سیستم های فازی و کاربردها
سال هفتم، شماره دوم (پائیز و زمستان ۱۴۰۳)
صص. ۱۳۵ تا ۱۴۷

شاپای چاپی: ۲۷۱۷-۴۴۰۹
شاپای الکترونیکی: ۲۷۱۷-۳۹۸۴
DOI:10.22034/JFSA.2025.467103.1232

مسائل برنامه‌ریزی کسری خطی چندهدفه بازه‌ای ناهموار و روشی جدید برای حل آن‌ها

ساناز ریواز*، مهرنوش سلطانی علاسوند
گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل، بابل، ایران

تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۰۴/۲۰ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۱۱/۲۷

نوع مقاله: علمی-پژوهشی

چکیده. بهینه‌سازی چند هدفه نقش مهمی در مدل‌سازی بسیاری از مسائل ایفا می‌کند. از طرفی دسته‌ای از این مسائل به بهینه‌سازی نسبت اهداف می‌پردازند که اهمیت بیشتری نسبت به بهینه‌سازی هر هدف به تنهایی دارند. از آنجایی که اکثر مسائل دنیای واقعی با عدم قطعیت در داده‌ها و پارامترها رو به رو هستند، در این مقاله دسته‌ای از مسائل برنامه‌ریزی کسری خطی چندهدفه با ضرایب بازه‌ای ناهموار در توابع هدف مدنظر قرار می‌گیرد. به منظور برخورد با این دسته از مسائل، ابتدا مسئله را از حالت بازه‌ای ناهموار خارج نموده سپس با استفاده از محاسبات بازه‌ای و رویکرد مجموع وزنی در بهینه‌سازی چندهدفه به حل مسئله پرداخته می‌شود. نتایج بدست آمده در یک مثال عددی مورد بررسی قرار می‌گیرند.

۱. مقدمه

مسائل بهینه‌سازی چندهدفه در دنیای امروز کاربردهای گوناگونی دارند. این مسائل از چندین تابع هدف تشکیل و دارای مجموعه‌ای از جواب‌های شدنی هستند. روش‌های متعددی تا به امروز

2010 *Mathematics Subject Classification.* 90C05; 90C32; 90C29
* Corresponding author
E-mails:srivaz@nit.ac.ir, sanazrivaz@gmail.com.
عبارات و کلمات کلیدی. عدم قطعیت، برنامه‌ریزی کسری خطی، برنامه‌ریزی چندهدفه ،برنامه‌ریزی بازه‌ای.

© ۱۴۰۳ (انجمن سیستم‌های فازی)

جهت برخورد با مسائل بهینه‌سازی چندهدفه توسط محققین ارائه شده است [۷، ۱۳، ۱۵، ۱۷، ۲۹]. دسته‌ای از این مسائل که تحت عنوان مسائل برنامه‌ریزی کسری خطی چندهدفه شناخته می‌شوند، از اهمیت بالایی برخوردار هستند، زیرا در بسیاری از مسائل دنیای واقعی بهینه‌سازی نسبت اهداف از بهینه‌سازی هر هدف به تنهایی نقش مهم‌تری را ایفا می‌کند. مسائل برنامه‌ریزی کسری خطی چندهدفه دارای توابع هدف به فرم کسری و مجموعه‌ای از قیود هستند. رویکردهای متعددی برای رویارویی با این دسته از مسائل وجود دارد [۴، ۵، ۸، ۹، ۱۲، ۲۰، ۲۱، ۲۲]. برای نمونه، کورنبلوث و استوئر در [۱۹] یک جواب کارای‌ضعیف با استفاده از الگوریتم سیمپلکس برای مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی چندهدفه ارائه کرده‌اند. همچنین در [۲۱] یک جواب کارای‌ضعیف با استفاده از یک مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی برای چنین مسائلی حاصل شده است. در [۱۰] نیز یک روش تقریب کنترل شده برای دستیابی به جواب‌های کارای یک مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی چندهدفه مورد بررسی قرار گرفته است.

واضح است که در بسیاری از مسائل دنیای واقعی امکان تعیین ضرایب و پارامترها به صورت قطعی وجود ندارد. لذا استفاده از رویکردهای کارآمد جهت برخورد با عدم قطعیت همواره مدنظر بوده است [۱، ۲، ۳، ۶، ۱۴، ۱۶، ۱۸، ۲۷]. در این راستا، بکارگیری بازه‌های ناهموار مورد توجه واقع شده است. نظریه مجموعه‌های ناهموار در سال ۱۹۸۲ توسط پاولاک مطرح شده است [۲۴]. مجموعه‌های ناهموار کاربردهای گوناگونی در زمینه‌های مختلف از جمله هوش‌مصنوعی، یادگیری ماشین، استخراج داده و تشخیص الگو دارد. ایده اصلی در نظریه مجموعه‌های ناهموار به این ترتیب است که هر مفهوم مبهم با یک جفت مفهوم دقیق جایگزین می‌شود که به آن‌ها تقریب پایینی و تقریب بالایی مفهوم مبهم می‌گویند. در تعمیم مفهوم نظریه مجموعه‌های ناهموار، مفهوم دیگری تحت عنوان بازه‌های ناهموار در [۲۵] توسط ربولدو ارائه شده است که به منظور برخورد با متغیرها و پارامترهای غیرقطعی مورد استفاده قرار می‌گیرد. برای نمونه، در [۱۸] مسائل برنامه‌ریزی خطی با ضرایب بازه‌ای ناهموار مورد بررسی قرارگرفته‌اند. به منظور حل چنین مسائلی، دو مسئله با ضرایب بازه‌ای مدنظر قرار می‌گیرند که با استفاده از آن‌ها جواب‌هایی برای مسئله اصلی حاصل می‌شود. امروزه مسائل برنامه‌ریزی کسری خطی چندهدفه با ضرایب بازه‌ای ناهموار توجه بسیاری از محققین را به خود معطوف کرده‌اند به گونه‌ای که تاکنون راهکارهای متفاوتی برای رویارویی با این مسائل ارائه شده است [۲۳، ۲۸].

در این مقاله نیز دسته‌ای از مسائل برنامه‌ریزی کسری خطی چندهدفه با ضرایب بازه‌ای ناهموار در توابع هدف مورد بررسی قرار می‌گیرد. با استفاده از برنامه‌ریزی بازه‌ای و روش‌های موجود در بهینه‌سازی چندهدفه، جواب‌های کارا برای این‌گونه مسائل یافت می‌شود. این مقاله به شرح زیر

تنظیم شده است:
در بخش ۲ پیش‌نیازهایی از بازه‌ها، محاسبات بازه‌ای و مفهوم شاخص پذیرش عنوان می‌شود. همچنین مفاهیمی پیرامون بهینه‌سازی چندهدفه و بازه‌های ناهموار در این بخش ارائه خواهند شد. در بخش ۳ دسته‌ای از مسائل برنامه‌ریزی کسری خطی چندهدفه با ضرایب بازه‌ای ناهموار مدنظر قرار می‌گیرد. یک روش حل جدید و نتایجی متناظر با این گونه مسائل در همین بخش ارائه می‌شوند. در بخش ۴ یک مثال عددی جهت درک بهتر نتایج بدست آمده، بیان می‌شود و در نهایت بخش ۵ به نتیجه‌گیری اختصاص دارد.

۲. پیش‌نیازها

در مجموعه اعداد حقیقی بازه A در حالت کلی به صورت زیر تعریف می‌شود [۱، ۲، ۳]:

$$A = [a_L, a_R] = \{x : a_L \leq x \leq a_R, x \in \mathbb{R}\},$$

که در آن $a_L, a_R \in \mathbb{R}$. لازم به ذکر است که a_L, a_R به ترتیب کران‌های بالا و پایین بازه A نامیده می‌شوند. هر عدد حقیقی a را می‌توان به صورت $[a, a]$ نمایش داد. بازه A را همچنین می‌توان به صورت $A = \langle m(A), w(A) \rangle$ نشان داد. که در آن $m(A)$ نقطه میانی و $w(A)$ نیمه عرض بازه A است و به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$A_c = m(A) = \frac{۱}{۲}(a_L + a_R),\ w(A) = \frac{۱}{۲}(a_R - a_L)$$

اگر $A = [a_L, a_R]$ و $B = [b_L, b_R]$ دو بازه در مجموعه اعداد حقیقی باشند در این صورت داریم:

$$A + B = [a_L + b_L, a_R + b_R]$$

$$A - B = [a_L - b_R, a_R - b_L]$$

اگر λ یک اسکالر باشد، داریم:

$$\lambda.A = \begin{cases} [\lambda a_L, \lambda a_R], & \lambda \geq ۰ \\ [\lambda a_R, \lambda a_L], & \lambda < ۰. \end{cases}$$

مقایسه بازه‌ها از مباحث بحث برانگیز و حائز اهمیت در آنالیز بازه‌ای است که تا کنون توسط

بسیاری از محققین بررسی شده است. در این راستا در ادامه مفهومی تحت عنوان شاخص پذیرش بیان می‌شود [۲۶]. با استفاده از این مفهوم، مقایسه بازه‌ها در مجموعه اعداد حقیقی امکان‌پذیر است. همچنین با بکارگیری آن می‌توان مشخص نمود که به چه میزان یک بازه از بازه دیگر بزرگ‌تر است.

فرض کنید I مجموعه تمام بازه‌های بسته در $\mathbb{R}$ باشد. تابع پذیرش $\mathcal{A} : I \times I \to [0, \infty)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathcal{A}(A < B) = \frac{m(B) - m(A)}{w(B) + w(A)}$$

، که در آن $w(B) + w(A) \neq 0$.

$\mathcal{A}(A < B)$ را می‌توان به عنوان درجه‌ی پذیرش "بازه‌ی اول پایین‌تر از بازه‌ی دوم" تفسیر کرد. درجه‌ی پذیرش $\mathcal{A}(A < B)$ به صورت زیر تفسیر و طبقه‌بندی می‌شود:

$$\mathcal{A}(A < B) = \begin{cases} = 0, & if\ m(A) = m(B), \\ \in (0, 1), & if\ m(A) < m(B), a_R > b_L, \\ \geq 1, & if\ m(A) < m(B), a_R \leq b_L. \end{cases}$$

- اگر $\mathcal{A}(A < B) = 0$ ، فرض "A پایین‌تر از B" پذیرفته نمی‌شود.
- اگر $0 < \mathcal{A}(A < B) < 1$ ، فرض $\mathcal{A}(A < B)$ با درجه‌های مختلف رضایت از صفر تا یک پذیرفته می‌شود (به جز صفر و یک).
- اگر $\mathcal{A}(A < B) \geq 1$ ، فرض $\mathcal{A}(A < B)$ کاملاً درست است.

مثال ۱.۲. فرض کنید

$A = [140, 200] =< 170, 30 >$ و $B = [150, 230] =< 190, 40 >$

دو بازه‌ی سود باشند. با توجه به شاخص پذیرش، برای یک مسئله بیشینه‌سازی داریم:

$$\mathcal{A}(A < B) = 0/29$$

در نتیجه A با درجه رضایت ۰/۲۹ از B پایین‌تر است. بنابراین بازه‌ی B به عنوان بازه‌ی انتخابی برای مسئله بیشینه‌سازی توسط تصمیم‌گیرنده در نظر گرفته می‌شود.

از آن‌جا که در این مقاله، هدف بررسی دسته‌ای از مسائل برنامه‌ریزی کسری خطی چندهدفه با ضرایب بازه‌ای ناهموار در توابع هدف (مسائل برنامه‌ریزی کسری خطی چندهدفه بازه‌ای ناهموار)

است، بنابراین در ادامه مروری بر مفهوم بازه‌های ناهموار خواهیم داشت [۱۸].

مقدار کیفی A یک بازه ناهموار است هرگاه بتوان دو بازه بسته A_* و A^* روی اعداد حقیقی به آن اختصاص داد به طوری که $A_* \subseteq A^*$. علاوه بر این

۱) اگر $x \in A_*$، A حتماً x را در بر می‌گیرد.

۲) اگر $x \in A^*$، A احتمالاً x را در بر می‌گیرد.

۳) اگر $x \notin A^*$، A قطعاً x را شامل نمی‌شود.

A_* و A^* به ترتیب تقریب پایین و تقریب بالا نامیده می‌شوند و بازه‌ی ناهموار A به فرم $A = (A_*, A^*)$ نمایش داده می‌شود.

مثال ۲.۲. فرض کنید W مفهوم "گرم" به عنوان یک مقدار کیفی بر روی متغیر دما "X" به صورت زیر در $\mathbb{R}$ تعریف شده باشد:

$$W = (W_*, W^*) = ([۳۰, ۵۰], [۱۷, ۷۰])$$

بنابراین متغیر دما، X ، مطمئناً مقداری بین ۳۰ تا۵۰ درجه سانتیگراد می‌گیرد. به همین ترتیب X احتمالاً مقداری بین ۱۷ تا ۷۰ درجه سانتیگراد می‌گیرد.

برخی عملیات محاسباتی بر روی بازه‌های ناهموار در ادامه بیان می‌شوند.

فرض کنید $A = ([\underline{a^l}, \underline{a^u}], [\overline{a^l}, \overline{a^u}])$ و $B = ([\underline{b^l}, \underline{b^u}], [\overline{b^l}, \overline{b^u}])$ دو بازه‌ی ناهموار باشند. در این صورت داریم:

$$A + B = ([\underline{a^l} + \underline{b^l}, \underline{a^u} + \underline{b^u}], [\overline{a^l} + \overline{b^l}, \overline{a^u} + \overline{b^u}])$$
$$A - B = ([\underline{a^l} - \underline{b^u}, \underline{a^u} - \underline{b^l}], [\overline{a^l} - \overline{b^u}, \overline{a^u} - \overline{b^l}])$$
$$-A = ([-\underline{a^u}, -\underline{a^l}], [-\overline{a^u}, -\overline{a^l}])$$

به منظور آشنایی با برخی مفاهیم از بهینه‌سازی چندهدفه، در ادامه مروری بر مسائل برنامه‌ریزی خطی چندهدفه خواهیم داشت [۱۷].

به طور کلی یک مسئله برنامه‌ریزی خطی چندهدفه به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} &Min \quad z(x) = (z_۱(x), ..., z_p(x))^t = (c_۱x, ..., c_px)^t, \\ &s.t. \quad x \in X = \{x | Ax \leq b, x \geq ۰\}. \end{aligned} \qquad (۱.۲)$$

جواب شدنی $x^\circ \in X$ در مسئله برنامه‌ریزی خطی چندهدفه (۱.۲)

- کارا است اگر وجود نداشته باشد $x \in X$ به طوری که $z(x) \preceq z(x^\circ)$ بدین معنی که $c_i x \leq c_i x^\circ$ برای $i = ۱, ..., p$ باشد و دست کم یک $۱ \leq q \leq p$ وجود داشته باشد به طوری که $c_q x < c_q x^\circ$.

- کارای‌ضعیف است اگر وجود نداشته باشد $x \in X$ به طوری که $z(x) \prec z(x^\circ)$ به این معنی که $c_i x < c_i x^\circ$ برای $i = ۱, ..., p$.

اگر در مسئله (۱.۲) ضرایب متغیرها در تابع هدف به صورت بازه‌های بسته در $\mathbb{R}$ باشند آن‌گاه متناظر با مسئله برنامه‌ریزی خطی چندهدفه با ضرایب بازه‌ای در تابع هدف (برنامه‌ریزی خطی چند هدفه بازه‌ای) مفاهیم جواب‌های زیر با در نظر گرفتن شاخص پذیرش معرفی می‌گردد:

- جواب شدنی $x^\circ \in X$، یک جواب $\mathcal{A}-$ کارا برای مسئله برنامه‌ریزی خطی چند هدفه بازه‌ای است اگر وجود نداشته باشد $x \in X$ به طوری که $\mathcal{A}(z_i(x) < z_i(x^\circ)) \geq ۰$ برای $i = ۱, ..., p$ و $\mathcal{A}(z_j(x) < z_j(x^\circ)) > ۰$ برای برخی $۱ \leq j \leq p$.
- جواب شدنی $x^\circ \in X$، یک جواب $\mathcal{A}-$ کارای‌ضعیف برای مسئله برنامه‌ریزی خطی چند هدفه بازه‌ای است اگر وجود نداشته باشد $x \in X$ به طوری که $\mathcal{A}(z_i(x) < z_i(x^\circ)) > ۰$ برای $i = ۱, ..., p$.

یک روش کارا برای رویارویی با مسائل برنامه‌ریزی چندهدفه، روش مجموع وزنی می‌باشد. با اعمال روش مجموع وزنی برای مسئله (۱.۲) داریم:

$$\begin{aligned} &Min \quad \sum_{i=۱}^{p} \lambda_i z_i(x), \\ &s.t. \ \ x \in X, \end{aligned} \tag{۲.۲}$$

که $\lambda_i \geq ۰$، $i = ۱, ..., p$، به عنوان وزن تابع هدف i -ام در نظر گرفته می‌شود.

قضیه ۳.۲. فرض کنید $\hat{x}$ یک جواب بهینه از مسئله (۲.۲) باشد در این صورت:

- اگر $\lambda_i \geq ۰$، $i = ۱, ..., p$، آن‌گاه $\hat{x}$ یک جواب کارای ضعیف مسئله برنامه‌ریزی خطی چندهدفه (۱.۲) است.
- اگر $\lambda_i > ۰$، $i = ۱, ..., p$، آن‌گاه $\hat{x}$ یک جواب کارای مسئله برنامه‌ریزی خطی چندهدفه (۱.۲) است.

۳. بیان مسئله و نتایج

در این بخش، دسته‌ای از مسائل برنامه‌ریزی کسری خطی چندهدفه بازه‌ای ناهموار به صورت زیر مدنظر قرار می‌گیرد:

$$\begin{aligned}
&Min \;\; z_1 = \frac{\sum_{i=1}^{k}(\mathbf{A}^1_{*i},\mathbf{A}^{1*}_i)x_i+(\mathbf{A}_{*k+1},\mathbf{A}^*_{k+1})}{\sum_{i=1}^{k}B_ix_i+C}\\
&\quad\vdots\\
&Min \;\; z_p = \frac{\sum_{i=1}^{k}(\mathbf{A}^p_{*i},\mathbf{A}^{p*}_i)x_i+(\mathbf{A}_{*k+1},\mathbf{A}^*_{k+1})}{\sum_{i=1}^{k}B_ix_i+C}\\
&s.t. \;\; x \in X = \{x|Ax \leq b, x \geq 0\},
\end{aligned} \tag{۱.۳}$$

که در آن $\sum_{i=1}^{k} B_ix_i + C > 0$. به منظور حل مسئله (۱.۳)، بررسی مسائل (۲.۳) و (۳.۳) پیشنهاد می‌شود. لازم به ذکر است که مسئله (۲.۳) با استفاده از تقریب‌های پایین و مسئله (۳.۳) با استفاده از تقریب‌های بالا در توابع هدف حاصل شده‌اند.

$$\begin{aligned}
&Min \;\; z_{*1} = \frac{\sum_{i=1}^{k}(\mathbf{A}^1_{*i})x_i+(\mathbf{A}_{*k+1})}{\sum_{i=1}^{k}B_ix_i+C}\\
&\quad\vdots\\
&Min \;\; z_{*p} = \frac{\sum_{i=1}^{k}(\mathbf{A}^p_{*i})x_i+(\mathbf{A}_{*k+1})}{\sum_{i=1}^{k}B_ix_i+C}\\
&s.t. \;\; x \in X = \{x|Ax \leq b, x \geq 0\},
\end{aligned} \tag{۲.۳}$$

و

$$Min\ \ z_{1}^{*}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{k}(\mathbf{A}_{i}^{*1})x_{i}+(\mathbf{A}_{k+1}^{*})}{\sum\limits_{i=1}^{k}B_{i}x_{i}+C}$$

$$\vdots \tag{۳.۳}$$

$$Min\ \ z_{p}^{*}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{k}(\mathbf{A}_{i}^{p*})x_{i}+(\mathbf{A}_{k+1}^{*})}{\sum\limits_{i=1}^{k}B_{i}x_{i}+C}$$

$$s.t.\ \ x\in X=\{x|Ax\leq b,x\geq 0\}.$$

واضح است که مسائل (۲.۳) و (۳.۳) دو مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی چندهدفه بازه‌ای هستند. هر جواب $\mathcal{A}-$ کارای ($\mathcal{A}-$ کارای ضعیف) مسئله (۲.۳)، یک جواب $\mathcal{A}-$ مطمئنا کارای ($\mathcal{A}-$ مطمئنا کارای ضعیف) مسئله (۱.۳) است. همچنین هر جواب $\mathcal{A}-$ کارای ($\mathcal{A}-$ کارای ضعیف) مسئله (۳.۳)، یک جواب $\mathcal{A}-$ احتمالا کارای ($\mathcal{A}-$ احتمالا کارای ضعیف) مسئله (۱.۳) است. جهت برخورد با مسئله (۲.۳)، با بکارگیری رویکرد مجموع وزنی در بهینه‌سازی چندهدفه، مسئله (۴.۳) حاصل می‌گردد:

$$\begin{aligned} &Min\ \ z=\lambda_{1}z_{*1}+...+\lambda_{p}z_{*p}\\ &s.t.\ \ x\in X=\{x|Ax\leq b,x\geq 0\}, \end{aligned} \tag{۴.۳}$$

که $\lambda_i\geq 0$، $i=1,...,p$، وزن متناظر با تابع هدف i -ام است. به منظور حل مسئله (۴.۳) که یک مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی تک هدفه با ضرایب بازه‌ای در تابع هدف است، با در نظر گرفتن مفهوم شاخص پذیرش مسئله زیر حاصل می‌گردد:

$$\begin{aligned} &Min\ \ \ z=\{\lambda_{1}z_{*1}+...+\lambda_{p}z_{*p}\}_{c},\\ &s.t.\ \ x\in X=\{x|Ax\leq b,x\geq 0\}. \end{aligned} \tag{۵.۳}$$

مسئله (۵.۳) یک مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی است که با حل این مسئله و بدست آوردن جواب بهینه آن، x^*، یک جواب $\mathcal{A}-$ بهینه برای مسئله (۴.۳) حاصل می‌شود.

قضیه ۱.۳. هر جواب $\mathcal{A}$- بهینه از مسئله (۴.۳) وقتی $\lambda_i > \circ$ ، $i = ۱, ..., p$، یک جواب $\mathcal{A}$- کارای مسئله (۲.۳) است. همچنین هر جواب $\mathcal{A}$- بهینه از مسئله (۴.۳) وقتی $\lambda_i \geq \circ$ ، $i = ۱, ..., p$، یک جواب $\mathcal{A}$- کارای‌ضعیف مسئله (۲.۳) است.

اثبات. نخست فرض کنید x^* یک جواب $\mathcal{A}$- بهینه از مسئله (۴.۳) وقتی $\lambda_i > \circ$ ، $i = ۱, ..., p$، است. همچنین فرض خلف کنید که x^* یک جواب $\mathcal{A}$- کارا برای مسئله (۲.۳) نباشد. بدین ترتیب $x \in X$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$\mathcal{A}(z_{*i}(x) < z_{*i}(x^*)) \geq \circ, \ i = ۱, ..., p$$

، به علاوه $\mathcal{A}(z_{*j}(x) < z_{*j}(x^*)) > \circ$ برای برخی $۱ \leq j \leq p$. بنابراین $\{\lambda_۱ z_{*۱}(x) + ... + \lambda_p z_{*p}(x)\}_c < \{\lambda_۱ z_{*۱}(x^*) + ... + \lambda_p z_{*p}(x^*)\}_c$ که تناقض با $\mathcal{A}$- بهینه بودن x^* برای مسئله (۴.۳) است. بدین ترتیب فرض خلف باطل و حکم برقرار است. قسمت دوم قضیه نیز به طریق مشابه اثبات می‌شود. □

متناظر با مسئله (۳.۳) نیز، مسئله (۶.۳) ارائه می‌شود:

$$\begin{aligned} &Min \ \ z = \lambda_۱ z_۱^* + ... + \lambda_p z_p^* \\ &s.t. \ \ x \in X = \{x | Ax \leq b, x \geq \circ\}, \end{aligned} \qquad (۶.۳)$$

که $\lambda_i \geq \circ$، $i = ۱, ..., p$، وزن متناظر با تابع هدف i -ام است. با حل مسئله (۷.۳) متناظر با مسئله (۶.۳) ، یک جواب $\mathcal{A}$- بهینه برای مسئله (۶.۳) حاصل می‌گردد.

$$\begin{aligned} &Min \ \ \ z = \{\lambda_۱ z_۱^* + ... + \lambda_p z_p^*\}_c, \\ &s.t. \ \ x \in X = \{x | Ax \leq b, x \geq \circ\}. \end{aligned} \qquad (۷.۳)$$

بدین ترتیب قضیه ۲.۳ نتیجه می‌شود که اثباتی شبیه قضیه ۱.۳ دارد.

قضیه ۲.۳. هر جواب $\mathcal{A}$- بهینه از مسئله (۶.۳) وقتی $\lambda_i > \circ$ ، $i = ۱, ..., p$، یک جواب $\mathcal{A}$- کارای مسئله (۳.۳) است. همچنین هر جواب $\mathcal{A}$- بهینه از مسئله (۶.۳) وقتی $\lambda_i \geq \circ$ ، $i = ۱, ..., p$، یک جواب $\mathcal{A}$- کارای‌ضعیف مسئله (۳.۳) است.

با توجه به نتایج حاصل شده، می‌توان جواب‌های $\mathcal{A}$- مطمئنا کارا، $\mathcal{A}$- مطمئنا کارای ضعیف، $\mathcal{A}$- احتمالا کارا و $\mathcal{A}$- احتمالا کارای ضعیف برای مسئله (۱.۳) بدست آورد.

۴. مثال عددی

مثال ۱.۴. مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی چندهدفه بازه‌ای ناهموار زیر را در نظر بگیرید:

$$Min\ \ z_1=\frac{([2,4],[1,6])x_1+([1.5,3],[0.25,5])x_2+([3,5],[1,8])}{x_1+x_2+2}$$

$$Min\ \ z_2=\frac{([0.5,2],[0.25,4.5])x_1+([3,9],[2,11])x_2+([4,6],[2,7])}{x_1+x_2+2}$$

$$s.t.\quad X=\{x_1,x_2\in\mathbb{R}^2|x_1+x_2\leq 2, 3x_1+2x_2\leq 6, x_1,x_2\geq 0\}. \tag{1.4}$$

با توجه به مسئله (۱.۴)، دو مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی دوهدفه بازه‌ای (۲.۴) و (۳.۴) حاصل می‌شوند:

$$Min\ \ z_1=\frac{[2,4]x_1+[1.5,3]x_2+[3,5]}{x_1+x_2+2}=[\frac{2x_1+1.5x_2+3}{x_1+x_2+2},\frac{4x_1+3x_2+5}{x_1+x_2+2}]$$

$$Min\ \ z_2=\frac{[0.5,2]x_1+[3,9]x_2+[4,6]}{x_1+x_2+2}=[\frac{0.5x_1+3x_2+4}{x_1+x_2+2},\frac{2x_1+9x_2+6}{x_1+x_2+2}]$$

$$s.t.\quad X=\{x_1,x_2\in\mathbb{R}^2|x_1+x_2\leq 2, 3x_1+2x_2\leq 6, x_1,x_2\geq 0\}, \tag{2.4}$$

و

$$Min\ \ z_1=\frac{[1,6]x_1+[0.25,5]x_2+[1,8]}{x_1+x_2+2}=[\frac{x_1+0.25x_2+1}{x_1+x_2+2},\frac{6x_1+5x_2+8}{x_1+x_2+2}]$$

$$Min\ \ z_2=\frac{[0.25,4.5]x_1+[2,11]x_2+[2,7]}{x_1+x_2+2}=[\frac{0.25x_1+2x_2+2}{x_1+x_2+2},\frac{4.5x_1+11x_2+7}{x_1+x_2+2}]$$

$$s.t.\quad X=\{x_1,x_2\in\mathbb{R}^2|x_1+x_2\leq 2, 3x_1+2x_2\leq 6, x_1,x_2\geq 0\}. \tag{3.4}$$

حال با در نظر گرفتن مسئله (۲.۴) و اعمال روش مجموع وزنی وقتی که $\lambda_۱ = \lambda_۲ = \frac{۱}{۲}$ مسئله زیر حاصل می‌شود:

$$Min \;\; z = [\frac{۱/۲۵x_۱+۲/۲۵x_۲+۳/۵}{x_۱+x_۲+۲}, \frac{۳x_۱+۶x_۲+۵/۵}{x_۱+x_۲+۲}]$$

$$s.t. \quad X = \{x_۱, x_۲ \in \mathbb{R}^۲ | x_۱ + x_۲ \leq ۲, ۳x_۱ + ۲x_۲ \leq ۶, x_۱, x_۲ \geq ۰\}. \tag{۴.۴}$$

مسئله (۵.۴) متناظر با مسئله (۴.۴) بدست می‌آید:

$$Min \;\; z = \frac{۱}{۲}(\frac{۴/۲۵x_۱+۸/۲۵x_۲+۹}{x_۱+x_۲+۲})$$

$$s.t. \quad X = \{x_۱, x_۲ \in \mathbb{R}^۲ | x_۱ + x_۲ \leq ۲, ۳x_۱ + ۲x_۲ \leq ۶, x_۱, x_۲ \geq ۰\}. \tag{۵.۴}$$

که یک مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی است که با استفاده از روش ارائه شده در [۱۱] به سادگی حل می‌شود و جواب آن به صورت زیر است:

$$x_۱ = ۲۰, x_۲ = ۰.$$

بدین ترتیب به کمک روش حل پیشنهادی، یک جواب $\mathcal{A}-$ مطمئنا کارا برای مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی چندهدفه بازه‌ای ناهموار (۱.۴) بدست آمد. واضح است که با در نظر گرفتن وزن‌های متفاوت و با توجه به مسائل (۲.۴) و (۳.۴)، جواب‌های گوناگونی برای مسئله (۱.۴) حاصل می‌شود.

۵. نتیجه‌گیری

بهینه‌سازی چندهدفه کسری خطی یکی از مدل‌های موثر و کارآمد برای رویارویی با بسیاری از مسائل روزمره است. از آنجایی که در بسیاری از مسائل دنیای واقعی داده‌ها به طور قطعی در اختیار نیستند، همواره یافتن رویکرد مناسب برای برخورد با عدم قطعیت موضوع بحث برانگیزی است. در این مقاله دسته‌ای از مسائل برنامه‌ریزی چندهدفه کسری خطی با ضرایب بازه‌ای ناهموار در توابع هدف مدنظر قرار گرفته‌اند. متناظر با چنین مسائلی، مفاهیم جواب‌های مختلفی با در نظر گرفتن مفهوم شاخص پذیرش در برنامه‌ریزی بازه‌ای ارائه شده است. جهت دستیابی به جواب‌های تعریف شده در این دسته از مسائل، برنامه‌ریزی بازه‌ای و روش مجموع وزنی در بهینه‌سازی چندهدفه مورد استفاده قرار گرفته‌اند. روش حل ارائه شده مورد بررسی قرار گرفته است و کارایی روش جدید در

مثالی عددی نشان داده شده است. واضح است که ارائه روش‌های حل جدید و کارآمد با ویژگی‌های مناسب همواره می‌تواند به عنوان موضوعی برای تحقیقات آتی مدنظر قرار گیرد.

مراجع

[۱] الله‌دادی، م. (۱۴۰۰) برنامه‌ریزی خطی بازه‌ای، انتشارات دانشگاه سیستان و بلوچستان

[۲] داوری، ز.، ریواز، س.، بهروزی‌فر، م. (۱۴۰۲) روش حلی برای مسائل برنامه‌ریزی خطی چندهدفه بازه‌ای، سیستم‌های فازی و کاربردها. ۱۳ (۲): ۱۹۱-۲۱۳.

[۳] قلی‌نژاد، ش.، ریواز، س. (۱۴۰۰) بررسی مفاهیم جواب‌های مختلف در مسائل برنامه‌ریزی خطی چندهدفه با ضرایب بازه‌ای، تحقیق در عملیات در کاربردهای آن. ۱۸ (۲): ۲۵-۳۵.

[4] R. Arya, P. Singh, S. Kumari, M. Obaidat, An approach for solving fully fuzzy multi-objective linear fractional optimization problems, Soft Computing, 24 (2020), 9105–9119.

[5] R. Arya, P. Singh, Fuzzy efficient iterative method for multi-objective linear fractional programming problems, Mathematics and Computers in Simulation, 160 (2019), 39-54.

[6] A. Batamiz, M. Allahdadi, M. Hladik, Obtaining efficient solutions of interval multiobjective linear programming problems, International Journal of Fuzzy Systems, 22 (2020), 873–890.

[7] HP. Benson, Existence of efficient solutions for vector maximization problems, Journal of Optimization Theory and Applications, 26(4) (1978), 569–580.

[8] M. Borza, AS. Rambely, A new efficient approach to tackle multi objective linear fractional problem with flexible constraints, Journal of Industrial and Management Optimization, 19 (2023), 4180-4198.

[9] M. Borza, M., AS. Rambely, A new method to solve multi-objective linear fractional problems, Fuzzy Information and Engineering, 13 (2021), 323-334.

[10] R. Caballero and M. Hernandez, “The controlled estimation ´ method in the multiobjective linear fractional problem,” Computers and Operations Research, 31(11) (2004), 1821–1832.

[11] A. Charnes, W. Cooper, Programming with Linear Fractional Functions, Naval Research Logistics Quarterly, 9 (1962), 181-186.

[12] M. Chakraborty, S. Gupta, Fuzzy Mathematical Programming for Multi-Objective Linear Fractional Programming Problem, Fuzzy set systems theory, 125 (2002), 335–342.

[13] JL. Cohon, Multiobjective Programming and Planning, New York Academic Press, (1978).

[14] SK. Das, SA. Edalatpanah, T. Mandal, A proposed model for solving fuzzy linear fractional programming problem, Journal of Computational Science, 25 (2018), 367–375.

[15] K. Deb, K. Sindhya, J. Hakanen, Multi-objective optimization, In Decision sciences (pp. 161-200), CRC Press (2016).

[16] A. Ebrahimnejad, An acceptability index based approach for solving shortest path problem on a network with interval weights, RAIRO- Operations Research, 55, S1767-S1787.

[17] M. Ehrgott, Multicriteria Optimization, Springer, (2005).

[18] A. Hamzehee, MA. Yaghoobi, M. Mashinchi, Linear Programming with rough interval coefficients, Journal of Intelligent Fuzzy Systeams, 26 (2014), 1179–89.

[19] J. S. H. Kornbluth and R. E. Steuer, "Multiple objective linear fractional programming," Management Sciences, 27(9) (1981), 1024–1039.

[20] FH. Lotfi, AA. Noora, GR. Jahanshahloo, M. Khodabakhshi, A. Payan, A Linear Programming Approach to test Efficiency in Multi-Objective Linear Fractional Programming problems, Applied Mathematical Modelling, 34(12) (2010), 4179–4183.

[21] Metev and D. Gueorguieva, "A simple method for obtaining weakly efficient points in multiobjective linear fractional programming problems," European Journal of Operational Research, 126(2) (2000), 386–390.

[22] SM. Mirdehghan, H. Rostamzadeh, Finding the Efficiency Status and Efficient Projection in Multi-objective Linear Fractional Programming : A Linear Programming Technique, Journal of Optimization, (2016).

[23] RB. Mustafa, NA. Sulaiman, A New Approach to Solving Linear Fractional Programming Problem with Rough Interval Coefficients in the Objective Function, Ibn AL-Haitham Journal For Pure, 35 (2022), 70-83.

[24] Z. Pawlak, Rough sets, International Journal of Computer and Information Sciences, 11 (1982), 341-356.

[25] M. Rebolledo, Rough intervals-enhancing intervals for qualitative modeling of technical systems, Artificial Intelligence, 170 (2006), 667–685.

[26] A. Sengupta, TK. Pal, A-index for ordering interval numbers, Presented in Indian Science Congress, Delhi University, (1997), 3-8.

[27] Shivani, D. Rani, and A. Ebrahimnejad, On solving fully rough multi-objective fractional transportation problem: development and prospects, Computational and Applied Mathematics, 42(6), (2023).

[28] M. Solomon, H. Zaher, N. Ragaa, An Approach for Solving Multi-Objective Linear Fractional Programming Problem with fully Rough Interval Coefficients, Journal of University of Shanghai for Science and Technology, 23(7) (2021), 94-109.

[29] R. Tanabe, H. Ishibuchi, An easy-to-use real-world multi-objective optimization problem suite, Applied Soft Computing, 89 (2020), 106078.