه‌های مانده

فرشته فروزش *
دانشکده ریاضیات و محاسبات نرم، گروه ریاضی، مجتمع آموزش عالی بم، ایران

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۴/۸ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۸/۱۴

نوع مقاله: علمی ـ پژوهشی

چکیده. در این مقاله، سه نوع $(f,\ g)$ـ مشتق؛ $(f,\ g)$ — مشتق‌های نوع یک، نوع دو و نوع سه را در مشبکه‌های مانده تعریف می‌کنیم. سپس به بررسی پاره‌ای از خواص و ویژگی‌های آنها می‌پردازیم. نشان می‌دهیم اگر d یک $(f,\ g)$ـ مشتق حافظ استلزام باشد، آنگاه d یکنواست. فرمولی برای $(f,\ g)$ـ مشتق nـ ام نوع یک ثابت کرده و در پایان، نشان می‌دهیم مجموعه همه $(f,\ g)$ـ مشتقهای حافظ $\odot$ روی مشبکه مانده L که با $Derp(L)$ نمایش داده می‌شود، یک نیمگروه است.

۱. مقدمه

مشبکه‌های مانده، ساختارهای جبری مهم و خیلی پایه‌ای هستند. در واقع آنها منصوب به منطق تکواره‌ای هول (ML) می‌باشند [۱۵] که پایه‌ای برای اکثریت منطق‌های فازی صوری هستند [۷].

مفهوم مشتق‌ها، از نظریه آنالیز گرفته می‌شود که به مطالعات ساختاری و ویژگی‌های سیستم‌های جبری کمک می‌کنند. در سال ۱۹۵۷ پوسنر [۱۳] مفهوم مشتقات در حلقه اول $(R,\ +,\ \cdot)$، را معرفی کرد که یک نگاشت $d : R \to R$ است که برای هر $x,\ y \in R$ در دو شرط زیر صدق می‌کند:

2010 *Mathematics Subject Classification.* 03B50, 03G25, 06D35

* Corresponding author
E-mail: frouzesh@bam.ac.ir .

عبارات و کلمات کلیدی. مشبکه‌های مانده، $(f,\ g)$ـ مشتق‌های (نوع یک، دو، سه).

$$d\left(x+y\right)=d\left(x\right)+d\left(y\right) \quad (۱)$$
$$d\left(x.y\right)=d\left(x\right).d(y) \quad (۲)$$

بر این اساس، چندین نویسنده [۱]، [۲]، [۳] مشتق‌ها در حلقه‌ها و حلقه‌های نزدیک را مطالعه کردند، تعریف های مشتق روی حلقه، باعث شد جون [۸] و دیگران مفهوم مشتق‌ها را در BCIـ جبرها معرفی کنند. سپس ماهیدین و دیگران [۱۰]، [۱۱] علاوه بر آن چندین نوع از مشتق‌های تعمیم یافته روی BCIـ جبرها را بررسی کردند و به نتایج جالبی دست پیدا کردند. همچنین بعضی از نویسندگان [۴]، [۱۶]، [۱۷] ویژگی‌های مشتق‌ها را برای مشبکه‌ها معرفی کردند. در حالت خاص، ایکسین و دیگران [۱۶] مفهوم مشتق‌ها در یک مشبکه $(L,\ \wedge,\ \vee)$ را معرفی کردند که نگاشت $d:L\rightarrow L$ است که برای هر $x,\ y\in L$ ، در شرط زیر صدق می‌کند:

$$d\left(x\wedge y\right)=\left(d(x)\wedge y\right)\vee\left(x\wedge d\left(y\right)\right)$$

و در پایان، هی و دیگران، مشتق در مشبکه‌های مانده را تعریف کردند و ساختاری برای بعضی از مشتق‌ها و مشتق ایده‌آل اصلی معرفی کردند و به مطالعه و بررسی ارتباط آنها با مشتق‌های الحاقی پرداختند [۶].
در این مقاله، به معرفی سه نوع (f,g)ـ مشتق در مشبکه‌های مانده می‌پردازیم و برخی از خواص آنها را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. راهی برای محاسبه (f,g)ـ مشتق n−ام نوع یک ارائه می‌دهیم. در پایان، ثابت می‌کنیم مجموعه همه $(f,\ g)$ـ مشتق‌های حافظ $\odot$ روی مشبکه مانده L که با $Derp(L)$ نمایش داده می‌شود، یک نیم‌گروه است.

۲. پیش‌نیازها

تعریف ۱.۲. ([۵]، [۱۵]) یک مشبکه مانده، یک جبر $(L,\ \wedge,\ \vee,\ \odot,\ \rightarrow,\ ۰,\ ۱)$ از نوع $(۲,\ ۲,\ ۲,\ ۲,\ ۰,\ ۰)$ است که دارای ویژگی‌های زیر می‌باشد:

(۱) $(L,\ \wedge,\ \vee,\ ۰,\ ۱)$ یک مشبکه کراندار است.

(۲) $(L,\ \odot,\ ۱)$ یک تکواره آبلی است.

(۳) $\odot$ و $\rightarrow$ یک جفت الحاقی هستند. یعنی $x\leq y\rightarrow z$ اگر و تنها اگر $x\odot y\leq z$، برای هر $x,\ y,\ z\in L$ که ترتیب القا شده توسط مشبکه است.

قرارداد: برای هر $x\in L$، قرار می‌دهیم $x^{*}=x\rightarrow ۰$.

گزاره ۲.۲. ([۵]، [۹]، [۱۴]) *در هر مشبکه مانده* $(L,\ \wedge,\ \vee,\ \odot,\ \rightarrow,\ ۰,\ ۱)$ *برای هر* $x,\ y \in L$ *و* $m,\ n \geq ۱$ *شرایط زیر برقرارند:*

(۱) $x \rightarrow ۱ = ۱$ *و* $۱ \rightarrow x = x$.

(۲) $x \leq y$ *اگر وتنها اگر* $x \rightarrow y = ۱$.

(۳) $x \odot x^* = ۰$، $x \odot y = ۰$ *اگر و تنها اگر* $x \leq y^*$.

(۴) $x \odot (y \vee z) = (x \odot y) \vee (x \odot z)$.

(۵) *اگر* $x \leq y$ *آنگاه* $y^* \leq x^*$.

قرارداد: مجموعه عضوهای متمم مشبکه مانده L *را با* $B(L)$ *نشان می‌دهیم.*

تعریف ۳.۲. [۵] فرض کنید $(L,\ \wedge,\ \vee,\ \odot,\ \rightarrow,\ ۰,\ ۱)$ یک مشبکه مانده باشد. مجموعه ناتهی F از L را یک فیلتر از L گوییم، اگر در شرایط زیر صدق کند:

(۱) اگر $x,\ y \in F$، آنگاه $x \odot y \in F$.

(۲) اگر $y \in L$، $x \in F$ و $x \leq y$، آنگاه $y \in F$.

مجموعه همه‌ی فیلترهای $(L,\ \wedge,\ \vee,\ \odot,\ \rightarrow,\ ۰,\ ۱)$ را با نماد $F[L]$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۴.۲. [۱۲] فرض کنید $(L,\ \wedge,\ \vee,\ \odot,\ \rightarrow,\ ۰,\ ۱)$ یک مشبکه مانده باشد. اگر X یک مجموعه ناتهی از L باشد، آنگاه فیلتر تولید شده توسط X را با $\langle X\rangle$ نمایش می‌دهیم که برابر است با کوچکترین فیلتر شامل X یا به عبارت دیگر

$$\langle X\rangle = \bigcap\{F|\ \ F \in F\,[L]\,,\ X \subseteq F\}.$$

تعریف ۵.۲. [۱۶] فرض کنید $(L,\ \wedge,\ \vee)$ یک مشبکه باشد. نگاشت $d : L \rightarrow L$ یک مشتق روی L نامیده می‌شود اگر برای هر $x,\ y \in L$ در شرط زیر صدق کند:

$$d\,(x \wedge y) = (d(x) \wedge y) \vee (x \wedge d\,(y))$$

تعریف ۶.۲. [۱۶] یک مشتق d روی مشبکه L یکنوا نامیده می‌شود هرگاه $x \leq y$ نتیجه دهد $d(x) \leq d(y)$، برای هر $x,\ y \in L$.

تعریف ۷.۲. [۶] فرض کنید $(L,\ \wedge,\ \vee,\ \odot,\ \rightarrow,\ ۰,\ ۱)$ یک مشبکه مانده باشد. نگاشت $d : L \rightarrow L$ یک مشتق ضربی در L نامیده می‌شود ، اگر برای هر $x,\ y \in L$ در شرط زیر صدق کند:

$$d\,(x \odot y) = (d(x) \odot y) \vee (x \odot d\,(y))$$

۳. (f, g)ـ مشتقات در مشبکه‌های مانده

در این بخش، همه جا L یک مشبکه مانده است.

تعریف ۱.۳. فرض کنید L یک مشبکه مانده باشد و $f,\ g : L \to L$ دو همریختی باشند. یک تابع $d : L \to L$ برای هر $x,\ y \in L$،

(۱) یک $(f,\ g)$ـ مشتق از نوع یک می‌گوییم، اگر

$$d\,(x \odot y) = (d\,(x) \odot f\,(y)) \vee (g\,(x) \odot d\,(y)).$$

(۲) یک $(f,\ g)$ـ مشتق از نوع دو می‌گوییم، اگر

$$d\,(x \wedge y) = (d\,(x) \wedge f\,(y)) \vee (g\,(x) \wedge d\,(y))$$

(۳) یک $(f,\ g)$ـ مشتق از نوع سه می‌گوییم، اگر

$$d\,(x \to y) = (d\,(x) \to f\,(y)) \vee (g\,(x) \to d\,(y))$$

در تعریف بالا، اگر تابع g برابرتابع f باشد، سپس به آنها به ترتیب یک fـ مشتق از نوع یک، دو و سه می‌گوییم .

بوضوح، اگر تابعهای f و g را تابعهای همانی انتخاب می‌کنیم، آنگاه $(f,\ g)$ـ مشتق d از نوع یک، دو، سه، به ترتیب، مشتق جزئی، مشتق مشبکه‌ای و مشتق استلزامی نامیده می‌شود.

مثال ۲.۳. فرض کنید $L = \{۰,\ a,\ b,\ c, ۱\}$ و عملهای $\odot$ و $\to$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$\to$	۰	a	b	c	۱
۰	۱	۱	۱	۱	۱
a	b	۱	b	۱	۱
b	a	a	۱	۱	۱
c	۰	a	b	۱	۱
۱	۰	a	b	c	۱

$\odot$	۰	a	b	c	۱
۰	۰	۰	۰	۰	۰
a	۰	a	۰	a	a
b	۰	۰	b	b	b
c	۰	a	b	c	c
۱	۰	a	b	c	۱

بنابراین L یک مشبکه مانده خودتوان است [۱۲]. فرض کنید $f(x)$ همریختی همانی باشد و

$g(x)$ و $d(x)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$g\left(x\right)=\begin{cases} ۰ & x=۰,\ a \\ ۱ & x=b,\ c,\ ۱ \end{cases}$$

و

$$d\left(x\right)=\begin{cases} a & x=۰,\ a \\ ۱ & x=b,\ ۱ \\ c & x=c \end{cases}$$

از آنجایی که

$$a=d\left(a\odot ۰\right)\neq\left(a\odot ۰\right)\vee\left(۰\odot a\right)=۰$$

لذا d یک $(f,\ g)$ـ مشتق از نوع یک نیست. همچنین، d، $(f,\ g)$ـ مشتق از نوع دو نمی‌باشد زیرا

$$۱=d\left(b\wedge c\right)\neq\left(d\left(b\right)\wedge f\left(c\right)\right)\vee\left(g\left(b\right)\wedge d\left(c\right)\right)=c$$

و d یک $(f,\ g)$ـ مشتق از نوع سه نیست زیرا

$$۱=d\left(b\rightarrow c\right)\neq\left(۱\rightarrow c\right)\vee\left(۱\rightarrow c\right)=c$$

مثال ۳.۳. اگر $L=\{۰,\ a,\ b,\ ۱\}$، یک زنجیر و عمل‌های $\odot$ و $\rightarrow$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$\odot$	۰	a	b	۱
۰	۰	۰	۰	۰
a	۰	۰	a	a
b	۰	a	b	b
۱	۰	a	b	۱

$\rightarrow$	۰	a	b	۱
۰	۱	۱	۱	۱
a	a	۱	۱	۱
b	۰	a	۱	۱
۱	۰	a	b	۱

پس $(L,\ \wedge,\ \vee,\ \odot,\ \rightarrow,\ ۰,\ ۱)$ یک مشبکه مانده است که در اینجا $x\wedge y=\min\{x,\ y\}$ و $x\vee y=\max\{x,\ y\}$ برای هر $x,\ y\in L$ باشد [۱۲]. اگر f همریختی همانی باشد و $g(x)$ و $d_۱(x)$ و $d_۲(x)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$g\left(x\right)=\begin{cases} ۰ & x=۰,\ a \\ ۱ & x=b,\ ۱ \end{cases}$$

$$d_۱(x) = \begin{cases} ۰ & x = ۰,\ a \\ a & x = b,\ ۱ \end{cases}$$

$$d_۲(x) = \begin{cases} a & x = a \\ ۰ & x = ۰ \\ ۱ & x = ۱,\ b \end{cases}$$

آنگاه $d_۱$ یک $(f,\ g)$ــ مشتق از نوع یک و دو است امّا یک $(f,\ g)$ــ مشتق از نوع سه نیست زیرا

$$a = d_۱(a \to b) \neq (d_۱(a) \to f(b)) \vee (g(a) \to d_۱(b)) = ۱$$

ولی $d_۲$، $(f,\ g)$ــ مشتق از نوع یک، دو و سه است.

قضیه ۴.۳. *اگر d یک $(f,\ g)$ــ مشتق از نوع یک روی L باشد، لذا روابط زیر برقرار است:*

(۱) $d(۰) = ۰$،

(۲) $d(x) \odot f(x^*) = g(x) \odot d(x^*) = f(x) \odot d(x^*) = g(x^*) \odot d(x) = ۰$

(۳) $f(x)^*,\ g(x)^* \leq d(x)^*$

(۴) $d(x) = d(x) \vee (d(۱) \odot f(x))$ و

$$d(x) = d(x) \vee (g(x) \odot d(۱)).$$

اثبات. (۱) طبق تعریف (۱.۳) (۱)، برای هر $x, y \in L$ داریم:

$$\boldsymbol{d(۰) = d(۰ \odot ۰) = (d(۰) \odot f(۰)) \vee (g(۰) \odot d(۰)) = ۰}$$

(۲) بنا به قسمت (۱) و تعریف (۱.۳)، داریم:

$$\boldsymbol{۰ = d(۰) = d(x \odot x^*) = (\ d(x) \odot f(x^*)\ ) \vee (g(x) \odot d(x^*))}$$

آنگاه $g(x) \odot d(x^*) = ۰$ و $d(x) \odot f(x^*) = ۰$. به همین ترتیب ثابت می‌شود که اگر

$$\boldsymbol{۰ = d(۰) = d(x^* \odot x) = (\ d(x^*) \odot f(x)\ ) \vee (g(x^*) \odot d(x))}$$

آنگاه $d(x^*) \odot f(x) = ۰$ و

$$g(x^*) \odot d(x) = ۰$$

(۳) چون f و g همریختی هستند بنا به قسمت (۲)، داریم:

$$d\left(x\right)\odot f\left(x\right)^{*}=d\left(x\right)\odot g\left(x\right)^{*}=۰$$

آنگاه بنا به گزاره ۲.۲داریم $g(x)^{*}\leq d(x)^{*}$ و $f(x)^{*}\leq d(x)^{*}$

(۴) طبق تعریف (۱.۳)، داریم:

$$d\left(x\right)=d\left(x\odot ۱\right)$$

$$=\left(d\left(x\right)\odot f\left(۱\right)\right)\vee\left(g\left(x\right)\odot d\left(۱\right)\right)$$

$$=d\left(x\right)\vee\left(g\left(x\right)\odot d\left(۱\right)\right)$$

همچنین بطور مشابه، داریم:

$$d\left(x\right)=d\left(۱\odot x\right)$$

$$=\left(d\left(۱\right)\odot f\left(x\right)\right)\vee\left(g\left(۱\right)\odot d\left(x\right)\right)$$

$$=\left(d\left(۱\right)\odot f\left(x\right)\right)\vee d\left(x\right).$$

□

قضیه ۵.۳. *اگر d یک $(f,\ g)$ـ مشتق از نوع یک باشد و $x,\ y\ \in L$ به قسمی که $x\leq y$، آنگاه خواص زیر برقرار است:*

(۱) $d\left(y^{*}\odot x\right)=۰$،

(۲) $f(y)^{*},\ g(y)^{*}\leq d(x)^{*}$ و $d\left(y^{*}\right)\leq f\left(x\right)^{*},\ g(x)^{*}$.

اثبات. (۱) طبق فرض داریم $x\leq y$، آنگاه $y^{*}\leq x^{*}$، در نتیجه بنا به قسمت (۲) گزاره (۲) ، داریم $y^{*}\odot x=۰$، آنگاه

$$d\left(y^{*}\odot x\right)=d\left(۰\right)=۰.$$

(۲) براساس قسمت (۱)، داریم

$$۰=d\left(y^{*}\odot x\right)=\left(d\left(y^{*}\right)\odot f\left(x\right)\right)\vee\left(g\left(y^{*}\right)\odot d\left(x\right)\right).$$

آنگاه $d(y^*) \odot f(x) = g(y^*) \odot d(x) = ۰$ آنگاه طبق گزاره (۲) قسمت (۳)، داریم $d(y^*) \leq f(x)^*$ و $g(y)^* \leq d(x)^*$. در ادامه داریم:

$$۰ = d(x \odot y^*) = (d(x) \odot f(y^*)) \vee (g(x) \odot d(y^*))$$

آنگاه $g(x) \odot d(y^*) = ۰$ و $g(x) \odot f(y^*) = ۰$. آنگاه طبق گزاره (۲) قسمت (۳)، داریم: $f(y^*) \leq d(x)^*$ و $d(y^*) \leq g(x)^*$.

□

تعریف ۶.۳. اگر L یک مشبکه مانده باشد، یک تابع $f : L \to L$ را

- حافظ$\vee$ گوییم اگر $f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$.
- حافظ استلزام گوییم اگر

$$f(x \to y) = f(x) \to f(y).$$

- حافظ$\odot$ گوییم اگر

$$f(x \odot y) = f(x) \odot f(y).$$

گزاره ۷.۳. *فرض کنید d یک (f, g)ـ مشتق از نوع یک روی L باشد. اگر $d(x^*) = d(x)$ برای هر $x \in L$، آنگاه شرایط زیر برقرارند:*

(۱) $d(۱) = ۰$.

(۲) $d(x) \odot f(x^*) = ۰$ و $d(x^*) \odot g(x) = ۰$.

(۳) *اگر d همنوا باشد، آنگاه داریم* $d = ۰$.

اثبات. (۱) بنا به قضیه (۴.۳)، داریم

$$d(۱) = d(۰^*) = d(۰) = ۰$$

(۲) داریم

$$\boldsymbol{۰ = d(۰) = d(x \odot x^*) = (d(x) \odot f(x^*)) \vee (g(x) \odot d(x^*))}$$

در نتیجه $d(x) \odot f(x^*) = ۰$ و $d(x^*) \odot g(x) = ۰$.

(۳) چون $x \leq ۱$ برای هر $x \in L$ و d همنوا، داریم $d\left(x\right) \leq d\left(۱\right) = ۰$ برای هر $x \in L$، بنابراین $d = ۰$.

□

قضیه ۸.۳. *اگر d یک $(f,\ g)$ـ مشتق از نوع یک باشد. آنگاه برای $n > ۱$،*

$$\boldsymbol{d\left(x^{n}\right) = d\left(x\right) \odot \left[f\left(x^{n-۱}\right) \vee g\left(x^{n-۱}\right) \vee \left(f\left(x\right) \odot g\left(x^{n-۲}\right)\right)\right.}$$
$$\boldsymbol{\left.\vee \left(g\left(x^{n-۳}\right) \odot f\left(x^{۲}\right)\right) \vee \cdots \vee \left(f\left(x^{n-۲}\right) \odot g\left(x\right)\right)\right.}.$$

اثبات. با استفاده از استقرای ریاضی برای $n = ۲$ بدست می‌آوریم. بنا به (۱) تعریف (۱.۳) و بنا به (۴) گزاره (۲)، داریم

$$d\left(x^{۲}\right) = d\left(x \odot x\right)$$
$$= \left(d\left(x\right) \odot f\left(x\right)\right) \vee \left(g\left(x\right) \odot d\left(x\right)\right)$$
$$= d(x) \odot \left(f\left(x\right) \vee g\left(x\right)\right)$$

حال فرض کنید حکم برای $n - ۱$ برقرار باشد در این صورت بنا به (۱) تعریف (۱.۳) و (۴) گزاره (۲) ، داریم:

$$d\left(x^{n}\right) = d\left(x^{n-۱} \odot x\right)$$
$$= \left(d\left(x^{n-۱}\right) \odot f\left(x\right)\right) \vee \left(g\left(x^{n-۱}\right) \odot d\left(x\right)\right)$$
$$= \left(\left(d\left(x\right) \odot \left(f\left(x^{n-۲}\right) \vee g\left(x^{n-۲}\right) \vee\right.\right.\right.$$
$$\left(f\left(x\right) \odot g\left(x^{n-۳}\right)\right) \vee \cdots \vee \left(g\left(x^{n-۴}\right) \odot f\left(x^{۲}\right)\right)$$
$$\left.\left.\left.\vee \left(f\left(x^{n-۳}\right) \odot g\left(x\right)\right)\right)\right) \odot f\left(x\right)\right) \vee \left(g\left(x^{n-۱}\right) \odot d\left(x\right)\right)$$
$$= d\left(x\right) \odot [\ f\left(x^{n-۱}\right) \vee \left(g\left(x^{n-۲}\right) \odot f\left(x\right)\right)$$
$$\vee \left(f\left(x^{۲}\right) \odot g\left(x^{n-۳}\right)\right) \vee \cdots$$
$$\cdots \vee \left(g\left(x^{n-۴}\right) \odot f\left(x^{۳}\right)\right) \vee \left(f\left(x^{n-۲}\right) \odot g\left(x\right)\right) \vee g\left(x^{n-۱}\right)$$

بنابراین حکم ثابت می‌شود. □

قضیه ۹.۳. *فرض کنید $d(۱) \neq ۱$ و d یک $(f,\ g)$ـ مشتق حافظ استلزام از نوع سه روی L باشد که مرتب خطی نیز می‌باشد. آنگاه $d(۱) \leq d(x)$.*

اثبات. چون $۱ \neq d(۱)$، لذا بنا به تعریف (۶.۳)، داریم

$$d\,(۱) = d\,(x \rightarrow ۱) = d(x) \rightarrow d(۱).(*)$$

چون L مرتب خطی است، آنگاه $d(x) \leq d(۱)$ یا $d(۱) \leq d(x)$. اگر $d(x) \leq d(۱)$ آنگاه داریم $d\,(x) \rightarrow d\,(۱) = ۱$ لذا طبق (*) داریم $d\,(۱) = ۱$ و این تناقض است. در نتیجه $d(۱) \leq d(x)$. لذا $d\,(۱) \rightarrow d\,(x) = ۱$. بنابراین $d(۱) \leq d(x)$. □

گزاره ۱۰.۳. *اگر d یک $(f,\ g)$ـ مشتق حافظ استلزام باشد، آنگاه d یکنواست.*

اثبات. فرض کنید $x \leq y$، لذا $x \rightarrow y = ۱$. چون d حافظ استلزام است لذا خواهیم داشت

$$۱ = d\,(۱) = d\,(x \rightarrow y) = d(x) \rightarrow d(y).$$

در نتیجه $d(x) \leq d(y)$. بنابراین d یکنواست. □

قضیه ۱۱.۳. *فرض کنید d یک $(f,\ g)$ـ مشتق از نوع سه باشد. آنگاه شرایط زیر برقرارند:*

(۱) $d\,(۱) = ۱$ و $d(۰) \geq d(۱)^*$.

(۲) $g(x) \leq d(x)$ یا $d(x) \leq f(x)$.

(۳) $d(x^*) \geq g(x) \rightarrow d(۰)$.

(۴) $d(x) \geq f(x)$.

اثبات. (۱) بنا به گزاره ۲.۲ (۱) و تعریف (۱.۳) (۱) داریم:

$$d\,(۱) = d\,(۱ \rightarrow ۱) = (d\,(۱) \rightarrow f\,(۱)) \vee (g\,(۱) \rightarrow d\,(۱)) = ۱ \vee d\,(۱) = ۱$$

همچنین بنا به گزاره ۲.۲ (۱) و تعریف ۲.۲ (۱)، داریم:

$$d\,(۰) = d\,(۱ \rightarrow ۰) = (d\,(۱) \rightarrow f\,(۰)) \vee (g\,(۱) \rightarrow d\,(۰)) = d(۱)^* \vee d\,(۰)$$

بنابراین داریم $d(۰) \geq d(۱)^*$.

(۲) بنا به قسمت (۱) و گزاره ۲.۲ (۲)، داریم:

$$۱ = d\,(۱) = d\,(x \rightarrow x) = (d\,(x) \rightarrow f\,(x)) \vee (g\,(x) \rightarrow d\,(x))$$

آنگاه داریم $d\,(x) \rightarrow f\,(x) = ۱$ یا $g\,(x) \rightarrow d\,(x) = ۱$، لذا بنا به گزاره ۲.۲ (۲)، داریم $g(x) \leq d(x)$ یا $d(x) \leq f(x)$.

(۳) بنا به تعریف (۱.۳) (۳)، داریم:

$$\begin{aligned} d\left(x^{*}\right) &= d\left(x \rightarrow ۰\right) \\ &= \left(d\left(x\right) \rightarrow f\left(۰\right)\right) \vee \left(g\left(x\right) \rightarrow d\left(۰\right)\right) \\ &= d\left(x\right)^{*} \vee \left(g\left(x\right) \rightarrow d\left(۰\right)\right) \end{aligned}$$

(۴) بنا به گزاره ۲.۲ (۱) و قسمت (۱) داریم:

$$\begin{aligned} d\left(x\right) &= d\left(۱ \rightarrow x\right) \\ &= \left(d\left(۱\right) \rightarrow f\left(x\right)\right) \vee \left(g\left(۱\right) \rightarrow d\left(x\right)\right) \\ &= \left(d\left(۱\right) \rightarrow f\left(x\right)\right) \vee d\left(x\right). \end{aligned}$$

آنگاه داریم

$$d\left(x\right) \geq d\left(۱\right) \rightarrow f\left(x\right) = ۱ \rightarrow f\left(x\right) = f\left(x\right).$$

□

ملاحظه ۱۲.۳. فرض کنید F یک فیلتر از L و $f : L \rightarrow L$ یکریختی باشد، آنگاه $f(F)$ یک فیلتر از L است [۳].

گزاره ۱۳.۳. *فرض کنید d یک $(f,\ g)$ـ مشتق روی L باشد به قسمی که f و g یکریختی باشند و F یک فیلتر از L باشد، آنگاه*

$$d(F) \subseteq f(F).$$

اثبات. اگر $y \in d(F)$، آنگاه $x \in F$ وجود دارد به قسمی که $y = d(x)$. حال بنا به قضیه (۱۱.۳) (۴)، داریم $f\left(x\right) \leq d\left(x\right) = y$ و $f(x) \in f(F)$ و بنا به نکته قبل $f(F)$ یک فیلتر است لذا خواهیم داشت $y \in f(F)$، بنابراین $d(F) \subseteq f(F)$. □

گزاره ۱۴.۳. *اگر d یک $(f,\ g)$ـ مشتق از نوع سه باشد و $d\left(x^{*}\right) = d(x)$ برای هر $x \in L$، آنگاه شرایط زیر برقرارند:*

(۱) $d\left(۰\right) = ۱$.

(۲) *اگر d یکنوا باشد، آنگاه* $d = ۱$.

اثبات. (۱) داریم $d(\text{۰}) = d(\text{۱}^*) = d(\text{۱}) = \text{۱}$.

(۲) چون $\text{۰} \leq x$ برای هر $x \in L$ و d یکنواست، لذا $\text{۱} = d(\text{۰}) \leq d(x)$، برای هر $x \in L$. بنابراین $d = \text{۱}$.

□

قضیه ۱۵.۳. *فرض کنید d یک $(f,\ g)$ـ مشتق از نوع سه باشد به قسمی که $x \leq y$ برای هر $x,\ y \in L$، شرایط زیر برقرارند:*

(۱) $d(x \to y) = \text{۱}$.

(۲) $d(x) \leq f(y)$ یا $g(x) \leq d(y)$.

(۳) $d(y^*) \leq f(x^*)$ یا $g(y^*) \leq d(x^*)$.

اثبات. (۱) چون $x \leq y$، آنگاه $x \to y = \text{۱}$ و لذا خواهیم داشت $d(x \to y) = d(\text{۱}) = \text{۱}$.

(۲) بنا به قسمت (۱) و تعریف (۱.۳) (۳)، داریم:

$$\text{۱} = d(x \to y) = (d(x) \to f(y)) \vee (g(x) \to d(y)).$$

لذا $d(x) \to f(y) = \text{۱}$ یا $g(x) \to d(y) = \text{۱}$. در نتیجه $d(x) \leq f(y)$ یا $g(x) \leq d(y)$.

(۳) چون $x \leq y$، پس بنا به گزاره ۲.۲ (۵)، $y^* \leq x^*$ و در نتیجه $y^* \to x^* = \text{۱}$ و بنابراین داریم:

$$\text{۱} = d(\text{۱}) = d(y^* \to x^*) = (d(y^*) \to f(x^*)) \vee (g(y^*) \to d(x^*)).$$

در نتیجه داریم $d(y^*) \leq f(x^*)$ یا $g(y^*) \leq d(x^*)$.

□

مجموعه همه $(f,\ g)$ـ مشتقهای حافظ$\odot$ روی L را با $Derp(L)$ نمایش می‌دهیم و برای هر $d,\ d' \in Derp(L)$ عمل دوتایی $\bullet$ را به صورت $d \bullet d'(x) = d(x) \odot d'(x)$ تعریف می‌کنیم.

قضیه ۱۶.۳. *$(\mathrm{Derp}(\mathrm{L}),\ \bullet)$ یک نیم گروه است.*

اثبات. فرض کنید d و d' دو $(f,\ g)$ـ مشتق حافظ$\odot$ از L باشند. ثابت می‌کنیم $d \bullet d'$ نیز یک $(f,\ g)$ـ مشتق حافظ$\odot$ است. برای هر $x,\ y \in L$ و بنا به تعریف داریم:

$$d \bullet d' \,(x \odot y) = d\,(x \odot y) \odot d'\,(x \odot y)$$

$$= d\,(x) \odot d\,(y) \odot d'\,(x) \odot d'\,(y)$$

$$= d \bullet d'\,(x) \odot d \bullet d'\,(y)$$

بنابراین $d \bullet d'$ یک $(f,\ g)$ـ مشتق حافظ$\odot$ از L می‌باشد. فرض کنید $d,\ d',\ d'' \in Derp(L)$، ویژگی شرکت پذیری را ثابت می‌کنیم یعنی $d \bullet (d' \bullet d'') = (d \bullet d') \bullet d''$. اگر $x,\ y \in L$، آنگاه بنا به قرارداد و تعریف داریم:

$$(d \bullet (d' \bullet d''))(x \odot y) = d(x \odot y) \odot (d' \bullet d'')(x \odot y)$$

$$= (d\,(x) \odot d\,(y)) \odot \big(d'\,(x \odot y) \odot d''\,(x \odot y)\big)$$

$$= (d\,(x) \odot d\,(y)) \odot \Big(\big(d'\,(x) \odot d'\,(y)\big) \odot \big(d''\,(x) \odot d''\,(y)\big)\Big)$$

$$= \Big((d\,(x) \odot d\,(y)) \odot \big(d'\,(x) \odot d'\,(y)\big)\Big) \odot \big(d''\,(x) \odot d''\,(y)\big)$$

$$= \big(d\,(x \odot y) \odot d'\,(x \odot y)\big) \odot d''\,(x \odot y)$$

$$= d \bullet d'\,(x \odot y) \odot d''\,(x \odot y)$$

$$= \big((d \bullet d') \bullet d''\big)\,(x \odot y)$$

بنابراین $(\mathrm{Derp}\,(\mathrm{L})\,,\ \bullet)$ یک نیم گروه است. $\square$

گزاره ۱۷.۳. *فرض کنید d یک $(f,\ g)$ـ مشتق حافظ$\vee$ ناصفر از نوع یک باشد. آنگاه $d(B\,(L)) \subseteq B(L)$.*

اثبات. فرض کنید که $y \in d(B\,(L))$. آنگاه وجود دارد یک $x \in B(L)$ به قسمی که $y = d(x)$، همچنین

$$y \vee y = d\,(x) \vee d\,(x) = d\,(x \vee x) = d\,(x) = y.$$

بنابراین $y \in B(L)$. $\square$

قضیه ۱۸.۳. *فرض کنید d یک $(f,\ g)$ـ مشتق حافظ$\vee$ از نوع یک در مشبکه مانده بولی مرتب خطی L باشد. آنگاه $d = ۰$ یا $d\,(۱) = ۱$.*

اثبات. فرض کنید d یک $(f,\ g)$ـ مشتق حافظ$\vee$ از نوع یک باشد و $d\,(۱) \neq ۱$. آنگاه برای هر $x \in L$، داریم:

$$d\,(۱) = d\,(x \vee x^{*}) = d(x) \vee d(x^{*}).$$

آنگاه $d\,(x) = d(۱)$ یا $d\,(x^{*}) = d(۱)$ برای هر $x \in L$. حالت (۱). اگر برای هر $x \in L$، $d\,(x) = d(۱)$ باشد، قرار می‌دهیم $x = ۰$ نتیجه می‌دهد $d(۱) \neq ۱$ $۰ = d\,(۰) =$ آنگاه $d\,(۱) = ۰$. از طرفی داریم $۰ = d\,(۱) = d\,(x \vee ۱) = d(x) \vee d(۱)$. لذا $d\,(x) = ۰$ برای هر $x \in L$، بنابراین $d = ۰$

حالت (۲). اگر برای هر $x \in L$، $d\,(x^{*}) = d(۱)$ باشد، قرار می‌دهیم $x = ۱$، نتیجه می‌دهد $d(۱) = d\,(۱^{*}) = d\,(۰) = ۰$. در این صورت داریم $d\,(۱) = ۰$ و مشابه حالت (۱) نتیجه می‌گیریم $d = ۰$. $\square$

قضیه ۱۹.۳. *فرض کنید L یک مشبکه مانده مرتب خطی بولی باشد و g یک تابع همانی روی آن باشد همچنین فرض کنید $d_۱$ و $d_۲$ یک $(f,\ g)$ـ مشتق حافظ$\vee$ روی L باشد اگر $d_۱ d_۲ = ۰$ آنگاه $d_۱ = ۰$ یا $d_۲ = ۰$.*

اثبات. فرض کنید $d_۱ d_۲ = ۰$ و $d_۲ \neq ۰$. آنگاه بنا به قضیه (۴.۳) و قضیه (۱۸.۳)، برای هر $x \in L$ داریم:

$$\begin{aligned} d_۱ d_۲\,(x) &= d_۱\,(d_۲\,(x)) \\ &= d_۱(d_۲(x) \vee (g\,(x) \odot d_۲\,(۱))) \\ &= d_۱ d_۲\,(x) \vee d_۱\,(g\,(x) \odot d_۲\,(۱)) \\ &= d_۱ d_۲\,(x) \vee (d_۱\,(g\,(x) \odot ۱)) \\ &= d_۱(g\,(x)) \end{aligned}$$

پس $d_۱\,(g\,(x)) = ۰$ برای هر $x \in L$، از اینرو چون g همانی است پس $d_۱\,(x) = ۰$ برای هر $x \in L$، بنابراین $d_۱ = ۰$. $\square$

قضیه ۲۰.۳. *فرض کنید d یک $(f,\ g)$ـ مشتق حافظ$\vee$ ناصفر از نوع یک روی مشبکه مرتب خطی بولی L باشد. آنگاه*

$$d(x^{۲}) \leq d(x)^{۲}.$$

اثبات. بنا به قضیه (۴.۳) (۴)، داریم $d\left(x\right)=d(x)\vee\left(g\left(x\right)\odot d\left(۱\right)\right)$ و $d\left(x\right)=d(x)\vee\left(f\left(x\right)\odot d\left(۱\right)\right)$، بنا به قضیه (۱۸.۳)، چون $d\neq ۰$، لذا $d\left(۱\right)=۱$. بنابراین $d\left(x\right)=d(x)\vee g\left(x\right)$ و $d\left(x\right)=d(x)\vee f\left(x\right)$ لذا نتیجه می‌شود $f(x)\leq d(x)$, $g\left(x\right)$. آنگاه بنا به تعریف (۱.۳) (۱)، داریم:

$$d\left(x^{۲}\right)=d\left(x\odot x\right)=\left(d\left(x\right)\odot f\left(x\right)\right)\vee\left(g\left(x\right)\odot d\left(x\right)\right)$$

$$\left(d\left(x\right)\odot d\left(x\right)\right)\vee\left(d\left(x\right)\odot d\left(x\right)\right)$$

$$=\left(d\left(x\right)\odot d\left(x\right)\right)$$

$$=d(x)^{۲}$$

□

قضیه ۲۱.۳. *فرض کنید d یک $(f,\ g)$ــ مشتق حافظ$\vee$ ناصفر و یکنوا در مشبکه مرتب خطی بولی L باشد به قسمی که یکی از توابع f یا g، مقدار ثابت ۱ باشد. آنگاه $d^{-۱}\left(۱\right)=\{x\in L|\ d\left(x\right)=۱\}$ یک فیلتر از L است.*

اثبات. بنا به قضیه (۱۸.۳)، چون $d\neq ۰$ در نتیجه $d\left(۱\right)=۱$ بنابراین $۱\in d^{-۱}\left(۱\right)$. حال، فرض کنید $x,\ y\in d^{-۱}\left(۱\right)$ باشد، آنگاه $d\left(x\right)=۱$ و $d\left(y\right)=۱$. از اینرو بنا به تعریف (۱.۳) (۱)، داریم:

$$d\left(x\odot y\right)=\left(d\left(x\right)\odot f\left(y\right)\right)\vee\left(g\left(x\right)\odot d\left(y\right)\right)$$

$$=f\left(y\right)\vee g\left(x\right)$$

$$=۱$$

آنگاه داریم $d\left(x\odot y\right)=۱$ و آنگاه $۱\in d^{-۱}\left(x\odot y\right)$ و اگر $x\leq y$ و $x\in d^{-۱}\left(۱\right)$، در این صورت داریم $d(x)\leq d(y)$ و $d\left(x\right)=۱$، آنگاه داریم $d\left(y\right)=۱$. بنابراین $y\in d^{-۱}\left(۱\right)$. □

تشکر و قدردانی

در اینجا بر خود لازم می دانم که از زحمات تمامی داوران تشکر و قدردانی نمایم.

مراجع

[1] E. Albas, On ideals and orthogonal gerneralized dervations of semiprime ring, Math. J. Okayama Univ, Vol. 49, pp. 53-58, (2007).

[2] H. E. Bell, L. C. Kappe, *Rings in which derivations satisfy certain algebraic conditions*, Acta Math. Hung, Vol. 53, pp. 339-346, (1989).

[3] H. E. Bell, G. Mason, On derivations in near-rings and near-fields, North-Holl. Math. Stud., Vol. 137, pp. 31-35, (1987).

[4] Y. Ceven, M. A. Ozturk, On f-derivations of lattices, Bull. Korean Math. Soc., Vol. 45, pp. 701-707, (2008).

[5] P. Hajek, Metamathematics of Fuzzy Logic, Trends in Logic-Siudia Logica Library, vol. 4, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, (1998).

[6] P. He, X. Xin, J. Zhan, On derivations and their fixed point sets in residuated lattices, Fuzzy Sets Syst, Vol. 303, pp. 97-113, (2016).

[7] U. Hohle, Commutative, residuated l-monoids, in: U. Hohle, E. Klement (Eds). Non-Classical Logics and Their Applications to Fuzzy Subset, Kluwer, Dordrecht, pp. 53-106, (1995).

[8] Y. B. Jun, X. L. Xin, On derivations of BCL-algebras, Inf. Sci., Vol. 159, pp. 167-176, (2004).

[9] T. Kowalski, H. Ono, Residuated Lattices:An Algebraic Glimpse at Logic Without Contraction, (2001).

[10] G. Muhiuddin, A. M. Al-Roqi, On generalized left derivations in BCI-algebras, Appl. Math. Inf. Sci., Vol. 8, pp. 1153-1158, (2014).

[11] G. Muhiuddin, A. M. Al-Roqi, Y. B. Jun, Y. Ceven, On symmetric left bi-derivations in BCI-algebras, Int. J. Math. Sci., Vol. 2013, pp. 238-490, (2013).

[12] D. Piciu, Algebras of Fuzzy Logic, Ed. Universitaria, Craiova, (2007).

[13] E. Posner, Derivations in prime rings, Proc. Am. Math. Soc, Vol. 8, pp. 1093-1100, (1957).

[14] E. Turunen, Mathematics Behind Fuzzy Logic, Physica-Verlag, (1999).

[15] M. Ward, P. R. Dilworth, Residuated lattice, Trans. Am. Math. Soc, 45 (1939), 335-354.

[16] X. L. Xin, T. Y. Li, J. H. Lu, On derivations of lattices, Inf. Sci., 178 (2008), 307-316.

[17] J. M. Zhan, Y. L. Liu, On f-derivations of BCI-algebras, Int. J. Math. Sci, Vol. 25, pp. 1675-1684, (2005).