

مدل سازی داده های زمانی کلاسیک و فازی بر اساس ماشین بردار پشتیبان

حمید حسین خانی، محمدقاسم اکبری*

گروه آمار، دانشگاه بیرجند، بیرجند، ایران

تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۱۱/۲۹

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۰۴/۲۴

نوع مقاله: علمی-پژوهشی

چکیده. در تجزیه و تحلیل سری های زمانی ممکن است با وضعیت هایی روبرو شده باشیم که در آن برخی از ارکان مدل، کمیت های نادقیق باشند. یکی از متداول ترین این وضعیت ها، نادقیق بودن مشاهدات تحت بررسی است. در این مقاله، یک مدل سری زمانی با داده های فازی مبتنی بر رویکرد ماشین بردار پشتیبان پیشنهاد می شود. برای این منظور، با استفاده از ماشین بردار پشتیبان بر اساس توابع هسته و زیان به مدل سازی داده های وابسته به زمان در حالت کلاسیک و فازی پرداخته شده است. به منظور بررسی عملکرد و اثر بخشی مدل سری زمانی فازی پیشنهادی، برخی معیارهای نیکویی برازش استفاده می شوند. نتایج به دست آمده بر اساس یک مثال شبیه سازی شده و یک مثال واقعی، نشان داد که روش پیشنهادی در مقایسه با سایر روش های موجود دارای عملکرد بهتری بوده است.

۱. مقدمه

سری‌های زمانی، مشاهداتی هستند که در طول زمان، جمع‌آوری می‌شوند و به صورت $\{Z_t, t \in T\}$ نشان داده می‌شوند، که در آن t بیانگر زمان و Z یک متغیر تصادفی است. ایجاد مدل آماری برای داده‌های زمانی بر اساس اطلاعات قدیم هدف اصلی تجزیه و تحلیل سری‌های زمانی یک پدیده است که امکان پیش‌بینی در آینده را ایجاد می‌کند. در بسیاری از اتفاقات واقعی زندگی با مجموعه مشاهدات نادقیق نظیر حدود رانندگی در طول روز، دما، قیمت سهام بورسی از جمله کگهر، فولاد، فملی در طول ماه روبرو خواهیم شد که ممکن است یک یا چند فرض از فرض‌هایی که در سری‌های زمانی کلاسیک در نظر گرفته می‌شود برقرار نباشد، مثلاً مشاهدات مربوط به متغیرها نادقیق باشد یا نادقیق گزارش شده باشند، یا متغیرهای تحت مطالعه دارای ارتباطی نادقیق باشند. در چنین شرایطی مدل‌های کلاسیک نمی‌توانند به مطالعه ساختار این مشاهدات بپردازد و با نظریه مجموعه‌های فازی می‌توان به مدل‌بندی این مشاهدات پرداخت.

مطالعات متنوعی در زمینه مدل‌سازی داده‌های سری‌های زمانی با رویکرد فازی توسط محققین مختلفی انجام شده است که در ادامه برخی از مهم‌ترین این مطالعات مرور می‌شوند. سانگ و چیسام (۱۹۹۳) با داده‌های دقیق برای پیش‌بینی پذیرش دانشگاه آلاباما بر اساس مجموعه‌های فازی مدل سری‌های زمانی ارائه داده‌اند. سانگ و همکاران (۱۹۹۵) با تعریف یک عملگر تفاضل و جمع فازی، برای مدل‌بندی سری‌های فازی ایستا مدلی ارائه کرده‌اند. چن (۱۹۹۶) با ساده‌سازی عملگرهای جبری باعث افزایش دقت محاسبات در مدل سانگ و چیسام (۱۹۹۳) گردید. هونگ (۲۰۰۵) نتایج مربوط به مدل سری‌های فازی را به سری‌های نا ایستا و سری‌های زمانی در حالت کلی تعمیم داد. چونهو و همکاران (۲۰۱۳) یک روش ترکیبی مبتنی بر ماشین بردار پشتیبان، فازی‌سازی داده‌ها و خوشه‌بندی برای تجزیه و تحلیل داده‌های سری‌های فازی ارائه دادند. گویی بن و همکاران (۲۰۱۵) و درودیان و نیکایی (۲۰۲۱) با استفاده از روش بردار پشتیبان به مدل‌سازی و پیش‌بینی داده‌های وابسته به زمان در حالت کلاسیک و فازی پرداختند. حسامیان و اکبری (۲۰۱۸) یک رویکرد نیمه پارامتری فازی مبتنی بر تابع هموارساز با روش هسته نادریا-واتسون را برای مدل سری‌های فازی پیشنهاد دادند. زارعی و همکاران (۲۰۲۰) مدل اتو رگرسیو مرتبه اول و مرتبه دوم نیمه پارامتری بر اساس داده‌های سری‌های فازی را بررسی و با استفاده از یک تابع هسته این مدل را با مدل‌های دیگر مقایسه نموده‌اند. اسدالهی (۲۰۲۱) مدلی بر اساس تابع هسته و بدون شرط به صورت مستقیم در معادله هدف استفاده کرده‌اند. حسامیان و همکاران (۲۰۲۲) بر اساس توابع هموارساز فازی یک روش ناپارامتری جمعی را برای مدل‌بندی داده‌های سری‌های فازی ارائه

نموده‌اند. محمدی و همکاران (۱۴۰۳) با استفاده از مفهوم تابع تکیه‌گاه و روابط همبستگی بین داده‌ها به مدل‌بندی و پیش‌بینی الگوی اتورگرسیو برای داده‌های فازی پرداخته‌اند. طاهری و همکاران (۱۴۰۳) بر اساس متغیر فازی تعمیم یافته و ارائه تعریفی جدید برای توابع اتو کواریانس و خود همبستگی بین متغیرهای تصادفی فازی، یک مدل میانگین متحرک مرتبه q را برای تحلیل داده‌های سری زمانی فازی پیشنهاد دادند.

در تمامی مدل‌های فوق و برخی از مدل‌های موجود دیگر از روش‌های روابط فازی، منطق فازی، ناپارامتری، نیمه پارامتری و بعضاً شبکه عصبی برای مدلسازی و پیش‌بینی این داده‌ها استفاده شده است. با وجود پیشرفت‌های اخیر، مدل‌های موجود برای داده‌های سری زمانی فازی با ابعاد بالا یا نویز زیاد دقت کافی ندارند. در این مقاله، روشی مبتنی بر SVM ^۱ ارائه می‌شود که این محدودیت‌ها را رفع می‌کند. یکی از ویژگی‌های روش پیشنهادی در نظر گرفتن روند سری زمانی بوده که با توجه به تابع هسته (هموارساز) در معادلات گنجانده شده است که سبب شده تا مانا بودن یا مانا نبودن داده‌های تحت بررسی خللی در مدل‌سازی ایجاد نکند. علاوه بر این، در روش پیشنهادی مشاهدات ذاتا فازی بوده و با استفاده از شرایطی که در معادله هدف آمده، مدل‌سازی صورت گرفته است.

ادامه مقاله به این صورت سازماندهی شده است: مفاهیم مقدماتی مجموعه‌های فازی و رویکرد ماشین بردار پشتیبان و مدل‌سازی داده‌های کلاسیک وابسته به زمان با روش ماشین بردار پشتیبان در بخش دوم ارائه شده است. در بخش سوم، یک روش جدید بر پایه ماشین بردار پشتیبان برای مدل‌بندی و تجزیه و تحلیل داده‌های سری زمانی در حالت کلاسیک و فازی ارائه شده است. به‌منظور تشریح جزئیات محاسباتی مدل پیشنهادی فازی و بررسی عملکرد آن با سایر روش‌های موجود، یک مثال با داده‌های شبیه سازی شده و یک مثال با داده‌های واقعی در بخش چهارم مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته است. جمع‌بندی و نتیجه‌گیری در بخش پنجم ارائه شده است.

۲. مفاهیم و مقدمات مورد نیاز

۱.۲. اعداد فازی. طاهری (۱۳۷۵) مجموعه فازی \tilde{M} از مجموعه مرجع \mathbb{X} به صورت

$$\{(x, \mu_{\tilde{M}}(x)) : x \in \mathbb{X}\}$$

تابع $\mu_{\tilde{M}}(x) : \mathbb{X} \rightarrow [0, 1]$ نمایش داده می‌شود که در آن

عضویت \tilde{M} است. برای هر $\alpha \in (0, 1]$ ، زیرمجموعه $\tilde{M}_{[\alpha]} = \{x \in \mathbb{X} \mid \mu_{\tilde{M}}(x) \geq \alpha\}$ ،

¹Support Vector Machines

α -برش \tilde{M} نامیده شده و به صورت $[\tilde{M}_{[\alpha]}^L, \tilde{M}_{[\alpha]}^U]$ نشان داده می‌شود که در آن

$$\tilde{M}_{[\alpha]}^L = \inf \left\{ x : x \in \tilde{M}_{[\alpha]} \right\}, \tilde{M}_{[\alpha]}^U = \sup \left\{ x : x \in \tilde{M}_{[\alpha]} \right\}$$

تعریف ۱.۲. مجموعه فازی \tilde{M} از \mathbb{R} را یک عدد فازی گوئیم، هرگاه \tilde{M} تک نمائی باشد و به ازای هر $\alpha \in (0, 1)$ ، α -برش‌های \tilde{M} ، بازه‌های بسته و کراندار باشند.

تعریف ۲.۲. فرض کنید \tilde{M} یک عدد فازی از مجموعه مرجع \mathbb{X} باشد. در این صورت \tilde{M} را یک عدد فازی LR گویند، اگر تابع عضویت آن به صورت

$$\mu_{\tilde{M}}(x) = \begin{cases} L\left(\frac{m-x}{l}\right) & x \leq m, \\ R\left(\frac{x-m}{r}\right) & x > m, \end{cases}$$

تعریف شده که L و R آن توابعی غیر صعودی از \mathbb{R}^+ به $[0, 1]$ هستند و $L(0) = R(0) = 1$ و آن را با نماد $(m; l, r)_{LR}$ نشان می‌دهیم. عدد m را میانه و اعداد مثبت l و r را به ترتیب پهنای چپ و پهنای راست \tilde{M} می‌نامیم. عدد فازی LR معرفی شده یک عدد فازی مثلثی است، هرگاه به ازای هر $x \in (0, 1)$ $R(x) = L(x) = \max\{0, 1-x\}$ و با نماد $(m; l, r)_T$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۳.۲. برای دو عدد فازی $\tilde{M} = (m; l, r)_{LR}$ و $\tilde{B} = (n; l', r')_{LR}$ و $\lambda \in \mathbb{R}$ عملگرهای جبری بین اعداد فازی عبارتند از

$$\begin{aligned} \tilde{M} \oplus \tilde{B} &= (m; l, r)_{LR} \oplus (n; l', r')_{LR} = (m+n; l+l', r+r')_{LR}, \\ \tilde{M} \ominus \tilde{B} &= (m; l, r)_{LR} \ominus (n; l', r')_{RL} = (m-n; l+r', r+l')_{LR}, \\ (1.0.2) \lambda \otimes \tilde{M} &= \begin{cases} (\lambda m; \lambda l, \lambda r)_{LR} & \lambda \geq 0, \\ (\lambda m; -\lambda r, -\lambda l)_{RL} & \lambda < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

۲.۲. ماشین بردار پشتیبان. یکی از روش‌های یادگیری نظارت‌شده است که از آن برای طبقه‌بندی و رگرسیون استفاده می‌شود. اولین بار وپنیک (۱۹۹۵) ماشین بردار پشتیبان را برای مدل‌بندی مسایل رگرسیون تعمیم داد. مبنای کاری دسته‌بندی بردار پشتیبان، دسته‌بندی خطی داده‌ها است. برای این منظور سعی می‌شود خطی انتخاب شود که حاشیه اطمینان بیشتری داشته باشد. پیدا کردن خط بهینه برای داده‌ها به وسیله روش‌های حل مسأله بهینه‌سازی درجه دو که روش‌های

شناخته شده‌ای در حل مسائل محدودیت‌دار هستند، صورت می‌گیرد. قبل از دسته‌بندی خطی، برای اینکه ماشین بتواند داده‌های با پیچیدگی بالا را دسته‌بندی کند، داده‌ها به وسیله تابع ϕ به فضای با ابعاد خیلی بالاتر برده می‌شود.

یک روش حل مسأله بهینه‌سازی در SVM استفاده از تابع لاگراژ و حل مسأله بهینه‌سازی دوگان لاگراژ می‌باشد (ایزنمن (۲۰۰۸)، سایکنز (۲۰۰۲)).

تعریف ۴.۲. تابع $L: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ با خواص زیر یک تابع زیان نامیده می‌شود:

$$۱) L(e) \geq ۰,$$

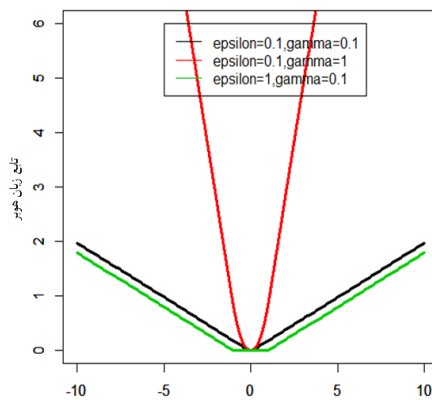
$$۲) L(e) = L(-e),$$

$$۳) |e_m| > |e_n| \Rightarrow L(e_m) \geq L(e_n).$$

در این مقاله از تابع زیان هوبر تعمیم یافته با پارامتر γ و ϵ به فرم

$$(۲.۲) \quad \rho_H^G(e) = \begin{cases} ۰ & ۰ \leq |e| < \epsilon \\ (|e| - \epsilon)^2 & \epsilon \leq |e| < (\gamma + \epsilon) \\ \gamma(2(|e| - \epsilon) - \gamma) & (\gamma + \epsilon) \leq |e| < \infty. \end{cases}$$

استفاده می‌شود. نمودار تابع زیان هوبر تعمیم یافته به ازای مقادیر مختلف ϵ و γ در شکل ۱ آمده است. همانطور که ملاحظه می‌شود به ازای ϵ ثابت، با افزایش γ رفتار تابع زیان به مربع خطا، و



شکل ۱: نمودار تابع زیان هوبر تعمیم یافته به ازای مقادیر مختلف ϵ و γ

به ازای γ ثابت با افزایش ϵ رفتار تابع به تابع زیان قدرمطلق خطا نزدیک می‌شود. بسته به نوع داده‌ها برای تابع زیان هوبر می‌توان پارامترهای ϵ و γ را اعداد ثابت گرفت. که تعداد پارامترهای تابع زیان برای تخمین کم شود. یعنی اینکه اگر داده‌های پرت نداشته باشیم می‌توان $\epsilon = \gamma = 0$ در نظر گرفت یا اگر داده پرت در مدل باشد $\epsilon = \gamma = 1$ در نظر گرفت. که مقدار γ زیاد یعنی اینکه داده پرت زیاد داریم و γ کم نشان دهنده نداشتن داده پرت است.

در مدل‌های غیرخطی داده‌های زمانی فازی نیاز به کاربرد تابع هسته داریم که به صورت زیر است.

تعریف ۵.۲. تابع حقیقی مقدار، نامنفی و انتگرال‌پذیر $K(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ را یک تابع هسته^۱ گویند اگر دارای خواص $\int K(u)du = 1$ ، $K(u) = K(-u)$ ، $K(u) \geq 0$ و $\int uK(u)du = 0$ و $\int u^2K(u)du = \sigma_K^2 < \infty$ باشد.

تعریف ۶.۲. اسدالهی (۲۰۲۱) فرض کنید $\phi : Z \rightarrow F$ نگاشت غیرخطی از فضای $Z \subset \mathbb{R}^d$ به فضای چند بعدی F باشد. برای هر \mathbf{x} و \mathbf{z} عضو فضای ورودی Z ، تابع $\Phi : \mathbb{R}^{2d} \rightarrow \mathbb{R}^+$ به صورت $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \phi(\mathbf{x})^T \cdot \phi(\mathbf{z})$ تعریف می‌شود. قابل ذکر است که در فضای برداری، تابع هسته تعریف شده را می‌توان به صورت زیر نوشت

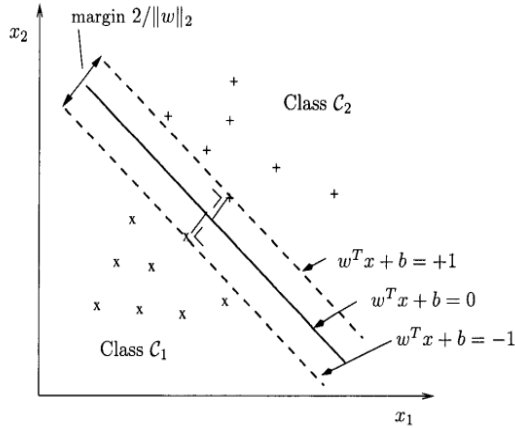
$$(۳.۲) \quad \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = K\left(\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|}{h}\right), \quad h > 0, \quad \mathbf{x}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^d.$$

در این مقاله از هسته نرمال با رابطه $K(u) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \exp(-\frac{1}{4}u^2)$ استفاده شده است.

مجموعه داده‌های $\{x_i, y_i\} \quad i = 1, \dots, n$ را در نظر بگیرید که در آن $\mathbf{x}_i = (x_1, \dots, x_p)^T$ بردار ویژگی‌ها و $y_i \in \{-1, +1\}$ برچسب هستند. معادله ابرصفحه جداکننده برای i امین داده به صورت $\mathbf{w}^T \mathbf{x}_i + b$ در نظر گرفته شده است. اکنون دو ابرصفحه حاشیه‌ای طوری در نظر گرفته شده‌اند که اگر $y_i = +1$ آن‌گاه $\mathbf{w}^T \mathbf{x}_i + b > 1$ و اگر $y_i = -1$ آن‌گاه $\mathbf{w}^T \mathbf{x}_i + b < -1$ است. هدف ماشین بردار پشتیبان یافتن ابرصفحه‌ای است که داده‌های جدایی‌پذیر خطی را جدا کند. در واقع لازم است برای هر \mathbf{x}_i برچسب y_i به درستی پیش‌بینی شود. چیزی که در اینجا اهمیت دارد یافتن مقدار \mathbf{w} و b است و به دنبال ابرصفحه‌ی بهینه خواهیم بود. برای مقایسه‌ی دو ابرصفحه، ابرصفحه‌ای انتخاب شود که حاشیه اطمینان بزرگتری داشته باشد. همانطور که در شکل ۲ دیده می‌شود، ایزنمن (۲۰۰۸) با استفاده از ابرصفحه جداکننده که دقیقاً وسط بین دو ابرصفحه

^۱Kernel Function

حاشیه‌ای قرار دارد، فاصله بین این دو ابر صفحه حاشیه‌ای را برابر با $\frac{2}{\|\mathbf{w}\|}$ گرفت. از آن جایی که



شکل ۲: فاصله بردار پشتیبان‌ها از ابر صفحه بهینه

هدف پیدا کردن ابر صفحه‌ی جداکننده با بیشترین فاصله از نقاط حاشیه‌ای است کفایت $\frac{\|\mathbf{w}\|}{2}$ کمینه شود. به مشاهداتی که روی ابر صفحات حاشیه‌ای قرار می‌گیرند، بردارهای پشتیبان و به فاصله بردارهای پشتیبان تا ابر صفحه‌ی جداکننده (مرز تصمیم‌گیری) حاشیه می‌گویند. به این ترتیب مسئله‌ی بهینه‌سازی مقید

$$(۴.۲) \quad \min_{\mathbf{w}, b} \frac{1}{2} \|\mathbf{w}\|^2 \quad y_i(\mathbf{w}^T \mathbf{x}_i + b) \geq 1$$

ارائه می‌شود و با روش دوگان حل می‌گردد. با استفاده از ضرایب نامنفی لاگرانژ می‌توان مسئله‌ی (۴.۲) را به صورت

$$(۵.۲) \quad \max_{\alpha} \min_{\mathbf{w}, b} : L_p = \frac{1}{2} \|\mathbf{w}\|^2 - \sum_i \alpha_i [y_i(\mathbf{w}^T \mathbf{x}_i + b) - 1].$$

بازنویسی نمود و برای کمینه کردن آن خواهیم داشت

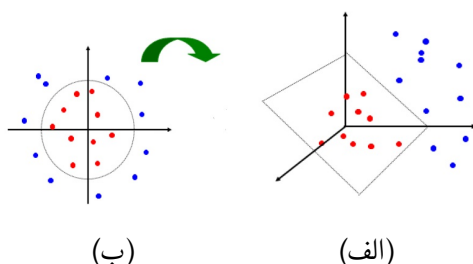
$$(۶.۲) \quad \begin{cases} \frac{\partial L_p}{\partial \mathbf{w}} = 0 \Rightarrow \mathbf{w} = \sum_i \alpha_i y_i \mathbf{x}_i, \\ \frac{\partial L_p}{\partial b} = 0 \Rightarrow \sum_i \alpha_i y_i = 0. \end{cases}$$

پس از جایگذاری روابط (۶.۲) در (۵.۲) دوگان آن به صورت

$$L_D = \sum_i \alpha_i - \frac{1}{\nu} \sum_i \sum_j \alpha_i \alpha_j y_i y_j \mathbf{x}_i^T \mathbf{x}_j$$

محاسبه می‌شود. بنابراین با محاسبه‌ی کمینه L_P یا بیشینه L_D با شرط $\alpha_i \geq 0$ ، می‌توان به جواب نهایی مسئله دست یافت.

تفکیک کننده‌های خطی در شرایطی که داده‌های تحت بررسی دارای پیچیدگی بوده و الگوی مشخصی ندارند دارای عملکرد نسبتاً ضعیفی هستند. یک رویکرد پیشنهادی در چنین وضعیت‌هایی، انتقال داده‌ها به فضایی با بعد بالاتر است. همان‌گونه که در شکل ۳ ملاحظه می‌شود، کلاس بندی داده‌ها به مراتب ساده‌تر شده است. در حالت‌های ذکر شده در بخش‌های گذشته در واقع از حاصل ضرب داخلی داده‌های آموزشی ورودی در بردارهای پشتیبان برای تشکیل جدا کننده‌ی خطی به شکل ابر صفحه استفاده شده است، در اینجا ابتدا داده‌ها را در یک فضای اقلیدسی با ابعاد بالاتر نگاشت نموده سپس از ضرب داخلی عناصر بدست آمده استفاده می‌شود. وپنیک (۱۹۹۵)



شکل ۳: نمایشی از انتقال داده از فضای دو بعدی به فضای سه بعدی الف- فضای سه بعدی ، ب- فضای دو بعدی

نشان داد اگر تابع هسته به صورت $\Phi(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = K_h(\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|) = \varphi(\mathbf{x}_i)^T \varphi(\mathbf{x}_j)$ تعریف شود ، تابع هسته مورد استفاده مناسب بوده و داده‌های جدایی ناپذیر در فضای اصلی در فضای نگاشته شده جدایی پذیر خواهند بود. از این‌رو، جایگزینی تابع هسته می‌تواند الگوریتمی غیرخطی را از الگوریتم خطی ذکر شده ایجاد نماید.

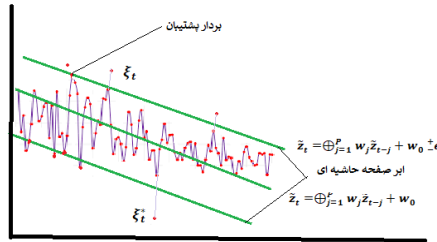
با استفاده از مطالب این بخش یک روش برای مدل‌سازی داده‌های زمانی بیان و خواص آن مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

۳.۲. مدل سازی داده های کلاسیک وابسته به زمان با روش بردار پشتیبان : مدل داده های

زمانی Z_1, Z_2, \dots, Z_T را به صورت

$$Z_t = \sum_{j=1}^P W_j Z_{t-j} + W_0 + e_t = \mathbf{W}_t^T \mathbf{Z}_{tP} + W_0 + e_t \quad t = p+1, \dots, T$$

در نظر بگیرید، که در آن e_t ها متغیرهای تصادفی مستقل با میانگین صفر و واریانس σ^2 هستند. در مدل سازی با استفاده از روش بردار پشتیبان به دنبال برآورد پارامترهای $\mathbf{W}_p = (W_1, \dots, W_p)$ که مقادیری حقیقی اند هستیم. با توجه به نمودار ۴، معادله هدف را به صورت معادله ۸.۲ در نظر بگیرید که در آن ξ_t, ξ_t^* ها، خطا، C پارامتر تنظیم کننده و e مقدار انحراف از مرکز است.



شکل ۴: نمایش بردار پشتیبان داده وابسته به زمان

$$\hat{W} = \min_{\mathbf{W}} \frac{\|\mathbf{W}\|^2}{\gamma} + C \sum_{t=p+1}^T (\xi_t + \xi_t^*) \quad s.t. \begin{cases} Z_t - (\hat{Z}_t + e) \leq \xi_t, \\ (\hat{Z}_t - e) - Z_t \leq \xi_t^*, \\ \xi_t, \xi_t^* \geq 0 \end{cases} \quad (۸.۲)$$

با استفاده از روش ضریب لاگرانژ، معادله ۸.۲ به صورت

$$\begin{aligned} \max_{\alpha} \min_{\mathbf{W}, b} : L_P &= \frac{\|\mathbf{W}\|^2}{\gamma} + C \sum_{t=p+1}^T (\xi_t + \xi_t^*) \\ &- \sum_{t=p+1}^T \alpha_t (\xi_t - Z_t + \mathbf{W}_t^T \mathbf{Z}_{tP} + W_0 + e) \\ &- \sum_{t=p+1}^T \alpha_t^* (\xi_t^* - \mathbf{W}_t^T \mathbf{Z}_{tP} - W_0 + e + Z_t) - \sum_{t=p+1}^T \eta_t^* \xi_t^* - \sum_{t=p+1}^T \eta_t \xi_t \end{aligned} \quad (۹.۲)$$

به دست می‌آید که در آن α_t و α_t^* و η_t و η_t^* ضرایب لاگرانژ هستند. نسبت به W_P و ξ_t^* ، ξ_t ها مشتق گرفته و داریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L_P}{\partial \mathbf{W}} = 0 \Rightarrow \mathbf{W} - \sum_i \alpha_i y_i x_i + \sum_i \alpha_i^* y_i x_i = 0 \Rightarrow \mathbf{W} = \sum_i \alpha_i y_i x_i (\alpha_i - \alpha_i^*) \\ \frac{\partial L_P}{\partial W_0} = 0 \Rightarrow -\sum_i \alpha_i y_i + \sum_i \alpha_i^* y_i = 0 \Rightarrow \sum_i \alpha_i y_i = \sum_i \alpha_i^* y_i \\ \frac{\partial L_P}{\partial \xi_i^*} = 0 \Rightarrow -\sum_i \alpha_i^* + c = 0 \Rightarrow \sum_i \alpha_i^* = c \\ \hspace{15em} \implies \sum_i \alpha_i^* = \sum_i \alpha_i \\ \frac{\partial L_P}{\partial \xi_i} = 0 \Rightarrow -\sum_i \alpha_i + c = 0 \Rightarrow \sum_i \alpha_i = c \end{array} \right.$$

(۱۰.۲)

که پس از جایگذاری معادلات ۱۰.۲ در ۹.۲ دوگان آن به صورت

$$\text{maximize} : L_D = \frac{-\sum_{t \neq K=P+1}^T (\alpha_t + \alpha_t^*) (\alpha_k + \alpha_k^*) \mathbf{Z}_t^T \mathbf{Z}_k}{2} + \sum_{t=P+1}^T (\alpha_t + \alpha_t^*) Z_t - e \sum_{t=P+1}^T (\alpha_t + \alpha_t^*)$$

به دست آمده که شرایط $\sum_{t=P+1}^T (\alpha_t + \alpha_t^*) = 0$ و $c - \sum_{t=P+1}^T (\alpha_t^* + \eta_t^*) = 0$ و همچنین $\alpha_t, \eta_t, \alpha_t^*, \eta_t^* \in [0, c]$ در آن برقرار باشد.

$$\hat{W}_p = \sum_{t=P+1}^T (\hat{\alpha}_t - \hat{\alpha}_t^*) Z_t$$

و مقدار W_0 در حل مسائل بهینه سازی با استفاده از شرایط KKT با توجه به معادلات

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_t (\xi_t - Z_t + \mathbf{W}_t^T \mathbf{Z}_{t_P} + W_0 + e) = 0 \\ \alpha_t^* (\xi_t^* - \mathbf{W}_t^T \mathbf{Z}_{t_P} - W_0 + e + Z_t) = 0 \end{array} \right.$$

یا

$$\left\{ \begin{array}{l} W_0 = Z_t - \mathbf{W}_t^T \mathbf{Z}_{t_P} - e = 0 \quad \alpha_i \in [0, c], \xi_t = 0 \\ W_0 = Z_t - \mathbf{W}_t^T \mathbf{Z}_{t_P} + e = 0 \quad \alpha_i^* \in [0, c], \xi_t^* = 0 \end{array} \right.$$

محاسبه می‌شود و به طور کلی می‌توانیم W_0 را جهت به دست آوردن بردارهای پشتیبان به صورت

$$\hat{W}_0 = \frac{1}{|s|} \sum_{t \in S} (Z_t - \mathbf{W}_t^T \mathbf{Z}_{t_P} - \text{Sign}(\alpha_t - \alpha_t^*) e); \quad s = \{t | 0 < \alpha_t - \alpha_t^* < C\}$$

به دست آوریم. حال اگر در معادله دو گان $\Phi(\mathbf{Z}_{tP}, \mathbf{Z}_{K_P}) = K_h(\|\mathbf{Z}_{tP}, \mathbf{Z}_{K_P}\|)$ را بگذاریم وارد مبحث حالت‌های غیر خطی مشاهدات Z_t نسبت به t خواهیم شد. در این صورت معادله به فرم

$$\hat{\mathbf{Z}}_t = \sum_{t=P+1}^T (\hat{\alpha}_t - \hat{\alpha}_t^*) K(\mathbf{Z}_{tP}, \mathbf{Z}_{K_P})$$

به دست می‌آید. به طور خلاصه ذکر چند نکته لازم است:

۱. اگر مشاهدات Z_t نسبت به t خطی باشند می‌توان از معادلات دوگان برای پیش‌بینی \mathbf{W} استفاده نمود (با استفاده از نرم افزار ممتیکا).

۲. اگر مشاهدات Z_t نسبت به t غیرخطی باشند با توجه به آنچه گذشت از تابع هسته استفاده می‌کنیم.

حال می‌توان یک مدل جدید را با استفاده از تابع هسته جهت مدل‌سازی داده‌های زمانی Z_T, \dots, Z_2, Z_1 به صورت

$$\tilde{Z}_t = \sum_{j=p+1}^T W_j K_h(\mathbf{Z}_t, \mathbf{Z}_j) + e_t$$

معرفی نمود که در آن $\mathbf{Z}_t = (Z_{t-1}, Z_{t-2}, \dots, Z_{t-p})$, $t = p+1, p+2, \dots, T$ ، $\mathbf{Z}_j = (Z_{j-1}, Z_{j-2}, \dots, Z_{j-p})$ ثابت هموارساز و \mathbf{W} ها ضرایب مدل بوده و برای تخمین آن از معادله هدف

$$\min_{\mathbf{W}} \left\{ \frac{\|\mathbf{W}\|^2}{2} + C \sum_{j=p+1}^T \rho(Z_j - \sum_{i=p+1}^T W_i K_h(\mathbf{Z}_t, \mathbf{Z}_j) - W_0) \right\}$$

به طوریکه $K_h(\mathbf{Z}_t, \mathbf{Z}_i) = K\left(\frac{\|\mathbf{Z}_t - \mathbf{Z}_i\|}{h}\right)$ استفاده می‌شود. از مزایای این مدل می‌توان به نکات زیر اشاره نمود:

۱. این معادله هدف برگرفته شده از روش SVM است.
۲. به جای استفاده از خطاهای ξ_t, ξ_t^* از تابع زیان ρ استفاده شده است.
۳. تابع هسته K_h استفاده شده در معادلات دوگان روش بردار پشتیبان، در معادله فوق استفاده شده است.

۴. در برنامه نویسی برای به دست آوردن جواب معادله فوق نسبت به معادلات ۹.۲ زمان پیچش کمتری خواهیم داشت.

۵. مقدار بهینه ثابت هموارساز h در تابع زیان باعث می‌شود که حالت خطی و یا غیر خطی Z_t و داده‌های دور افتاده و تغییرات زیاد در نظر گرفته شوند.

۶. مقدار ثابت هموارساز را می‌توان با استفاده از روش سعی و خطا و یا معیار اعتباریابی متقابل تعمیم یافته واسرمن محاسبه نمود.

۰۷. برای برآورد \hat{Z}_t از تمامی مشاهدات Z_p, \dots, Z_{p+1} از طریق تابع $\sum_{i=p+1}^T W_i K_h(\mathbf{Z}_t, \mathbf{Z}_j)$ که در واقع مجموع وزنی همسایگی به مرکز Z_t و شعاع h می‌باشد، استفاده شده است.

۳. مدل پیشنهادی کلاسیک

با استفاده از تابع هسته K_h ، مدل داده‌های زمانی Z_T, \dots, Z_2, Z_1 را به صورت

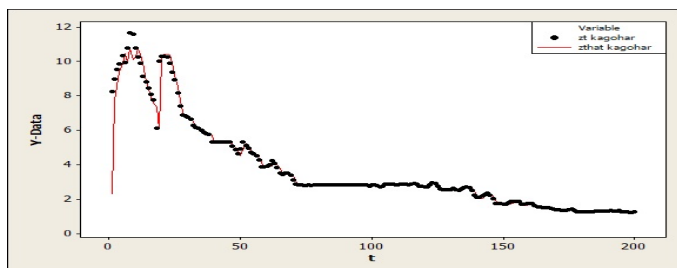
$$Z_t = \sum_{j=p+1}^T W_j K_h(\mathbf{Z}_t, \mathbf{Z}_j) + W_0 + e_t; \begin{cases} t = p + 1, p + 2, \dots, T \\ \mathbf{Z}_t = (Z_{t-1}, Z_{t-2}, \dots, Z_{t-p}) \\ \mathbf{Z}_j = (Z_{j-1}, Z_{j-2}, \dots, Z_{j-p}) \end{cases} \quad (1.3)$$

در نظر بگیرید که در آن $K_h(\mathbf{Z}_t, \mathbf{Z}_i) = K\left(\frac{\|\mathbf{Z}_t - \mathbf{Z}_i\|}{h}\right)$ و مقدار هموار ساز h با استفاده از روش اعتباریابی متقابل تعمیم یافته به دست می‌آید اسدالهی (۲۰۲۱). ضرایب \mathbf{W} با استفاده از معادله هدف

$$\hat{W} = \inf_{\mathbf{W}} \left\{ \frac{\|\mathbf{W}\|^2}{2} + \frac{C}{2} \sum_{t=p+1}^T \rho_H^G(Z_j - \sum_{i=p+1}^T W_i K_h(\mathbf{Z}_t, \mathbf{Z}_i)) - W_0 \right\} \quad (2.3)$$

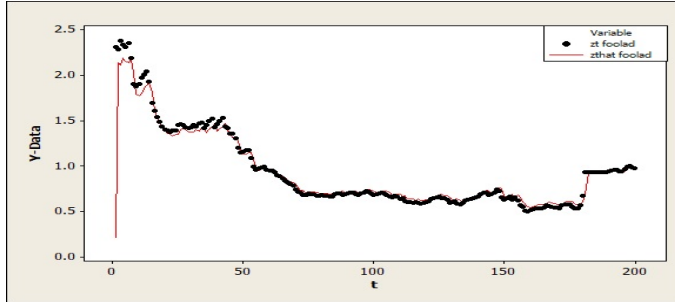
و به کمک نرم افزار *Mathematica* محاسبه می‌شوند.

مثال ۱.۳. تعداد ۲۰۰ داده اخیر مربوط به قیمت نهایی نماد کگهر در بازار سرمایه در نظر گرفته شده است. مدل ۱.۳ را به آن‌ها برازش خواهیم داد و برای مقادیر $e = 0.05$ ، $\gamma = 0.7$ ، $h = 0.2$ ، $c = 5$ ، $p = 1$ شکل برآورد مدل سری زمانی این داده‌ها به صورت نمودار ۵ است.



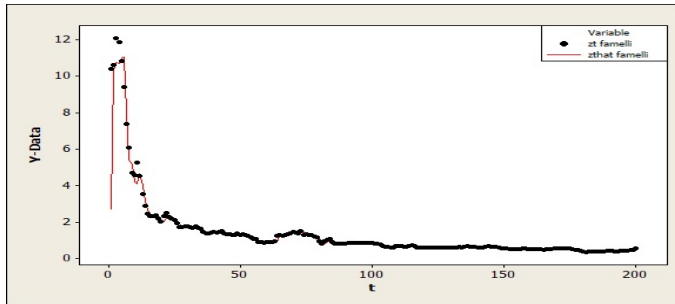
شکل ۵: نمودار برازش شده برای داده‌های کگهر مثال ۱.۳

مثال ۲.۳. تعداد ۲۰۰ داده اخیر مربوط به قیمت نهایی نماد فولاد در بازار سرمایه در نظر گرفته شده است. مدل ۱.۳ را به آن‌ها برازش خواهیم داد و برای مقادیر $e = 0.005$ ، $\gamma = 0.7$ ، $h = 0.2$ ، $c = 5$ و $p = 1$ و هسته نرمال شکل برآورد مدل سری‌زمانی این داده‌ها به صورت نمودار ۶ است.



شکل ۶: نمودار برازش شده برای داده‌های فولاد مثال ۲.۳

مثال ۳.۳. تعداد ۲۰۰ داده اخیر مربوط به قیمت نهایی نماد فملی در بازار سرمایه در نظر گرفته شده است. مدل ۱.۳ را به آن‌ها برازش خواهیم داد و برای مقادیر $e = 0.005$ ، $\gamma = 0.7$ ، $h = 0.2$ ، $c = 5$ و $p = 1$ شکل برآورد مدل سری‌زمانی این داده‌ها به صورت نمودار ۷ است.



شکل ۷: نمودار برازش شده برای داده‌های فازی مثال ۳.۳

۴. مدل پیشنهادی حالت فازی

تاریخچه. در زیر به شرح دو مدل از مقالاتی که اخیراً در رابطه با سری‌زمانی فازی چاپ شده اند می‌پردازیم.

مدل محمدی و همکاران (۱۴۰۳). با استفاده از مفهوم تابع تکیه‌گاه و روابط همبستگی بین داده‌ها به مدل‌بندی و پیش‌بینی الگوی اتورگرسیو برای داده‌های فازی پرداخته‌اند.

تعریف ۱.۴. فرض کنید $\{\tilde{Z}(t), t \in T\}$ سری‌زمانی فازی مثلی باشد. مدل سری‌زمانی اتورگرسیو فازی از مرتبه p به صورت

$$\tilde{Z}(t) = \tilde{\nu} \oplus (\theta_1 \otimes \tilde{Z}(t-1)) \oplus (\theta_2 \otimes \tilde{Z}(t-2)) \oplus \dots \oplus (\theta_p \otimes \tilde{Z}(t-p)) \oplus \tilde{\varepsilon}(t)$$

تعریف می‌شود، که در این مدل $t = p+1, \dots, T$ و

$$\tilde{Z}(t) = (Z^L(t), Z(t), Z^U(t))_T \quad (۱)$$

(۲) بدون کم شدن از کلیت مسئله فرض می‌شود که $\tilde{\nu} = (\circ, \circ, \circ)_T$.

(۳) $\tilde{\varepsilon}(t) = \tilde{\tau} \oplus \varepsilon(t)$ به‌طوری‌که $\varepsilon(t)$ متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع، با میانگین صفر و واریانس σ^2 هستند. $\tilde{\tau} = (-\tau^L, \circ, \tau^U)_T$ که در آن τ^L و τ^U متغیرهای تصادفی مثبت و مستقل هستند و همچنین برای هر t ، از $\varepsilon(t)$ نیز مستقل‌اند. در واقع $\tilde{\varepsilon}(t)$ متغیرهای تصادفی مستقل با میانگین فازی $\tilde{\tau}$ و واریانس σ^2 هستند.

(۴) برای $j = 1, \dots, p$ ، θ_j ها ضرایب حقیقی مقدار نامعلوم هستند که باید برآورد شوند.

باید دقت شود که این مدل به واسطه $\varepsilon(t)$ احتمالی و به واسطه $\tilde{Z}(t)$ امکانی است.

مدل طاهری و همکاران (۱۴۰۳). اتورگرسیو یک مدل سری‌زمانی است که از مشاهدات مراحل زمانی قبلی به‌عنوان ورودی معادله‌ی رگرسیون برای پیش‌بینی مقدار در مرحله‌ی بعدی استفاده می‌کند به‌عبارت دیگر در این مدل، مقدار فعلی سری‌زمانی، به‌صورت خطی با مقادیر گذشته‌ی خود در یک بازه‌ی زمانی به‌عنوان مثال p در ارتباط است.

سری‌زمانی فازی $\tilde{Z}(t)$ با $t = \circ, \underline{+1}, \underline{+2}, \dots$ را در نظر بگیرید. مدل سری‌زمانی فازی اتورگرسیو مرتبه p که با $FAR(p)$ نشان داده می‌شود به‌صورت

$$\tilde{Z}(t) = \tilde{\xi} \oplus_{l=1}^p (\theta_l \otimes \tilde{Z}(t-l)) \oplus \tilde{\varepsilon}_t, \quad t = p+1, p+2, \dots$$

است که در آن

$$\tilde{Z}(t) = (Z(t); l_{\tilde{Z}(t)})_T - ۱$$

$$\tilde{\xi} = (\xi; l_{\xi}, r_{\xi})_T - ۲$$

۳- برای $l = 1, 2, \dots, p$ ، θ_l ها، ضرایب حقیقی مقدار نامعلوم هستند که باید برآورد شوند،

۴- $\tilde{\varepsilon}(t) = \tilde{\mu} \oplus \varepsilon(t)$ ، به طوری که $\varepsilon(t)$ ناهمبسته‌اند،

مذکور به خوبی مدل پیشنهادی زیر داده‌های فازی را مدل نمی‌کند اما نکته حائز اهمیت این است که در مقاله آن‌ها مدل اتورگرسیو در حالت فازی همانند حالت کلاسیک بر اساس همبستگی بین داده‌های مورد نظر مدل شده است.

مدل پیشنهادی. با استفاده از تابع هسته K_h ، مدل داده‌های نادقیق زمانی \tilde{Z}_t ، $t = 0, 1, \dots, T$ را به صورت

$$(2.4) \quad \tilde{Z}_t = (Z_t; l_{Z_t}, r_{Z_t}) = \left(\sum_{i=p+1}^T w_i K_{h_c}(\mathbf{Z}_i, \mathbf{Z}_t) + w_0; \right. \\ \left. \sum_{i=p+1}^T l_{w_i} K_{h_l}(l_{Z_i}, l_{Z_t}) + l_{w_0}, \sum_{i=p+1}^T r_{w_i} K_{h_r}(r_{Z_i}, r_{Z_t}) + r_{w_0} \right)$$

در نظر بگیرید که در آن

$$\begin{cases} \mathbf{Z}_t = (Z_{t-1}, Z_{t-2}, \dots, Z_{t-p}), & \mathbf{Z}_i = (Z_{i-1}, Z_{i-2}, \dots, Z_{i-p}), \\ l_{Z_t} = (l_{Z_{t-1}}, l_{Z_{t-2}}, \dots, l_{Z_{t-p}}), & l_{Z_i} = (l_{Z_{i-1}}, l_{Z_{i-2}}, \dots, l_{Z_{i-p}}), \\ r_{Z_t} = (r_{Z_{t-1}}, r_{Z_{t-2}}, \dots, r_{Z_{t-p}}), & r_{Z_i} = (r_{Z_{i-1}}, r_{Z_{i-2}}, \dots, r_{Z_{i-p}}). \end{cases}$$

$$, K_{h_c}(\mathbf{Z}_i, \mathbf{Z}_t) = K\left(\frac{\|\mathbf{Z}_i - \mathbf{Z}_t\|}{h_c}\right) \text{ و } t = p+1, p+2, \dots, T$$

$$K_{h_r}(\mathbf{Z}_i, \mathbf{Z}_t) = K\left(\frac{\|\mathbf{Z}_i - \mathbf{Z}_t\|}{h_r}\right) \text{ و } K_{h_l}(\mathbf{Z}_i, \mathbf{Z}_t) = K\left(\frac{\|\mathbf{Z}_i - \mathbf{Z}_t\|}{h_l}\right)$$

با استفاده از سه معادله هدف

$$\begin{cases} \hat{w} = \inf_w \left\{ \frac{\|w\|^2}{2} + \frac{C}{2} \sum_{j=p+1}^T \rho_H^G(Z_j - \sum_{i=p+1}^T w_i K_{h_c}(\mathbf{Z}_i, \mathbf{Z}_t)) - W_0 \right\} \\ \hat{l}_w = \inf_w \left\{ \frac{\|w\|^2}{2} + \frac{C_l}{2} \sum_{j=p+1}^T \rho_H^G(l_{Z_j} - \sum_{i=p+1}^T l_{w_i} K_{h_l}(l_{Z_i}, l_{Z_t})) - l_{W_0} \right\} \\ \hat{r}_w = \inf_w \left\{ \frac{\|w\|^2}{2} + \frac{C_r}{2} \sum_{j=p+1}^T \rho_H^G(r_{Z_j} - \sum_{i=p+1}^T r_{w_i} K_{h_r}(r_{Z_i}, r_{Z_t})) - r_{W_0} \right\} \end{cases}$$

و به کمک نرم‌افزار *Mathematica* محاسبه می‌شوند. C ، C_l و C_r پارامتر تنظیم کننده مرکز، ابهام چپ و ابهام راست هستند.

ملاحظه ۲.۴. پارامتر هموار ساز h_c ، h_l و h_r با استفاده از روش اعتباریابی متقابل تعمیم یافته به دست آمده است که مقدار زیاد این پارامتر باعث اربیی و مقدار کم آن باعث واریانس زیاد است. بنابراین مقدار بهینه آن مقداری خواهد بود که ریسک را کمتر کند.

ملاحظه ۳.۴. پارامترهای ε و γ مربوط به تابع زیان هوبر می باشند که مقدار بهینه آن با روش سعی و خطا به دست می‌آید. برای این منظور ابتدا در یک برنامه مقادیر $\{0.999, \dots, 0.002, 0.001\}$ ، $\varepsilon, \gamma \in$

را اختیار می‌کنیم و سپس برای هر کدام از مقادیر زیر مجموعه بالا $MSE_{\varepsilon, \gamma}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$MSE_{\varepsilon, \gamma} = (Z_t - \hat{Z}_t)^2 + (\ell_{Z_t} - \ell_{\hat{Z}_t})^2 + (r_{Z_t} - r_{\hat{Z}_t})^2$$

سپس شکل آن را رسم می‌نماییم. باتوجه به شکل کمترین $MSE_{\varepsilon, \gamma}$ مربوط به مقدار بهینه آن‌ها است.

۵. تحلیل عددی

در این بخش جزئیات محاسباتی و نتایج عددی مدل پیشنهادی در این مقاله ارائه شده است. در این راستا، از یک مثال شبیه‌سازی شده و یک مثال واقعی برای چگونگی عملکرد مدل در مقایسه با سایر مدل‌های موجود در این زمینه استفاده کرده‌ایم.

۱.۵. معیارهای ارزیابی. تاکنون معیارهای ارزیابی متعددی برای مقایسه دقت پیش‌بینی مدل‌ها تحت عنوان شاخص‌های نیکویی برازش، معرفی شده است. در این مقاله از دو معیار میانگین اندازه مشابهت^۱ و میانگین مربعات خطا^۲ استفاده شده است. میانگین اندازه مشابهت (MSM): اندازه مشابهت (شاخص تطبیق) میزان مشابهت دو مجموعه فازی را نسبت به هم نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌شود حتی (2005) ،

$$MSM = \frac{1}{T-p} \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \min \left(\mu_{\tilde{Z}(t)}(x), \mu_{\hat{\tilde{Z}}(t)}(x) \right) dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} \max \left(\mu_{\tilde{Z}(t)}(x), \mu_{\hat{\tilde{Z}}(t)}(x) \right) dx}$$

به طوری که برای هر x ،

$$0 \leq \min \left\{ \mu_{\tilde{Z}(t)}(x), \mu_{\hat{\tilde{Z}}(t)}(x) \right\} \leq \max \left\{ \mu_{\tilde{Z}(t)}(x), \mu_{\hat{\tilde{Z}}(t)}(x) \right\}$$

بنابراین میانگین اندازه مشابهت همواره مقداری بین صفر و یک است. در حالی که

$$\min \left\{ \mu_{\tilde{Z}(t)}(x), \mu_{\hat{\tilde{Z}}(t)}(x) \right\} = \max \left\{ \mu_{\tilde{Z}(t)}(x), \mu_{\hat{\tilde{Z}}(t)}(x) \right\}$$

$MSM = 1$. به عبارت دیگر، هر چه میانگین اندازه مشابهت به یک نزدیکتر باشد نشان‌دهنده عملکرد بهتر مدل است.

¹Mean Similarity Measure

²Root Mean Square Error

میانگین مربعات خطا ($RMSE$): این شاخص بر اساس تفاوت بین برآوردگر و مقدار واقعی پارامتر تحت بررسی به صورت زیر تعریف می‌شود

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n D^2(\hat{Z}(t), \tilde{Z}(t))}{n}}$$

به طوری که

$$D^2(\hat{Z}(t), \tilde{Z}(t)) = \frac{1}{3} \left(|m_{\hat{Z}(t)} - m_{\tilde{Z}(t)}| + c_1 \times |l_{\hat{Z}(t)} - l_{\tilde{Z}(t)}| + c_2 \times |r_{\hat{Z}(t)} - r_{\tilde{Z}(t)}| \right),$$

که در آن

$$c_1 = \int_0^1 L^{-1}(\alpha) d\alpha, \quad c_2 = \int_0^1 R^{-1}(\alpha) d\alpha.$$

هرچه مقدار این معیار کوچکتر باشد، به این معناست که فاصله مشاهدات از برآوردشان کمتر بوده و مدل دارای عملکرد بهتری می‌باشد.

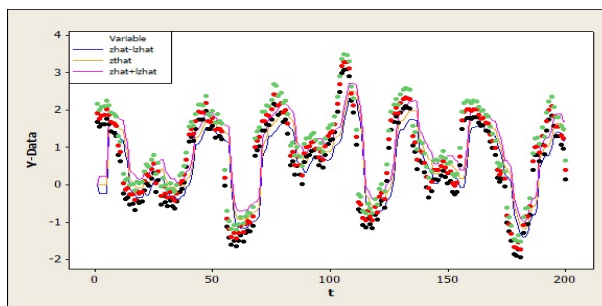
مثال ۱.۵. (داده‌های شبیه‌سازی شده) به منظور تشریح جزئیات محاسباتی و بررسی عملکرد مدل پیشنهادی، تعداد ۲۰۰ داده از یک سری زمانی با مشخصات زیر شبیه سازی شده است

$$Z_t = \frac{|t-1|}{4} + \sin(3t) + \cos(2t) + \varepsilon_i \quad \varepsilon_i \sim N(0, 0.2^2)$$

$$l_{Z_t} = r_{Z_t} = |0.1 \times \exp(-\frac{|x|}{5})| + \varepsilon'_i \quad \varepsilon'_i \sim N(0, 0.05^2)$$

که در آن $L(x) = \max(0, 1-x)$ و مقادیر t از یک تا ۲۰۰ می باشند. لازم به ذکر است که علت انتخاب چنین قالبی برای تولید داده‌های فازی، رونددار بودن داده‌ها می‌باشد. علاوه بر این، پهنای اعداد فازی شبیه‌سازی شده نیز دارای روند می‌باشند.

شبیه‌سازی به تعداد $s = 1, \dots, 10$ مرتبه انجام شده است. پس از آن، مطابق مطالب ذکر شده در بخش چهارم و با در نظر گرفتن مقادیر $p = 1, h_c = 0.2, h_l = h_r = 2, c = 5, \gamma_l = \gamma_r = 0.05, \gamma = 0.5, \varepsilon_l = \varepsilon_r = 0.05, \varepsilon = 0.5, c_l = c_r = 100$ برای هسته نرمال و نمونه ۲۰۰ تایی، با استفاده از نرم‌افزار *Mathematica* نمودار برآورد مدل سری زمانی داده‌های فازی برای مرکز، ابهام چپ و ابهام راست در شکل ۸ نمایش داده شده است. نتایج معیارهای نیکویی برازش برای مدل پیشنهادی و سایر مدل‌های تحت بررسی در این مطالعه، در



شکل ۸: نمودار برازش شده برای داده‌های فازی مثال ۱۰۵

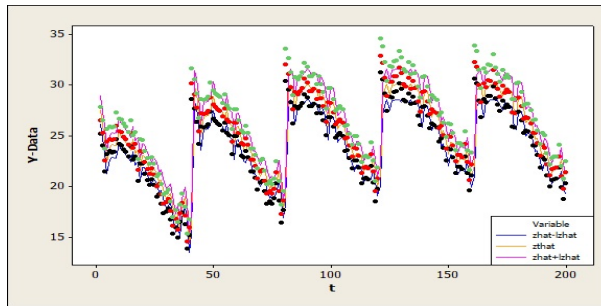
جدول ۱ گزارش شده است که بر اساس نتایج به‌دست آمده در هر سه شاخص ارزیابی مورد استفاده در این مطالعه، روش پیشنهادی مبتنی بر ماشین بردار پشتیبان دارای بهترین عملکرد در بین روش‌های مذکور بوده است ($\overline{MSM} = 0.6574, \overline{RMSE} = 15.214, \overline{MASE} = 9.847$).

جدول ۱: مقایسه مدل پیشنهادی و سایر مدل‌ها بر اساس معیارهای نیکویی برازش

\overline{MASE}	\overline{RMSE}	\overline{MSM}	مدل
۹٫۸۴۷	۱۵٫۲۱۴	۰٫۶۵۷۴	مدل پیشنهادی
۱۵٫۹۵۷	۲۴٫۲۸۴	۰٫۵۱۲۷	حسامیان و اکبری (۲۰۱۸)
۱۶٫۸۲	۲۴٫۹۲۰۷	۰٫۵۰۰۸	زارعی و همکاران (۲۰۲۰)
۱۴٫۰۲۸	۲۱٫۰۲۸	۰٫۵۳۴۷	محمدی و همکاران (۱۴۰۳)
۱۶٫۱۲۴	۲۳٫۴۱۵	۰٫۵۱۴۷	طاهری و همکاران (۱۴۰۳)

مثال ۲۰۵. ۲۰۰ داده‌های فازی مثلثی واقعی گزارش شده از مقاله گازکارچینلوم (۲۰۱۹) در نظر گرفته شده است. با در نظر گرفتن مقادیر $p = 1, h_c = 0.2, h_l = h_r = 2, c = 10, \gamma_l = \gamma_r = 0.1, \gamma = 0.7, \varepsilon_l = \varepsilon_r = 0.05, \varepsilon = 0.5, c_l = c_r = 50$ مدل داده‌های وابسته به زمان داده‌های فازی آنها به صورت نمودار ۹ است.

نتایج معیارهای نیکویی برازش برای مدل پیشنهادی و سایر مدل‌های تحت بررسی در این مطالعه، در جدول ۲ گزارش شده است که بر اساس نتایج به‌دست آمده مشاهده می‌شود که معیار MSM



شکل ۹: نمودار برازش شده برای داده های فازی ۲.۵

مدل پیشنهادی نسبت به مدل های دیگر به یک نزدیکتر است و از طرف دیگر میانگین مربعات خطا ($RSME$) و میانگین قدرمطلق مقیاسی خطا ($MASE$) کمتری دارد بنابراین روش پیشنهادی در این مطالعه عملکردی بهتر نسبت به سایر روش ها را دارا بوده است.

جدول ۲: مقایسه مدل پیشنهادی و سایر مدل ها بر اساس معیارهای نیکویی برازش

MASE	RMSE	MSM	مدل
۷/۳۲۴	۸/۲۶۲	۰/۷۹۴	مدل پیشنهادی
۱۰/۵۶۹	۱۴/۹۳۴	۰/۵۷۶	حسامیان و اکبری (۲۰۱۸)
۱۱/۲۶۴	۱۱/۴۸۳	۰/۵۶۷	زارعی و همکاران (۲۰۲۰)
۱۰/۲۳۳	۱۰/۸۴۷	۰/۵۸۹	محمدی و همکاران (۱۴۰۳)
۹/۸۱۵۴	۱۰/۲۵۱	۰/۶۰۴	طاهری و همکاران (۱۴۰۳)

۶. بحث و نتیجه گیری

در این مقاله، به مدل بندی داده های زمانی نادقیق وابسته به زمان، با استفاده از مفهوم بردار پشتیبان و استفاده از تابع هسته در حالت کلاسیک و فازی پرداخته شده است. عملکرد رویکرد پیشنهادی حالت فازی در این مطالعه با استفاده از یک مجموعه داده شبیه سازی شده و یک مجموعه داده واقعی مورد ارزیابی قرار گرفت. بر اساس نتایج به دست آمده مشاهده گردید که معیار ارزیابی های اندازه مشابهت مدل پیشنهادی نسبت به مدل های دیگر ارائه شده به عدد یک نزدیکتر و همچنین میانگین مربعات خطا مدل مذکور کمتر از سایر مدل های مورد مقایسه شده است.

که نشان از این دارد مدل پیشنهادی بهتر عمل کرده است.
برای آینده تحقیق می‌توان به موارد زیر اشاره نمود.

۱- یک متر مانند زیر برای محاسبه نمودن کرنل سه معادله هدف در یک قالب، معرفی نمود.

$$K\left(\frac{D^2(\tilde{Z}_t + \tilde{Z}_i)}{h}\right)$$

۲- در این مقاله از کرنل گوسی استفاده شده است که می‌توان با کرنل‌های مختلف دیگر نیز نتایج این مدل مورد بررسی قرار گیرد.

۳- می‌توان برای لگ‌های مختلف مثلاً $P \geq 3$ این مدل را مورد بررسی قرار داد.

تشکر و قدردانی

نویسندگان از داوران، سردبیر و ویراستار محترم که پیشنهادات ارزشمند ایشان موجب بهبود مقاله گردید کمال تشکر و قدردانی را دارند.

مراجع

- [۱] طاهری، م. (۱۳۷۵) آشنایی با نظریه مجموعه‌های فازی. انتشارات جهاد دانشگاهی دانشگاه فردوسی مشهد.
- [۲] طاهری، س.، اکبری، م. ق. و حسامیان، غ. ر. (۱۴۰۳)، مدل‌سازی میانگین متحرک بر اساس α -شک متغیرهای تصادفی فازی، مجله علوم آماری، ۱۸، ۱۰۳-۱۲۷.
- [۳] محمدی، ح.، اکبری، م. ق. و حسامیان، غ. ر. (۱۴۰۳)، مدل‌سازی اتو رگرسیو بر اساس تابع تکیه‌گاه متغیرهای تصادفی فازی، مجله علوم آماری، ۱۸، ۱۷۳-۱۹۲.
- [4] Asadolahi, M., Akbari, M.G., Hesamian, G., and Arefi, M. (2021) A robust support vector regression with exact predictors and fuzzy responses. *International Journal of Approximate Reasoning*, 132, 206-225.
- [5] Bazaraa, M. S., Jarvis, J. J. and Sherali, H. D. (2010) *Linear Programming and Network Flows*, 4th Edition. New York: Wiley.
- [6] Cai, z. (2001) "Weighted Nadaraya-Watson regression estimation", *Statistics and Probability Letters*, 51,307-318.
- [7] Chen, S. (1996) Forecasting enrollments based on fuzzy time series, *Fuzzy Sets and Systems*, 81, 311-319.
- [8] Doroudyan, M. H. and Niaki, S. T. A. (2021) Pattern recognition in Financial surveillance with the ARMA-GARCH time series model using support vector machine, *Expert Systems with Applications*.
- [9] Ethem, A. (2004) *Introduction to Machine Learning*. The MIT Press Cambridge, Massachusetts London.

- [10] GascardJinlun, G.C. and Rafizadeh, Z. (2019) "Rapid decline of arctic sea ice volume, causes and consequences", *The Cryosphere Discuss*, 1-29.
- [11] Gui, B., Wei, X., Shen, Q., Qi, J. and Guo, L. (2015) Financial time series forecasting using support vector machine, *IEEE*.
- [12] Hesamian, G. and Akbari, M.G. (2018) A semi-parametric model for time series based on fuzzy data. *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, 26, 2953-2666.
- [13] Hesamian, G., Torkian, F. and Yarmohammadi, M. (2022) A fuzzy non-parametric time series model based on fuzzy data. *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, 19, 61-72.
- [14] Hojati, M., Bector, C.R. and Smimou, K. (2005) A simple method for computation of fuzzy linear regression. *European Journal of Operational Research*, 166, 172–184.
- [15] Hong, D. (2005) A note on fuzzy time-series model. *Fuzzy Sets and Systems*, 155,309–316.
- [16] Izenman, A. J. (2008) *Modern Multivariate Statistical Techniques (Regression, Classification, and Manifold Learning)*, *International Statistical Review*.
- [17] Ruan, J., Wang, X. and Shi, Y. (2013) Developing fast predictors for large-scale time series using fuzzy granular support vector machines . *Applied Soft Computing Journal*, 13, 3981-4000.
- [18] Song, Q. and Chissom, B. S. (1993) Fuzzy time series and its models. *Fuzzy Sets and Systems*, 54, 269–277.
- [19] Song, Q., Leland, R. P. and Chissom, B. S. (1995) A new fuzzy time-series model of fuzzy number observations. *fuzzy sets and systems*, 73, 341–348.
- [20] Suykens, J. A. K., Gestel, J. V., Brabanter, J. D., Moor, B. D. and Vandewalle, J. (2002) Least squares support vector machines. *World Scientific Pub. Co., Singapore*, 29-55.
- [21] Vapnik, V. (1995) *The Nature of Statistical Learning Theory*, Springer-Verlag . New York.
- [22] Zadeh, L.A. (1956) "Fuzzy sets". *Information and Control*, 8, 338-353.
- [23] Zarei, R., Akbari, M. G. and Chaci, J. (2020) Modeling autoregressive fuzzy time series data based on semi-parametric methods. *Soft Computing*, 24, 7295–7304.