سیستم های فازی و کاربردها
شاپای چاپی: ۲۷۱۷-۴۴۰۹
سال ششم، شماره دوم (پائیز و زمستان ۱۴۰۲)
شاپای الکترونیکی: ۲۷۱۷-۳۹۸۴
صص. ۱۶۷ تا ۱۹۰
DOI:10.22034/JFSA.2024.394284.1174

فیلترفازی روی BIـ جبرها

عاکفه رادفر*
گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۵/۲ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۷/۲۳

نوع مقاله: علمی ـ پژوهشی

چکیده. در این مقاله مفهوم فیلتر فازی و زیرجبر فازی روی BIـ جبرها معرفی شده است. سپس به بررسی برخی خواص آن‌ها پرداخته‌ایم. زیرجبرهای فازی و فیلترهای فازی، با توجه به مجموعه‌های تراز رده‌بندی شده‌اند و تعاریف معادلی برای فیلتر فازی ارائه شده است. همچنین ثابت شده است که در هر BIـ جبر پخشی هر فیلتر یک زیرجبر است و نشان داده‌ایم در دسته‌ای از BIـ جبرها هر زیرمجموعه شامل ۱ یک زیرجبر است و هر زیرمجموعه فازی که در شرط اول فیلتر صدق کند، فیلتر فازی است. علاوه بر این ثابت شده است که مجموعه همه فیلترهای فازی روی BIـ جبرها، یک مشبکه کامل است. رابطه هم‌نهشتی و BIـ جبر خارج‌قسمتی تولید شده توسط فیلترهای فازی نیز بررسی شده است.

۱. سرآغاز

به منظور بهبود درک از منطق‌های چند ارزشی و کاربرد آنها در پردازش اطلاعات نادقیق، می‌توانیم به آنها از منظر جبری نگاه کنیم. در دنیای امروز، ساختارهای جبری نقش بسیار حیاتی در گسترش مرزهای دانش و تولید علم ایفا می‌کنند و برای پژوهش‌های محققان در علوم مختلف مانند رمزنگاری و امنیت اطلاعات، مهندسی پزشکی، مهندسی مکانیک، علوم کامپیوتر، نظریه گراف، رباتیک، اقتصاد، محاسبات نرم، نظریه اتوماتها و غیره بسیار مهم

2010 *Mathematics Subject Classification.*
* Corresponding author
E-mail: radfar@pnu.ac.ir.
عبارات و کلمات کلیدی. BIـ جبر، زیرجبر فازی، فیلتر فازی، رابطه هم‌نهشتی .

هستند. منطق‌های چند ارزشی با تعریف ارزش سوم منطقی بعد از درست یا نادرست توسط لوکاسیویچ [۱] در سال ۱۹۲۰ معرفی شدند و حساب گزاره‌ای سه ارزشی بود که تعمیم آن باعث ارائه منطق‌های چند ارزشی با ارزش‌های متناهی و نامتناهی شد. این منطق، علاوه بر حالت‌های درست و نادرست، یک حالت دیگر نیز دارد که منجر به ایجاد حساب‌های گزاره‌ای با ارزش‌های متناهی و نامتناهی شد. در سال ۱۹۵۸، چانگ [۲] ، مفهوم MVـ جبر را ارائه کرد و در سال ۱۹۵۹ با استفاده از آن، اثبات جبری خاصی برای تامیت منطق بی‌نهایت ارزشی لوکاسیویچ ارائه نمود. سپس، جبرهای حاصل ضربی و جبرهای گودل معرفی شدند. این سه نوع جبر به دقت مدل‌های جبری برای منطق لوکاسیویچ، منطق ضربی و منطق گودل هستند که در تفسیر منطق فازی نقش اساسی ایفا می‌کنند. یکی از دیگر انواع این جبرها، جبرهای استلزامی می‌باشد. در سال ۱۹۶۶، دو ریاضیدان ژاپنی به نام‌های ایمایی [۳] و ایزاکی، [۴] BCKـ جبرها و BCIـ جبرها را به عنوان تعمیمی از منطق گزاره‌ای معرفی کردند [۷]. هو [۵] و لی [۶] به عنوان تعمیمی وسیع‌تر از جبرهای مجرد، BCHـ جبرها را معرفی نمودند، آن‌ها نشان دادند که کلاس BCIـ جبرها یک زیرکلاس سره از BCHـ جبرها می‌باشد[۶]. مفهوم جبرهای استلزامی در سال ۱۹۶۷ توسط ابوت [۷] ارائه شد [۱]. بعد از معرفی dـ جبرها، که تعمیمی از BCKـ جبرها هستند، نیجرز و کیم [۸] تحقیقاتی در مورد ارتباط بین dـ جبرها و BCKـ جبرها انجام دادند [۱۰]. سپس در سال ۲۰۰۷، کیم و کیم تعمیمی از دوگان BCKـ جبرها هستند، با نام BEـ جبرها را معرفی کردند [۸]. آرشام برومند و همکارانش در سال ۲۰۱۷ جبر جدیدی با عنوان BIـ جبرها را ارائه نمودند که تعمیمی (دوگان) از جبرهای استلزامی و BCKـ جبرهای استلزامی می‌باشد [۴]. آن‌ها مفهوم ایده‌آل و رابطه همنهشتی روی این جبر جدید را مورد بررسی و پژوهش قرار دادند و نشان دادند، هر BCKـ جبر استلزامی یک BIـ جبر است، اما عکس این رابطه همواره برقرار نیست. اهن [۹] و همکارانش در سال ۲۰۱۹ با تعریف زیرجبرهای نرمال، BIـ جبرهای خارج قسمتی را معرفی کردند [۲]. نیازیان در سال ۲۰۲۱موفق به ارائه مفهوم ابر BIـ جبرها شد و با تعریف ابر زیرجبر و ابر ایده‌آل در

[1] Lukasiwicz
[2] Chang
[3] Imai
[4] Iseki
[5] Hu
[6] Li
[7] Abbott
[8] Neggers and Kim
[9] Ahn

ابر BIـ جبرها، نتایج متعددی به دست آورد [۱۱]. در این مقاله، تئوری فیلترهای فازی و زیرجبرهای فازی در BIـ جبرها توسعه داده شده است و به بررسی ارتباط بین زیرجبر فازی و فیلترفازی پرداخته شده است. زیرجبرهای فازی و فیلترهای فازی با توجه به مجموعه های تراز رده‌بندی شده است. مثال‌هایی ارائه داده شده است که در آن نشان داده شده است روی برخی از ساختارهای BIـ جبرها اگر مجموعه فازی فقط در شرط اول فیلتر فازی صدق کند، آن‌گاه یک فیلتر فازی و یک زیرجبر فازی روی آن ساختار جبری می‌باشد. ضمناً ثابت شده است در BIـ جبرپخشی، هر فیلتر فازی یک زیرجبر فازی است. علاوه بر این ثابت شده است مجموعه همه فیلترهای فازی روی BIـ جبرها، یک مشبکه کامل است. رابطه هم‌نهشتی تولید شده توسط فیلترهای فازی بررسی شده است. لازم به ذکر است که مفهوم BIـ جبر در این مقاله در واقع یک شکل دوگان از تعریف اصلی است و فیلتر یک شکل دوگان از ایده‌آل در [۴] است.

۲. مفاهیم و تعاریف مقدماتی

در این بخش تعاریف، قضایا و نتایج از قبل به دست آمده که برای نوشتن این مقاله نیاز هست، ارائه شده است. یادآوری می شود یک BIـ جبر $(X, \to, ۱)$ جبری از نوع $(۲, ۰)$ است که برای هر $x, y \in X$ در دو شرط زیر صدق کند:

(B) $x \to x = ۱$،

(BI) $(x \to y) \to x = x$.

فرض کنید $(X, \to, ۱)$ یک BIـ جبر باشد. دراین‌صورت رابطه " $\leq$ " را روی X به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$x \leq y \text{ اگر و فقط اگر } x \to y = ۱.$$

توجه داریم رابطه $\leq$ که در این‌جا تعریف کردیم، جزئاً مرتب نیست و فقط خاصیت بازتابی دارد. **توجه.** در ادامه این مقاله همه‌جا فرض بر این است که X یک BIـ جبر است، مگر خلاف آن اعلام شود.

با توجه به [۴] برای هر $x, y, z \in X$ روابط زیر برقرار است:

$(p_۱)$ $۱ \to x = x$،

$(p_۲)$ $x \to ۱ = ۱$،

$(p_۳)$ $x \to y = x \to (x \to y)$،

$(p_۴)$ اگر $x \to y = z$، آن‌گاه $z \to x = x$ و $x \to z = z$،

BI ـ جبر X را

- متعدی گویند، هرگاه برای هر $x, y, z \in X$ از $x \leq y$ و $z \leq y$ نتیجه شود $x \leq z$.
- پخشی‌چپ یا به اختصار پخشی گویند، هرگاه برای هر $x, y, z \in X$ رابطه زیر برقرار باشد:

$$z \to (x \to y) = (z \to x) \to (z \to y).$$

- پخشی‌راست گویند، هرگاه برای هر $x, y, z \in X$ رابطه زیر برقرار باشد:

$$(x \to y) \to z = (x \to z) \to (y \to z).$$

آرشام برومند و همکارانش ثابت کردند X پخشی راست است اگر و فقط اگر $X = \{۱\}$، همچنین آن‌ها اثبات کردند که اگر X پخشی باشد، آن‌گاه رابطه $\leq$ روی X خاصیت تعدی دارد [۴].

در هر جبر پخشی برای هر $x, y, z \in X$ روابط زیر برقرار است [۴]:

$(p_۵)$ $y \leq x \to y$،

$(p_۶)$ $y \leq (x \to y) \to y$،

$(p_۷)$ $x \leq (x \to y) \to y$،

$(p_۸)$ $x \to y \leq (z \to x) \to (z \to y)$،

$(p_۹)$ اگر $x \leq y$، آن‌گاه $z \to x \leq z \to y$،

$(p_{۱۰})$ $(x \to y) \to z \leq x \to (y \to z)$، (یعنی X یک جبر شبه شرکت‌پذیر است)

$(p_{۱۱})$ اگر $x \to y = x \to z$، آن‌گاه $x \to (y \to z) = ۱$.

زیر مجموعه A از BIـ جبر X را یک [۴]

- BIـ زیرجبر گویند، هرگاه

$$(\forall x, y \in A) \ \ (x \to y \in A), \tag{۱.۲}$$

- BIـ فیلتر از X گویند، هرگاه

$$۱ \in A \tag{۲.۲}$$

$$(\forall x, y \in X)\ \ (x \to y \in A,\ \ x \in A \implies y \in A), \tag{۳.۲}$$

مثال ۱.۲. [۱۲] فرض کنید $X = [1, \infty)$. دراین‌صورت

الف. عمل دوتایی $\to_1$ را روی X به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$x \to_1 y = \begin{cases} 1 & \text{اگر } x = y, \\ y & \text{درغیراین‌صورت} . \end{cases}$$

در این صورت $(X, \to_1, 1)$ یک BIـ جبر پخشی است.

ب. عمل دوتایی $\to_2$ را روی X به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$x \to_2 y = \begin{cases} y & \text{اگر } x = 1, \\ 1 & \text{درغیراین‌صورت} . \end{cases}$$

دراین‌صورت $(X, \to_2, 1)$ یک BIـ جبر پخشی است.

نگاشت $\mu : X \to [0, 1]$ را یک مجموعه فازی روی X گویند.

فرض کنید μ و ν مجموعه‌های فازی روی مجموعه X باشند.

- منظور از $\mu \leq \nu$ این است که برای هر $x \in X$ داشته‌باشیم $\mu(x) \leq \nu(x)$.
- مجموعه

$$\mu_\alpha = \{x \in X \mid \mu(x) \geq \alpha\}$$

را αـ برش ضعیف یا مجموعه تراز مجموعه فازی μ گویند.

- منظور از ارتفاع μ، بیشترین مقدار تابع عضویت μ است و با $hgt(\mu)$ نشان می‌دهیم، یعنی $hgt(\mu) = \max\{\mu(t) \mid t \in X\}$.

۳. زیرجبرهای فازی از یک BIـ جبر

در این بخش زیرجبرهای یک BIـ جبر را با مجموعه‌های تراز آن رده‌بندی می‌کنیم. همچنین به بررسی زیرجبرهای برخی مثال‌ها که در بخش قبل بیان شد، می‌پردازیم.

تعریف ۱.۳. زیر مجموعه فازی μ روی یک BIـ جبر X را یک زیرجبر فازی از X گویند، هرگاه

$$(\forall x, y \in X)\ \ (\mu(x \to y) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\}) \tag{۱.۳}$$

مثال ۲.۳. فرض کنید $X = \{۱, x, y, z\}$ و عمل دوتایی $\rightarrow_۳$ طبق جدول زیر روی X تعریف شده باشد.

$\rightarrow_۳$	۱	x	y	z
۱	۱	x	y	z
x	۱	۱	z	z
y	۱	۱	۱	۱
z	۱	x	۱	۱

در این صورت زیرمجموعه فازی $\mu_۱$ که به صورت زیر تعریف شده است

$$\mu_۱(a) = \begin{cases} ۱ & a = ۱ \text{ اگر}, \\ ۰/۶ & a = x \text{ اگر}, \\ ۰ & \text{در غیر این‌صورت} . \end{cases}$$

یک زیرجبر فازی از BIـ جبر $(X, \rightarrow_۳, ۱)$ است.

گزاره ۳.۳. *فرض کنید μ یک زیرجبر فازی از X باشد. دراین‌صورت برای هر $x \in X$، $\mu(۱) \geq \mu(x)$.*

اثبات. فرض کنید x عضو دلخواهی از X باشد. از آنجا که بنابر (B)، $x \rightarrow x = ۱$ طبق (۱.۳)،

$$\mu(۱) = \mu(x \rightarrow x) \geq \min\{\mu(x), \mu(x)\} = \mu(x). \qquad \square$$

در مثال بعد نشان می‌دهیم عکس گزاره ۳.۳ در حالت کلی برقرار نیست.

مثال ۴.۳. بنابر BIـ جبر $(X, \rightarrow_۳, ۱)$ مثال ۲.۳، اگر مجموعه فازی $\mu_۲$ را به صورت زیر روی X تعریف کنیم،

$$\mu_۲(a) = \begin{cases} ۱ & a = ۱ \text{ اگر}, \\ ۰/۶۵ & a = y \text{ اگر} , \\ ۰/۲۵ & a = x \text{ اگر} , \\ ۰ & \text{درغیراین‌صورت} . \end{cases}$$

آنگاه برای هر $x \in X$، $\mu(۱) \geq \mu(x)$ ولی $\mu_۲$ زیرجبر فازی از X نیست، زیرا

$$\mu_۲(x \rightarrow_۳ y) = \mu_۲(z) = ۰ \ngeq ۰/۲۵ = \min\{\mu_۲(x), \mu_۲(y)\}.$$

در قضیه بعد عکس قضیه ۳.۳ را تحت شرایطی اثبات می‌کنیم.

قضیه ۵.۳. *اگر برای هر $x, y \in X$، $x \to y = y$ یا $x \to y = ۱$، آن‌گاه*

(الف) *هر زیرمجموعه از X که شامل ۱ باشد، یک زیرجبر X است،*

(ب) *هر زیرمجموعه فازی μ یک زیرجبر فازی از X است اگر و فقط اگر برای هر $x \in X$، $\mu(۱) \geq \mu(x)$.*

اثبات. (الف) اثبات ساده است و از نوشتن آن صرف‌نظر شده‌است.

(ب) فرض کنید برای هر $x, y \in X$، $x \to y = y$ یا $x \to y = ۱$ و برای هر $x \in X$، $\mu(۱) \geq \mu(x)$. اگر $x \to y = y$، آن‌گاه

$$\mu(x \to y) = \mu(y) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\},$$

اگر $x \to y = ۱$، آن‌گاه بنابر فرض

$$\mu(x \to y) = \mu(۱) \geq \mu(x) \quad \text{و} \quad \mu(x \to y) = \mu(۱) \geq \mu(y),$$

بنابراین:

$$\mu(x \to y) = \mu(۱) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\}$$

و μ یک زیرجبر فازی از X است. □

با توجه به قضیه ۵.۳ نتیجه زیر به‌سادگی به دست می‌آید.

نتیجه ۶.۳. *فرض کنید $X = [۱, \infty)$ و عمل دوتایی $\to_۱$ یا $\to_۲$ مانند آن‌چه در مثال ۱.۲ (الف)، (ب) تعریف شده، باشد و μ یک زیرمجموعه‌فازی روی X باشد به قسمی که برای هر $x \in X$، $\mu(۱) \geq \mu(x)$. دراین‌صورت*

الف. *هر $Y \subseteq X$ زیرجبر X است، اگر و فقط اگر $۱ \in Y$.*

ب. *μ یک زیرجبر فازی روی X است.*

قضیه ۷.۳. *زیرمجموعه فازی μ از BIـ جبر X یک زیرجبر فازی است اگر و تنها اگر برای هر $t \in [۰, ۱]$، μ_t برابر تهی و یا زیرجبری از X باشد.*

اثبات. فرض کنید μ یک زیرجبر فازی از X باشد و $\mu_t \neq \emptyset$. دراین‌صورت برای‌هر $x, y \in \mu_t$، داریم $\mu(x) \geq t$ و $\mu(y) \geq t$. بنابراین با استفاده از (۱.۳)،

$$\mu(x \to y) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\} \geq t.$$

پس $x \to y \in \mu_t$، در نتیجه μ_t یک زیرجبر است.

برعکس، فرض کنید به‌ازای‌هر $t \in [۰, ۱]$، μ_t یا برابر تهی باشد و یا زیرجبری از X باشد، همچنین $x, y \in X$. $t = \min\{\mu(x), \mu(y)\}$ در نظر می‌گیریم. دراین‌صورت $x, y \in \mu_t$ و در نتیجه $\mu_t \neq \emptyset$. بنابراین μ_t زیرجبر X است. پس بنابر (۱.۲)، $x \to y \in \mu_t$ که به این معنی است که

$$\mu(x \to y) \geq t = \min\{\mu(x), \mu(y)\}.$$

بنابراین μ یک زیرجبر فازی از X است. □

نتیجه ۸.۳. *اگر μ یک زیرجبر فازی از X باشد، آنگاه برای هر $a \in X$، مجموعه X_a زیرجبری از X است، که در آن $X_a = \{x \in X \mid \mu(x) \geq \mu(a)\}$.*

نتیجه ۹.۳. *اگر μ زیرجبر فازی از X باشد، آنگاه مجموعه X_μ زیرجبری از X است، که در آن $X_\mu = \{x \in X \mid \mu(x) = \mu(۱)\}$.*

در مثال بعد نشان می‌دهیم عکس نتیجه ۸.۳، در حالت کلی برقرار نیست.

مثال ۱۰.۳. با توجه به مثال ۴.۳، $X_{\mu_۲} = \{۱\}$ زیرجبری از X است، درحالی‌که $\mu_۲$ زیرجبر فازی از $(X, \to_۳, ۱)$ نیست.

قضیه ۱۱.۳. *زیرمجموعه فازی μ از BIـ جبر X، زیر جبر فازی است اگر و تنها اگر برای هر $t \in [۰, hgt(\mu)]$، μ_t زیرجبر X باشد.*

اثبات. مشابه اثبات قضیه ۷.۳ می‌باشد. □

قضیه ۱۲.۳. (الف) *هر زیرجبر یک BIـ جبر X، یک مجموعه تراز از یک زیرجبر فازی X است.*

(ب) *هر مجموعه تراز ناتهی از یک زیر جبر فازی، زیرجبر می‌باشد.*

اثبات. (الف) فرض کنید Aیک زیرجبر X باشد. مجموعه فازی μ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mu(x) = \begin{cases} t & \text{اگر } x \in A، \\ ۰ & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

جایی‌که t یک عدد دلخواه بین ۰ و ۱ است. به‌سادگی ثابت می‌شود که $A = \mu_t$ و μ یک زیرجبر فازی از X است.

(ب) مشابه اثبات ۷.۳ می‌باشد. □

۴. فیلترهای فازی از یک BIـجبر

در این بخش در ابتدا فیلترهای فازی روی BIـجبرها معرفی شده است، سپس به بررسی خواص فیلترهای فازی پرداخته شده است در ادامه فیلترهای فازی با استفاده از مجموعه‌های تراز رده‌بندی شده است. همچنین شرایط معادل برای تعریف فیلتر فازی روی BIـجبرها ارائه شده است. ثابت شده است مجموعه همه فیلترهای فازی روی BIـجبرها مشبکه کامل است.

تعریف ۱.۴. یک زیرمجموعه فازی X را یک فیلتر فازی گویند، هرگاه برای هر $x, y \in X$، در شرایط زیر صدق کند:

$(F_۱)$ $\mu(۱) \geq \mu(x)$،

$(F_۲)$ $\mu(x) \geq \min\{\mu(y \to x), \mu(y)\}$.

در ادامه این مقاله منظور از $F(X)$ مجموعه همه فیلترهای فازی BIـجبر X می‌باشد.

در مثال بعدی ضمن ارائه چند مثال از فیلتر، نشان می‌دهیم دو شرط $(F_۱)$ و $(F_۲)$ مستقل هستند.

مثال ۲.۴. (الف) فرض کنید $X = \{۱, x, y, z\}$ و عمل دوتایی $\to_۳$ و مجموعه فازی $\mu_۱$ همانند آن‌چه در مثال ۲.۳ تعریف کرده‌ایم باشد. دراین‌صورت $\mu_۱$ یک فیلترفازی از BIـجبر X است.

(ب) فرض کنید $X = \{۱, x, y, z\}$ و عمل دوتایی $\rightarrow_۳$ همانند آن‌چه در مثال ۲.۳ تعریف کرده‌ایم باشد. دراین‌صورت زیرمجموعه فازی $\mu_۳$ که به‌صورت

$$\mu_۳(a) = \begin{cases} ۱ & \text{اگر } a = ۱, \\ ۰/۲ & \text{اگر } a \in \{y, z\}, \\ ۰/۵ & \text{اگر } a = x. \end{cases}$$

تعریف شده است، یک فیلترفازی از $(X, \rightarrow_۳, ۱)$ است.

(ج) با توجه به مثال ۴.۳، $\mu_۲$ در شرط $(F_۱)$ صدق می کند. از آن‌جایی‌که

$$\mu_۲(z) = ۰ \ngeq ۰/۶۵ = \min\{\mu_۲(y \rightarrow z), \mu_۲(y)\},$$

$\mu_۲$ در شرط $(F_۲)$ صدق نمی‌کند.

(د) فرض کنید $X = \{۱, x, y, z\}$ و عمل دوتایی $\rightarrow_۳$ همانند مثال ۲.۳ تعریف شده باشد. اگر مجموعه فازی $\mu_۴$ را به‌صورت زیر تعریف کنیم:

$$\mu_۴(a) = \begin{cases} ۰/۳ & \text{اگر } a = y, \\ ۰ & \text{درغیراین‌صورت}. \end{cases}$$

مشاهده می‌کنیم که $\mu_۴$ در شرط $(F_۲)$ صدق می‌کند ولی در شرط $(F_۱)$ صدق نمی‌کند.

گزاره ۳.۴. *فرض کنید μ یک فیلتر فازی از X باشد. دراین‌صورت برای هر $x, y \in X$، $x \leq y$ نتیجه می‌دهد $\mu(x) \leq \mu(y)$.*

اثبات. فرض کنید $x \leq y$. دراین‌صورت $x \rightarrow y = ۱$. پس بنابر $(F_۲)$،

$$\mu(y) \geq \min\{\mu(x \rightarrow y), \mu(x)\} = \mu(x).$$

□

نتیجه ۴.۴. *اگر X پخشی و μ یک فیلترفازی از X باشد، آن‌گاه برای هر $x, y, z \in X$،*

(الف) $\mu(y) \leq \mu(x \rightarrow y)$،

(ب) $\mu(y) \leq \mu((x \rightarrow y) \rightarrow y)$،

(پ) $\mu(x) \leq \mu((x \rightarrow y) \rightarrow y)$،

(ت) $\mu(x \rightarrow y) \leq \mu((z \rightarrow x) \rightarrow (z \rightarrow y))$،

(ث) *اگر* $x \leq y$، *آن‌گاه* $\mu(z \rightarrow x) \leq \mu(z \rightarrow y)$،

(ج) $\mu((x \rightarrow y) \rightarrow z) \leq \mu(x \rightarrow (y \rightarrow z))$،

(د) *اگر* $x \rightarrow y = x \rightarrow z$، *آن‌گاه* $\mu(x) \leq \mu(y \rightarrow z)$.

اثبات. (الف) تا (ج) بنابر (p_5) تا (p_{10}) و گزاره ۳.۴ اثبات بدیهی است.
(د) اگر μ یک فیلتر فازی از X باشد و برای $x, y, z \in X$، $x \to y = x \to z$، آن‌گاه بنابر (p_{11})، $x \to (y \to z) = 1$. بنابر (F_1) و (F_2)، داریم:

$$\mu(y \to z) \geq \min\{\mu(x \to (y \to z)), \mu(x)\}$$

$$= \min\{\mu(1), \mu(x)\} = \mu(x). \qquad \square$$

در مثال بعد نشان می‌دهیم در حالت کلی از $y \leq x$ نمی‌توان نتیجه گرفت $\mu(y \to z) \leq \mu(x \to z)$.

مثال ۵.۴. فرض کنید $X = \{1, x, y, z\}$. بنابر جدول زیر ملاحظه می‌کنیم که $(X, \to_4, 1)$ BIـ جبر پخشی است.

$\to_4$	1	x	y	z
1	1	x	y	z
x	1	1	y	y
y	1	x	1	x
z	1	1	1	1

دراین‌صورت زیرمجموعه فازی μ_5 که به‌صورت

$$\mu_4(a) = \begin{cases} 1 & a = 1 \text{ اگر}, \\ 0/7 & \text{درغیراین‌صورت}. \end{cases}$$

تعریف شده است فیلتر فازی روی X است. داریم $x \leq z$ ولی

$$\mu(x \to y) = \mu(y) = 0/7 \not\leq 1 = \mu(1) = \mu(z \to y).$$

قضیه ۶.۴. *زیرمجموعه فازی μ، یک فیلتر فازی از X است اگر و تنها اگر برای هر $t \in [0, 1]$، μ_t مساوی تهی باشد یا فیلتری از X باشد.*

اثبات. فرض کنید $\mu \in F(X)$، $t \in [0, 1]$ و $\mu_t \neq \emptyset$. از آن‌جایی که برای هر $x \in X$، $\mu(1) \geq \mu(x)$، نتیجه می گیریم $1 \in \mu_t$. حال فرض کنید $x \to y \in \mu_t$ و $x \in \mu_t$. دراین‌صورت $\mu(x \to y) \geq t$ و $\mu(x) \geq t$ و داریم:

$$\mu(y) \geq \min\{\mu(x \to y), \mu(x)\} \geq t.$$

پس $y \in \mu_t$ و μ_t فیلتر فازی از X است.
برعکس فرض کنید برای‌هر $t \in [۰,۱]$، μ_t برابر تهی باشد یا فیلتری از X باشد. به خلاف فرض کنید μ در شرط $(F_۱)$، صدق نکند. دراین‌صورت برای برخی $x_۰ \in X$، $\mu(۱) < \mu(x_۰) = y_۰$. دراین‌صورت $\mu_{y_۰} \neq \emptyset$ و طبق فرض فیلتری از X است. پس بنابر (۲.۲)، $۱ \in \mu_{y_۰}$ و در نتیجه $\mu(۱) \geq y_۰ = \mu(x_۰)$ که یک تناقض است. بنابراین فرض خلف باطل است و μ در شرط $(F_۱)$ صدق می‌کند. حال فرض کنید μ در شرط $(F_۲)$ صدق نکند. دراین‌صورت $x_۰$ و $y_۰$ در X موجودند به قسمی که

$$\mu(x_۰) < \min\{\mu(y_۰ \to x_۰), \mu(y_۰)\}.$$

قرار می‌دهیم:

$$z_۰ = \frac{۱}{۲}(\mu(x_۰) + \min\{\mu(y_۰ \to x_۰), \mu(y_۰)\}).$$

داریم:

$$۲\mu(x_۰) < \mu(x_۰) + \min\{\mu(y_۰ \to x_۰), \mu(y_۰)\}$$

پس $\mu(x_۰) < z_۰$. همچنین

$$\mu(x_۰) + \min\{\mu(y_۰ \to x_۰), \mu(y_۰)\} < ۲\min\{\mu(y_۰ \to x_۰), \mu(y_۰)\}$$

نتیجه می‌گیریم $z_۰ < \min\{\mu(y_۰ \to x_۰), \mu(y_۰)\}$. بنابراین

$$\mu(x_۰) < z_۰ < \min\{\mu(y_۰ \to x_۰), \mu(y_۰)\} \leq \mu(y_۰ \to x_۰) \text{ و } z_۰ < \mu(y_۰).$$

نتیجه می‌گیریم $y_۰ \to x_۰ \in \mu_{z_۰}$ و $y_۰ \in \mu_{z_۰}$. از طرفی بنابر فرض $\mu_{z_۰}$ فیلتر است و لذا بنابر (۳.۲)، $x_۰ \in \mu_{z_۰}$. پس $\mu(x_۰) \geq z_۰$ که نتیجه می‌دهد

$$\begin{aligned}
\mu(x_۰) &\geq \frac{۱}{۲}(\mu(x_۰) + \min\{\mu(y_۰ \to x_۰), \mu(y_۰)\}) \\
۲\mu(x_۰) &\geq \mu(x_۰) + \min\{\mu(y_۰ \to x_۰), \mu(y_۰)\} \\
\mu(x_۰) &\geq \min\{\mu(y_۰ \to x_۰), \mu(y_۰)\}.
\end{aligned}$$

که یک تناقض است. پس فرض خلف باطل است و μ یک فیلتر فازی است.

□

نتیجه ۷.۴. *اگر μ فیلتر فازی از X باشد، آن‌گاه برای هر $a \in X$، مجموعه X_a فیلتری از X است، جایی که $X_a = \{x \in X \mid \mu(x) \geq \mu(a)\}$.*

نتیجه ۸.۴. *اگر μ فیلتر فازی از X باشد، آن‌گاه برای هر $a \in X$، مجموعه X_μ فیلتری از X است، جایی که $X_\mu = \{x \in X \mid \mu(x) = \mu(1)\}$.*

قضیه ۹.۴. *زیرمجموعه فازی μ یک فیلترفازی از X است اگر و تنها اگر به ازای هر $x, y, z \in X$ در شرط (F_1) و شرط زیر صدق کند.*

(F_3) *اگر* $x \to (y \to z) = 1$*، آن‌گاه* $\mu(z) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\}$.

اثبات. فرض کنید $x, y, z \in X$، $x \to (y \to z) = 1$ و μ فیلتر فازی از X باشد. دراین‌صورت بنابر گزاره ۳.۴، $\mu(y \to z) \geq \mu(x)$. با توجه به (F_2) داریم:

$$\mu(z) \geq \min\{\mu(y \to z), \mu(y)\} \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\}.$$

برعکس، فرض کنید زیرمجموعه فازی μ برای هر $x, y, z \in X$ در شرایط (F_1) و (F_3) صدق کند. در این‌صورت از رابطه $(y \to x) \to (y \to x) = 1$ و (F_3) نتیجه می‌شود

$$\mu(x) \geq \min\{\mu(y \to x), \mu(y)\}.$$

بنابراین μ یک فیلتر فازی از X است. □

با استفاده از استقرا و قضیه ۹.۴ نتیجه زیر را خواهیم داشت.

نتیجه ۱۰.۴. *زیرمجموعه فازی μ یک فیلتر فازی از X است، اگر و تنها اگر برای هر $x_1, x_2, ..., x_n, x \in X$ $(n \geq 2)$ در شرط (F_1) و شرط زیر صدق کند:*

$$x_n \to (...(x_1 \to x)...) = 1 \implies \mu(x) \geq \min\{\mu(x_1), ..., \mu(x_n)\}.$$

گزاره ۱۱.۴. *فرض کنید $X = [1, \infty)$ و عمل دوتایی $\to_1$ مانند آن چه در مثال ۱.۲ (الف) تعریف شده، باشد. دراین‌صورت*

الف. *$F \subseteq X$ یک فیلتر از X است، اگر و فقط اگر $1 \in F$.*

ب. *هر زیرمجموعه فازی روی $(X, \to_1, 0)$ که در شرط (F_1) صدق کند یک فیلتر فازی روی X است.*

اثبات. الف. فرض کنید F فیلتری از X باشد، دراین‌صورت طبق (F_1)، $1 \in F$. بر عکس، اگر F زیرمجموعه‌ای از X باشد و $1 \in F$، آنگاه F در شرط (F_1) صدق می‌کند. برای هر $x \in F$ و $x \neq y$ داریم $y = y \rightarrow_1 x$. پس از $y \in F$ $x \rightarrow_1$ نتیجه می‌شود $y \in F$. پس F در شرط (F_2) نیز صدق می‌کند. بنابراین F یک فیلتر از X است.

ب. فرض کنیم $x \in [1, \infty)$ و μ یک زیرمجموعه فازی باشد که در شرط (F_1) صدق می کند. اگر $x = 1$، آنگاه بر طبق (F_1)، برای هر عدد دلخواه y،

$$\mu(1) \geq \mu(y \rightarrow_1 x) \text{ و } \mu(1) \geq \mu(y)$$

بنابراین:

$$\mu(x) = \mu(1) \geq \min \{\mu(y \rightarrow_1 x), \mu(y)\}.$$

حال اگر $x \neq 1$، آنگاه برای $x \neq y$ داریم $x = x \rightarrow_1 y$ و در نتیجه:

$$\mu(x) \geq \min \{\mu(x), \mu(y)\} = \min\{\mu(y \rightarrow_1 x), \mu(y)\}.$$

اگر $x = y$ ، آنگاه

$$\mu(x) \geq \mu(x) = \min \{\mu(1), \mu(x)\} = \min \{\mu(y \rightarrow_1 x), \mu(x)\}.$$

بنابراین μ در شرط (F_2) نیز صدق می‌کند و یک فیلتر فازی از X است. □

گزاره ۱۲.۴. *فرض کنید $X = [1, \infty)$ ، عمل دوتایی $\rightarrow_2$ مانند آن‌چه در مثال ۱.۲ (ب) تعریف شده، و μ یک فیلتر فازی روی X باشد. دراین‌صورت*

الف. $F \subseteq X$ *فیلتر است، اگر و تنها اگر* $F = X$ *یا* $F = \{1\}$،

ب. *برای هر* $x, y \in (1, \infty)$، $\mu(x) = \mu(y)$.

اثبات. الف. فرض کنیم $F \subseteq X$ فیلتری از X باشد، اگر $F = \{1\}$ باشد، آنگاه بدیهی است که F فیلتری از X است. فرض کنیم $F \neq \{1\}$. دراین‌صورت $x \in F$ موجود است به‌قسمی‌که $x \neq 1$. پس برای هر عضو دلخواه $y \in X$ داریم: $x \rightarrow_2 y = 1 \in F$ و $x \in F$، پس بنابر (F_2)، $y \in F$. چون y یک عضو دلخواه X بود، نتیجه می‌گیریم $F = X$.

ب. فرض کنیم $x \in [1, \infty)$، $x, y \in (1, \infty)$ و μ فیلتر فازی باشد. در این صورت $x \rightarrow_2 y = 1$. از طرفی طبق (F_1) و (F_2)،

$$\mu(x) \geq \min\{\mu(y \rightarrow_2 x), \mu(y)\} = \min \{\mu(1), \mu(y)\} = \mu(y).$$

به روش مشابه ثابت می شود $\mu(y) \geq \mu(x)$. بنابراین $\mu(x) = \mu(y)$. □

در مثال بعد نشان می‌دهیم قضایای ۱۱.۴ و ۱۲.۴ در مورد همه BIـ جبرها برقرار نیستند.

مثال ۱۳.۴. در مثال ۴.۳، داریم:

$$\mu_۲(x) = ۰/۲۵ \ngeq ۰/۶۵ = \min\{\mu_۲(y \rightarrow_۳ x), \mu_۲(y)\}.$$

پس $\mu_۲$ یک فیلتر فازی از X نیست.

قضیه ۱۴.۴. *فرض کنید X پخشی باشد. دراین‌صورت هر فیلتر از X یک زیرجبر از X است.*

اثبات. فرض کنیم F یک فیلتر باشد و $x, y \in F$. طبق $(P_{۱۰})$،

$$x \rightarrow (y \rightarrow (x \rightarrow y)) = ۱.$$

پس طبق (۲.۲)، $x \rightarrow (y \rightarrow (x \rightarrow y)) \in F$. از آن‌جایی که $x \in F$ و بنابر (۳.۲)، $y \rightarrow (x \rightarrow y) \in F$. مجدداً از این‌که $y \in F$ و بنابر (۳.۲)، $x \rightarrow y \in F$. بنابراین F یک زیرجبر X است. □

قضیه ۱۵.۴. *فرض کنید X پخشی و μ یک فیلتر فازی از X باشد. دراین‌صورت μ یک زیرجبر فازی از X است.*

اثبات. فرض کنید X پخشی، μ یک فیلتر فازی و $x, y \in X$. دراین‌صورت طبق $(F_۲)$ و $(p_{۱۰})$، داریم:

$$\mu(y \rightarrow (x \rightarrow y)) \geq \min\{\mu(x \rightarrow (y \rightarrow (x \rightarrow y))), \mu(x)\}$$

$$= \min\{\mu(۱), \mu(x)\} = \mu(x)$$

پس

$$\mu(y \rightarrow (x \rightarrow y)) \geq \mu(x). \tag{۱.۴}$$

مجدداً با استفاده از $(F_۲)$ و (۱.۴) داریم:

$$\mu(x \rightarrow y) \geq \min\{\mu(y \rightarrow (x \rightarrow y)), \mu(y)\}$$

$$\geq \min\{\mu(x), \mu(y)\}.$$

بنابراین μ یک فیلتر فازی از X است. □

در مثال بعد نشان می‌دهیم شرط پخشی روی X ضروری است. همچنین عکس قضیه در حالت کلی برقرار نیست.

مثال ۱۶.۴. (الف) فرض کنید $X = \{۱, x, y, z\}$ و عمل دوتایی "$\rightarrow_{۵}$" مطابق جدول زیر تعریف شده باشد:

$\rightarrow_{۴}$	۱	x	y	z
۱	۱	x	y	z
x	۱	۱	z	z
y	۱	۱	۱	z
z	۱	x	y	۱

در این صورت X پخشی نیست، زیرا:

$$z \rightarrow_{۵} (x \rightarrow_{۵} y) = z \rightarrow_{۵} z = ۱ \neq z = x \rightarrow_{۵} y = (z \rightarrow_{۵} x) \rightarrow_{۵} (z \rightarrow_{۵} y).$$

زیر مجموعه فازی $\mu_{۵}$ که به صورت زیر تعریف شده است

$$\mu_{۵}(a) = \begin{cases} ۰/۹ & a = ۱ \text{ اگر}, \\ ۰/۳ & a \in \{x, y\} \text{ اگر}, \\ ۰ & \text{در غیر این‌صورت}. \end{cases}$$

یک فیلتر فازی از BIـ جبر $(X, \rightarrow_{۵}, ۱)$ است. از آن‌جایی‌که

$$\mu_{۵}(x \rightarrow_{۵} y) = \mu_{۵}(z) = ۰ \ngeq ۰/۳ = \min\{\mu_{۵}(x), \mu_{۵}(y)\},$$

$\mu_{۵}$ زیرجبر فازی از X نیست.

(ب) مجموعه $X = \{۱, x, y, z\}$ همراه با عمل دوتایی زیر یک BIـ جبر پخشی است.

$\rightarrow_{۶}$	۱	x	y	z
۱	۱	x	y	z
x	۱	۱	۱	z
y	۱	۱	۱	z
z	۱	x	y	۱

اگر زیر مجموعه فازی $\mu_۶$ را به صورت زیر تعریف کنیم

$$\mu_۶(a) = \begin{cases} ۰/۹۵ & a = ۱ \text{ اگر}, \\ ۰/۶ & a \in \{x, z\} \text{ اگر}, \\ ۰ & \text{در غیر این‌صورت}. \end{cases}$$

آن‌گاه $\mu_۶$ یک زیرجبر فازی از X است ولی یک فیلتر فازی نیست، زیرا:

$$\mu_۵(y) = ۰ \not\geq ۰/۶ = \min\{\mu_۵(x \to_۵ y), \mu_۵(x)\}.$$

فرض کنید برای $t \in T$، $\mu_t \in F(X)$. زیر مجموعه فازی $\bigwedge_{t\in T} \mu_t$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(\bigwedge_{t\in T} \mu_t)(x) = \inf\{\mu_t(x) \mid t \in T\}.$$

قضیه ۱۷.۴. *فرض کنید برای هر $t \in T$، $\mu_t \in F(X)$. دراین‌صورت* $\bigwedge_{t\in T} \mu_t \in F(X)$.

اثبات. فرض کنید $\mu = \bigwedge_{t\in T} \mu_t$. دراین‌صورت برای هر $x \in X$، بنابر $(F_۱)$، داریم:

$$\mu(۱) = \bigwedge_{t\in T} \mu_t(۱) \geq \bigwedge_{t\in T} \mu_t(x).$$

بنابراین μ در شرط $(F_۱)$، صدق می کند. حال فرض کنید x, y اعضای دلخواهی از X باشند. از آن‌جایی‌که برای هر $t \in T$، $\mu_t \in F(X)$ است، داریم:

$$\begin{aligned} \mu(x) &= \bigwedge_{t\in T} \mu_t(x) \geq \bigwedge_{t\in T} \min\{\mu_t(y \to x), \mu_t(y)\} \\ &= \min\{\bigwedge_{t\in T} \mu_t(y \to x), \bigwedge_{t\in T} \mu_t(y)\} = \min\{\mu(y \to x), \mu(y)\}. \end{aligned}$$

بنابراین μ در شرط $(F_۲)$ نیز صدق می‌کند و $\mu \in F(X)$. □

فیلتر فازی μ را تولید شده توسط زیرمجموعه فازی f گویند، هرگاه $f \leq \mu$ و برای‌هر فیلتر فازی از X که داشته باشیم $f \leq \nu$، نتیجه بگیریم $\mu \leq \nu$. فیلتر فازی تولیدشده توسط f را با $[f)$ نشان می‌دهیم. به طور معادل می‌توانیم $[f)$ را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$[f) = \bigwedge\{\nu \in F(X) \mid \nu \geq f\}.$$

قضیه زیر به‌سادگی ثابت می‌شود و از اثبات آن صرف‌نظر شده است.

قضیه ۱۸.۴. *فرض کنید f و g زیرمجموعه‌های فازی از X باشند. دراین‌صورت روابط زیر برقرار است:*

(الف) $f \leq g$ نتیجه می‌دهد $[f) \leq [g)$،

(ب) اگر $f \in F(X)$، آن‌گاه $[f) = f$.

قضیه ۱۹.۴. *فرض کنید f زیرمجموعه فازی از BIـ جبر X باشد و زیرمجموعه فازی μ به صورت زیر تعریف شده باشد:*

$$\mu(x) = \bigvee_{a_i \in X} \{f(a_۱) \wedge ... \wedge f(a_n) \mid a_n \rightarrow (... \rightarrow (a_۱ \rightarrow x)...) = ۱\}.$$

دراین‌صورت:

(الف) برای هر $x \in X$، $\mu(۱) \geq \mu(x)$،

(ب) $\mu \geq f$،

(پ) اگر برای فیلتر فازی ν، $f \leq \nu$ باشد، آن‌گاه $\mu \leq \nu$،

(ت) $\mu \leq [f)$،

(ث) اگر μ فیلتر باشد، آن‌گاه $\mu = [f)$.

اثبات. (الف) و (ب). بنابر $(p_۲)$، برای هر $x \in X$، $x \rightarrow ۱ = ۱$. بنابراین $\mu(۱) = \bigvee_{x \in X} f(x)$. در نتیجه برای هر $x \in X$، $\mu(۱) \geq \mu(x)$ و $\mu(x) \geq f(x)$.

(پ). فرض کنید ν فیلتر فازی از X باشد به طوری که برای هر $x \in X$، $f(x) \leq \nu(x)$. دراین‌صورت برای هر $x \in X$ داریم:

$$\begin{aligned} \mu(x) &= \bigvee_{a_i \in X} \{f(a_۱) \wedge ... \wedge f(a_n) \mid a_n \rightarrow (... \rightarrow (a_۱ \rightarrow x)...) = ۱\} \\ &\leq \bigvee_{a_i \in X} \{\nu(a_۱) \wedge ... \wedge \nu(a_n) \mid a_n \rightarrow (... \rightarrow (a_۱ \rightarrow x)...) = ۱\}. \end{aligned}$$

بنابر نتیجه ۱۰.۴،

$$\bigvee_{a_i \in X} \{\nu(a_۱) \wedge ... \wedge \nu(a_n) \mid a_n \rightarrow (... \rightarrow (a_۱ \rightarrow x)...) = ۱\} \leq \nu(x).$$

که نتیجه می‌دهد برای هر $x \in X$، $\mu(x) \leq \nu(x)$. بنابراین $\mu \leq \nu$.

(ت) و (ث). بنابر (پ) و تعریف $[f)$ اثبات بدیهی است. □

در مثال بعد نشان می‌دهیم در قضیه ۱۸.۴، μ در حالت کلی فیلتر نیست.

مثال ۲۰.۴. فرض کنید $X = \{۱, x, y, z, t, u\}$ و عمل دوتایی "$\to_۷$" و مجموعه فازی f روی X مانند زیر تعریف شده باشد.

$\to_۷$	۱	x	y	z	t	u
۱	۱	x	y	z	t	u
x	۱	۱	t	z	t	t
y	۱	۱	۱	u	۱	u
z	۱	x	۱	۱	t	۱
t	۱	x	x	z	۱	x
u	۱	۱	y	y	۱	۱

$$f(a) = \begin{cases} ۰/۲ & \text{اگر}\ a = x, \\ ۰/۳ & \text{اگر}\ a = t\ , \\ ۰ & \text{درغیراین‌صورت} \end{cases}$$

دراین‌صورت $(X, \to_۷, ۱)$ یک BIـ‌جبر است. با اندکی محاسبات و با توجه به قضیه ۱۸.۴، داریم:

$$\mu_۷(a) = \begin{cases} ۰/۲ & \text{اگر}\ a \in \{x, y, u\}, \\ ۰/۳ & \text{اگر}\ a \in \{۱, t\}\ , \\ ۰ & \text{درغیراین‌صورت} \end{cases}$$

ملاحظه می‌کنیم که $\mu_۷$ یک فیلتر فازی نیست، زیرا

$$\mu_۷(z) = ۰ \not\geq ۰/۲ = \min\{\mu_۷(u), \mu_۷(y)\} = \min\{\mu_۷(y \to_۷ z), \mu_۷(y)\}.$$

با توجه به قضیه ۱۷.۴ و تعریف $[f)$ قضیه زیر را داریم:

قضیه ۲۱.۴. $(F(X), \bigwedge, \bigvee)$ *یک مشبکه کامل است. جایی‌که برای هر* $\mu, \nu \in F(X)$، $\mu \wedge \nu$ *و* $\mu \vee \nu$ *به‌صورت زیر می‌باشند:*

$$\mu \wedge \nu = \min\{\mu, \nu\} \quad \text{و} \quad \mu \vee \nu = [\max\{\mu, \nu\}).$$

۵. رابطه همنهشتی تولید شده با فیلترهای فازی

یادآوری. رابطه Θ را روی جبر $(X, \to)$

- سازگار راست گویند، هرگاه برای هر $x, y, u \in X$ در رابطه زیر صدق کند:

$$x\Theta y \implies (x \to u)\Theta(y \to u)$$

• سازگار چپ گویند، هرگاه برای هر $x, y, u \in X$ در رابطه زیر صدق کند:

$$x\Theta y \implies (u \to x)\Theta(u \to y)$$

• سازگار گویند، هرگاه برای هر $x, y, u, v \in X$ در رابطه زیر صدق کند:

$$x\Theta y \;\text{ و }\; u\Theta v \implies (x \to u)\Theta(y \to v).$$

رابطه هم‌ارزی سازگار را رابطه هم‌نهشتی گویند.

قضیه ۱.۵. *فرض کنید μ یک فیلتر فازی روی BIــ جبر پخشی X و $t \in [۰, hgt(\mu)]$ باشند. رابطه $\sim_{\mu_t}$ را روی $X \times X$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم.*

$$x \sim_{\mu_t} y \iff x \to y \in \mu_t \;\text{ و }\; y \to x \in \mu_t.$$

دراین‌صورت

(الف) *$\sim_{\mu_t}$ رابطه هم‌ارزی است،*

(ب) *$\sim_{\mu_t}$ رابطه هم‌نهشتی چپ است،*

(پ) *اگر برای هر $x, y, z \in X$، μ در شرط زیر صدق کند، آن‌گاه $\sim_{\mu_t}$ هم‌نهشتی است.*

$$\mu((x \to z) \to (y \to z)) \geq \min\{\mu(x \to y), \mu(y \to x)\}, \tag{۱.۵}$$

(ت) *$[۱]_{\mu_t} = \mu_t$،*

(ث) *اگر μ در شرط (۱.۵) صدق کند، آن‌گاه $(\frac{X}{\mu_t}, \to_{\mu_t}, [۱]_{\mu_t})$ یک BIــ جبر است که در آن عمل $\to_{\mu_t}$ به‌صورت زیر تعریف شده است:*

$$[x]_{\mu_t} \to_{\mu_t} [y]_{\mu_t} = [x \to y]_{\mu_t}.$$

اثبات. (الف) با توجه به تعریف $\sim_{\mu_t}$، بدیهی است که $\sim_{\mu_t}$ بازتابی و تقارنی است. حال فرض کنید برای $x, y, z \in X$، داشته باشیم $x \sim_{\mu_t} y$ و $z \sim_{\mu_t} y$. پس $\mu(y \to x) \geq t$ و $\mu(z \to y) \geq t$. دراین‌صورت طبق نتیجه ۴.۴(ت)، داریم

$$t \leq \mu(y \to x) \leq \mu((z \to y) \to (z \to x)).$$

از آن‌جایی‌که μ یک فیلتر فازی است داریم:

$$\mu(z \to x) \geq \min\{\mu((z \to y) \to (z \to x)), \mu(z \to y)\} \geq t.$$

پس $z \to x \in \mu_t$. به روش مشابه، $x \to z \in \mu_t$. بنابراین $z \sim_{\mu_t} x$ و $\sim_{\mu_t}$ رابطه هم‌ارزی است.

(ب) فرض کنید $x \sim_{\mu_t} y$. دراین‌صورت $x \to y \in \mu_t$ و در نتیجه $\mu(x \to y) \geq t$. بنابر $(F_۲)$ و نتیجه ۴.۴(ت)،

$$\begin{aligned} &\mu((z \to x) \to (z \to y)) \\ &\geq \min\{\mu((x \to y) \to ((z \to x) \to (z \to y))), \mu(x \to y)\} \\ &= \min\{\mu(1), \mu(x \to y)\} = \mu(x \to y) \geq t. \end{aligned}$$

پس $(z \to x) \to (z \to y) \in \mu_t$. به روش مشابه $(z \to y) \to (z \to x) \in \mu_t$ و بنابراین $(z \to x) \sim_{\mu_t} (z \to y)$ و $\sim_{\mu_t}$ رابطه هم‌نهشتی چپ است.

(پ) فرض کنید برای هر $x, y, z \in X$، μ در شرط (۱.۵) صدق کند: بنابر (ب)، $\sim_{\mu_t}$ هم‌نهشتی چپ است. برای این‌که ثابت کنیم $\sim_{\mu_t}$ رابطه هم‌نهشتی است، کافی است ثابت کنیم هم‌نهشتی راست نیز هست. فرض کنید $x \sim_{\mu_t} y$. دراین‌صورت

$$\mu(x \to y) \geq t \text{ و } \mu(y \to x) \geq t.$$

بنابر فرض نتیجه می‌گیریم

$$\mu((x \to z) \to (y \to z)) \geq \min\{\mu(x \to y), \mu(y \to x)\} \geq t,$$
$$\mu((y \to z) \to (x \to z)) \geq \min\{\mu(y \to x), \mu(x \to y)\} \geq t.$$

پس $(x \to z) \to (y \to z) \in \mu_t$ و $(y \to z) \to (x \to z) \in \mu_t$. بنابراین $(y \to z) \sim_{\mu_t} (x \to z)$ و $\sim_{\mu_t}$ رابطه هم‌نهشتی است.

(ت) فرض کنید $x \in [۱]_{\mu_t}$. دراین‌صورت $۱ \to x \in \mu_t$ و بنابراین $x = ۱ \to x \in \mu_t$ و بنابراین $\mu_t \subseteq [۱]_{\mu_t}$. برعکس فرض کنید $x \in \mu_t$. از آن‌جایی‌که $t \in [۰, hgt(\mu)]$، μ_t مخالف تهی است. پس از قضیه ۶.۴، نتیجه می‌گیریم μ_t فیلتری از X است و لذا بنابر (۲.۲)، $۱ \in \mu_t$. طبق $(p_۱)$ و $(p_۲)$، $۱ \to x = x \in \mu_t$ و $x \to ۱ = ۱ \in \mu_t$. بنابراین $x \in \mu_t$و در نتیجه $[۱]_{\mu_t} = \mu_t$.

(ث). فرض کنید μ در شرط (۱.۵) صدق کند. با استفاده از (پ) به‌سادگی ثابت می‌شود عمل $\rightarrow_{\mu_t}$ روی $\frac{X}{\mu_t}$ خوش‌تعریف است. برای هر $[x]_{\mu_t}, [y]_{\mu_t} \in \frac{X}{\mu_t}$ داریم:

$$\begin{aligned} [x]_{\mu_t} \rightarrow_{\mu_t} [x]_{\mu_t} &= [x \rightarrow x]_{\mu_t} = [۱]_{\mu_t}, \\ ([x]_{\mu_t} \rightarrow_{\mu_t} [y]_{\mu_t}) \rightarrow_{\mu_t} [x]_{\mu_t} &= [x \rightarrow y]_{\mu_t} \rightarrow_{\mu_t} [x]_{\mu_t} \\ &= [(x \rightarrow y) \rightarrow x]_{\mu_t} = [x]_{\mu_t}, \end{aligned}$$

بنابراین $(\frac{X}{\mu_t}, \rightarrow_{\mu_t}, [۱]_{\mu_t})$ BIـ جبر است. □

در مثال بعدی نشان می‌دهیم در حالت کلی هر فیلتر فازی در شرط (۱.۵) صدق نمی‌کند. در ضمن مثالی برای قضیه ۱.۵ (ث) ارائه می‌دهیم.

مثال ۲.۵. (الف). فرض کنید $X = \{۱, x, y, z\}$ و عمل دوتایی $\rightarrow_۳$ و فیلتر فازی $\mu_۱$ همانند آن‌چه در مثال ۲.۳ تعریف کرده‌ایم باشد. دراین‌صورت $\mu_۱$ در شرط (۱.۵) صدق نمی کند. زیرا

$$\begin{aligned} \mu_۱((y \rightarrow_۳ x) \rightarrow_۳ (z \rightarrow_۳ x)) &= \mu_۱(۱ \rightarrow_۳ x) = \mu_۱(x) = ۰/۶ \\ &\not\geq ۱ = \mu(۱) = \min\{\mu(y \rightarrow z), \mu(z \rightarrow y)\} \end{aligned}$$

(ب) با توجه به مثال ۵.۴، X پخشی است، با اندکی محاسبات متوجه می‌شویم $\mu_۴$ در شرط (۱.۵) صدق می‌کند. اگر با توجه به مثال ۱.۵، قرار دهیم ، $t = ۰/۸$ آن‌گاه

$$[۱]_{(\mu_۴)_{۰/۸}} = \{۱\}, \quad [x]_{(\mu_۴)_{۰/۸}} = \{x\} \text{ و } \quad [y]_{(\mu_۴)_{۰/۸}} = \{y, z\}.$$

مشاهده می‌کنیم که $(\frac{X}{\mu_{(\mu_۴)_{۰/۸}}}, \rightarrow_{(\mu_۴)_{۰/۸}}, [۱]_{(\mu_۴)_{۰/۸}})$ یک BIـ جبر با جدول زیر است.

$\rightarrow_{(\mu_۴)_{۰/۸}}$	$[۱]_{(\mu_۴)_{۰/۸}}$	$[x]_{(\mu_۴)_{۰/۸}}$	$[y]_{(\mu_۴)_{۰/۸}}$
$[۱]_{(\mu_۴)_{۰/۸}}$	$[۱]_{(\mu_۴)_{۰/۸}}$	$[x]_{(\mu_۴)_{۰/۸}}$	$[y]_{(\mu_۴)_{۰/۸}}$
$[x]_{(\mu_۴)_{۰/۸}}$	$[۱]_{(\mu_۴)_{۰/۸}}$	$[۱]_{(\mu_۴)_{۰/۸}}$	$[y]_{(\mu_۴)_{۰/۸}}$
$[y]_{(\mu_۴)_{۰/۸}}$	$[۱]_{(\mu_۴)_{۰/۸}}$	$[x]_{(\mu_۴)_{۰/۸}}$	$[۱]_{(\mu_۴)_{۰/۸}}$

گزاره ۳.۵. *فرض کنید X پخشی باشد و μ و ν فیلترهای فازی از X باشند. دراین‌صورت*

(الف) *اگر $\nu \leq \mu$ باشد، آن‌گاه برای هر $t \in [۰, l]$، که $l = \min\{hgt(\mu), hgt(\nu)\}$ داریم $\sim_{\mu_t} \subseteq \sim_{\nu_t}$،*

(ب) *اگر* $\sim_{\mu_{i_t}}$ *به‌ازای هر* $i \in \Lambda$ *و* $t \in [\text{۰}, \text{۱}]$ *رابطه هم‌نهشتی چپ باشد، آن‌گاه* $\sim_{\cap \mu_{i_t}}$ *نیز رابطه هم‌نهشتی چپ است.*

قضیه ۴.۵. *فرض کنید* μ *یک فیلتر فازی از* BI *ـ جبر پخشی* X *باشد. دراین‌صورت برای هر* $t \in [\text{۰}, hgt(\mu)]$ *،* $[\text{۱}]_{\mu_t}$ *فیلتری از* X *است.*

اثبات. بدیهی است که $\text{۱} \in [\text{۱}]_{\mu_t}$. فرض کنیم برای برخی $x, y \in X$، $x \to y \in [\text{۱}]_{\mu_t}$ و $x \in [\text{۱}]_{\mu_t}$. بنابراین $\text{۱} \sim_{\mu_t} (x \to y)$ و $x \in [\text{۱}]_{\mu_t}$. پس $\text{۱} \to x \to y = (x \to y) \in \mu_t$ و $\text{۱} \to x = x \in \mu_t$. نتیجه می‌گیریم $\mu(x \to y) \geq t$ و $\mu(x) \geq t$. ازآن‌جایی‌که μ یک فیلتر فازی است، $\mu(y) \geq \min\{\mu(x \to y), \mu(x)\} \geq t$. بنابراین $\text{۱} \to y \in \mu_t = y$، $y \in [\text{۱}]_{\mu_t}$ و $[\text{۱}]_{\mu_t}$ فیلتر فازی از X است. $\square$

گزاره ۵.۵. *فرض کنید* X *پخشی باشد و* μ *فیلترفازی از* X *باشد. دراین‌صورت برای هر عضو دلخواه* $x \in X$ *، رابطه* ϕ_x *که به‌صورت زیر تعریف شده است، هم‌نهشتی چپ است.*

$$\phi_{\mu_x} = \{(a, b) \in X \times X \mid \mu(a \to x) = \mu(b \to x)\}.$$

گزاره ۶.۵. *فرض کنید* μ *فیلتر فازی از* X *باشد. دراین‌صورت برای‌هر* $x, y \in X$ *،*

(الف) $\phi_{\mu_\text{۱}} = X \times X$،

(ب) $\phi_{\mu_x} \subseteq \phi_{\mu_\text{۱}}$،

۶. نتیجه گیری و تحقیقات آینده

در این مقاله در ابتدا مفهوم زیرجبر فازی روی BIـ جبرها تعریف شده است و سپس به بررسی ویژگی‌های زیرجبر فازی پرداخته شده است. علاوه بر این زیرجبر فازی با استفاده از مجموعه های تراز رده‌بندی شده است. در ادامه مفهوم فیلتر فازی معرفی و نشان داده شده است که دو شرط فیلتر فازی مستقل هستند. همچنین شرایط معادل برای فیلتر فازی ارائه شده و ثابت شده که مجموعه همه فیلترهای فازی روی BIـ جبرها، یک مشبکه کامل تشکیل می‌دهند. در ضمن در این مقاله رابطه هم‌نهشتی ایجاد شده توسط فیلترهای فازی نیز مورد بررسی قرار گرفته و ثابت شده است که اگر BIـ جبر پخشی باشد، رابطه هم‌نهشتی ایجاد شده هم‌نهشتی چپ است. در تحقیقات آینده به معرفی انواع دیگری از فیلترها روی BIـ جبرها مانند فیلتر جابجایی، فیلتر ماکسیمال، فیلتر اول و ... می‌پردازیم. موضوع دیگری که در آینده

بررسی خواهد شد، تعریف و بررسی خواص مجموعه‌های نرم روی فیلتر فازی در BIـ جبرها می‌باشد.

مراجع

[1] J. C. Abbott, Semi-boolean algebras, Mate. Vesnik, 4 (1967), 177-198.

[2] S. S. Ahn, J. M. Ko and A. Borumand Saeid, On ideals of BI-algebras, J. Indones. Math. Soc., 25(1)(2019), 24-34.

[3] R. K. Bandaru, On QI-algebras, Discussiones Mahematicae General Algebr and Applications, 37(2017), 137-145.

[4] A. Borumand Saeid, H. S. Kim and A. Rezaei, On BI-algebras, An. St. Univ. Ovidius Constanta, 25(2017), 177-194.

[5] W. Y. Chen and J. S. Oliveira, Implication algebras and the metropolis rota axioms for cubic lattices, J. Algebra, 171(1995), 383-396.

[6] Q. L. Hu and X. Li, On BCH-algebras, Math. Sem. Notes Kobe Univ. 2 (1983), part 2, 313-320.

[7] Y. Imai and K. Iseki, On axioms systems of propositional calculi XIV, Proceeding of the Japan Academy, Series A, 42 (1966), 19–22.

[8] H.S. Kim and Y.H. Kim, On BE-algebras, Sci. Math. Jpn, 66(1) (2007), 113-117.

[9] H. S. Li, An axiom system of BCI-algebras, Math. Japonica, 30 (1985), 351–352.

[10] J. Neggers and H. S. Kim, On d-algebras, Math. Slovaca, 49 (1999), 19-26.

[11] S. Niazian, On hyper BI-algebras, Journal of Algebraic Hyperstructures and Logical Algebras2(1) (2021), 47-67.

[12] A. Radfar, S. Soleymani and A. Rezaei, Some Results on commutative BI-algebras , Journal of Mahani Mathematical Research, submitted.