

منطق فازی بر بازه یکه ناستاندارد

مرتضی منیری* و محمدعمار امینی

گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه شهید بهشتی، تهران، ایران

تاریخ دریافت: ۱۴۰۴/۰۶/۱۵ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۰۷/۲۷

نوع مقاله: علمی- پژوهشی

چکیده. در این مقاله به گسترش منطق لوکاشویچ از بازه استاندارد [۱, ۰] به بازه ناستاندارد [۱, ۰]* می‌پردازیم. این بازه علاوه بر اعداد حقیقی بین صفر و یک، شامل اعداد بی‌نهایت نزدیک به این مقادیر نیز هست. ابتدا مروری بر منطق فازی از دید ریاضی و همچنین مقدمات آنالیز ناستاندارد خواهیم داشت. سپس با استفاده از اصل انتقال در آنالیز ناستاندارد نشان می‌دهیم که ساختار جبری و ویژگی‌های منطقی MV در بازه ناستاندارد نیز حفظ می‌شوند. بنابراین، بدون نیاز به تغییر در اصول یا قواعد استنتاج، می‌توان از مقادیر ناستاندارد برای مدل‌سازی مفاهیم زبانی نظیر «قابل چشم‌پوشی» یا «تا حدود زیادی پذیرفتنی» بهره برد. افزون بر این، ظرفیت‌های کاربردی این چارچوب در حوزه‌هایی چون سیستم‌های خبره، کنترل فازی و هوش مصنوعی قابل توجه است.

۱. مقدمه

منطق‌های فازی با جایگزین کردن بازه یکه استاندارد [۱, ۰] به جای مجموعه دو عضوی {۰, ۱} از درجات صدق منطق کلاسیک، ابزار مناسبی برای استدلال در شرایط عدم قطعیت و

2010 Mathematics Subject Classification. 03B52 ; 03E72

* Corresponding author

E-mails: ezmoniri@gmail.com, mohammad.ammar.amini@gmail.com.

عبارات و کلمات کلیدی. منطق فازی، آنالیز ناستاندارد، اعداد ابرحقیقی، درستی و تمامیت.

تقریب فراهم آورده‌اند. در میان آن‌ها، منطق 1BL که مبتنی بر t -نرم‌های پیوسته و شرطی‌های الحاقی آن‌ها است، به‌عنوان یک چارچوب کلی مطرح می‌شود که با افزودن شرایط خاص به آن، منطق‌های لوکاشویچ، گودل و ضربی به دست می‌آیند. ([۶]) این منطق به حوزه منطق مرتبه اول نیز گسترش یافته است. ([۴])

با وجود کارایی قابل قبول بازه استاندارد [۰, ۱]، در بسیاری از موقعیت‌ها نیاز به ظرافت بیشتر در بیان درجات صدق احساس می‌شود. برای نمونه، عباراتی همچون «تقریباً درست»، «قابل چشم‌پوشی» یا «تا حدود زیادی پذیرفتنی» مفاهیمی را القا می‌کنند که بهتر است با درجاتی بی‌نهایت نزدیک به مقادیر حقیقی مدل‌سازی شوند. چنین درجاتی را می‌توان با استفاده از اعداد ناستاندارد بیان کرد.

مطالعه اعداد ناستاندارد، ریشه در حساب دیفرانسیل و انتگرال نیوتون دارد که به‌طور ضمنی، از اعداد بی‌نهایت کوچک استفاده کرد. ماهیت پارادوکس‌گونه این اعداد اعتراضاتی در پی داشت؛ اما کاربردهای فراوان حساب دیفرانسیل و انتگرال مانع از جدی گرفتن آن‌ها شد. در قرن نوزدهم، ریاضیدانانی همچون کوشی^۲، وایرستراس^۳، ریمان^۴ و دکیند^۵، به دقیق کردن آنالیز ریاضی مشغول شدند و نتیجه آن حذف اعداد بی‌نهایت کوچک از ریاضیات بود. اما در قرن بیستم دوباره این مفهوم، این بار با استفاده از روش‌های منطق ریاضی جدید، مطرح شد. ([۱، ۱۱])

هدف این مقاله، بررسی نحوه گسترش مجموعه درجات صدق منطق‌های فازی، به‌ویژه منطق لوکاشویچ، به بازه ناستاندارد است. ما نشان خواهیم داد که این گسترش نه تنها ساختار این منطق‌ها را تغییر نمی‌دهد، بلکه امکان مدل‌سازی ریاضی ظریف‌تر مفاهیم مبهم را فراهم می‌آورد. این ویژگی در کاربردهایی مانند مدل‌سازی اصلاح‌گرهای زبانی («تقریباً»، «قابل چشم‌پوشی»)، طراحی کنترلرهای فازی با ناحیه مرده، و تصمیم‌گیری‌های چندمعیاره با آستانه‌های حساس، اهمیت دارد. از طرف دیگر، استفاده از اعداد حقیقی ناستاندارد یا به عبارت دیگر ابرحقیقی^۶، می‌تواند زمینه‌ساز معرفی دستگاه‌های منطقی و جبری جدید شود و موج جدیدی در مطالعه نظری سیستم‌های فازی ایجاد کند.

¹Basic Logic

²Augustin-Louis Cauchy

³Karl Weierstrass

⁴Georg Friedrich Bernhard Riemann

⁵Richard Dedekind

⁶hyperreal

۲. منطق فازی از دید ریاضی

در این فصل، مروری بر منطق فازی خواهیم داشت. مراجع اصلی این فصل، [۳]، [۶] و [۹] هستند.

۱.۱.۲. t -نرم‌ها و منطق‌های وابسته.

تعریف ۱.۱.۲ (استلزام فازی). نگاشت $[0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$: یک «استلزام فازی» نامیده می‌شود هرگاه (اگر به جای $(x, y) \Rightarrow$ بنویسیم $x \Rightarrow y$):

$$0 \Rightarrow 0 = 1, \quad 0 \Rightarrow 1 = 1, \quad 1 \Rightarrow 1 = 1, \quad 1 \Rightarrow 0 = 0$$

به عبارت دیگر، با محدود کردن مجموعه متغیرها به $\{0, 1\}$ ، همان جدول ارزش استلزام کلاسیک بدست آید.

تعریف ۲.۲ (t -نرم پیوسته). عمل دوتایی $T : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ ، یک «اشتراک فازی» (یا «نرم مثلثی» یا « t -نرم») نامیده می‌شود اگر به ازای هر $x, y, z, x_1, x_2, y_1, y_2$ در $[0, 1]$ داشته باشیم:

$$(1) \text{ همانی (مرزی): } T(x, 1) = x$$

$$(2) \text{ جابجایی: } T(x, y) = T(y, x)$$

$$(3) \text{ شرکت‌پذیری: } T(x, T(y, z)) = T(T(x, y), z)$$

$$(4) \text{ یکنوایی: اگر } x_1 \leq x_2 \text{ و } y_1 \leq y_2 \text{ آن‌گاه } T(x_1, y_1) \leq T(x_2, y_2)$$

یک t -نرم را یک « t -نرم پیوسته» می‌نامیم اگر به‌عنوان یک تابع از $[0, 1]^2$ به $[0, 1]$ پیوسته باشد.

مثال ۳.۲ (سه t -نرم اصلی). • **مینیم:** $T_m(x, y) = \min\{x, y\}$

• **ضربی:** $T_P(x, y) = x \cdot y$

• **لوکاشویچ:** $T_L(x, y) = \max\{0, x + y - 1\}$

هر سه t -نرم بالا، از چپ و راست پیوسته هستند.

تعریف ۴.۲ (R -استلزام یا شرط الحاقی). برای یک t -نرم از چپ پیوسته T ، نگاشت زیر

$$\overset{T}{\Rightarrow} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$$

با تعریف

$$x \Rightarrow_T y = \sup\{z \in [0, 1] \mid T(x, z) \leq y\}$$

« R -استلزام» (یا «استلزام باقی مانده‌ای») مبتنی بر T نامیده می‌شود.

این تعریف، وجود و یکتایی \Rightarrow_T را تضمین می‌کند.

به‌علاوه، هر R -استلزام، در تعریف استلزام فازی صدق می‌کند و بنابراین یک استلزام فازی است.

گزاره ۵.۲ (ویژگی‌های پایه‌ای استلزام باقی مانده‌ای). به ازای هر t -نرم از چپ پیوسته T و هر $x, y, z, x_1, x_2, y_1, y_2 \in [0, 1]$ ، خواص زیر برقرارند:

- خاصیت بازتابی: $x \Rightarrow_T x = 1$
- خاصیت یکنوایی: اگر $x_1 \leq x_2$ و $y_1 \leq y_2$ آنگاه $(x_1 \Rightarrow_T y) \leq (x_2 \Rightarrow_T y)$
- و $(x \Rightarrow_T y_1) \leq (x \Rightarrow_T y_2)$
- خواص مرزی: $(x \Rightarrow_T 1) = 1$ ، $(0 \Rightarrow_T y) = 1$ و $(1 \Rightarrow_T y) = y$
- خاصیت هم‌ارزی ترتیبی: $x \leq y$ اگر و تنها اگر $(x \Rightarrow_T y) = 1$
- قانون قطع: $T(x, x \Rightarrow_T y) \leq y$

گزاره ۶.۲ (قانون باقی مانده). اگر T یک t -نرم از چپ پیوسته و $R \Rightarrow_T$ -استلزام مبتنی بر آن باشد، آنگاه به ازای هر $x, y, z \in [0, 1]$ ، رابطه زیر برقرار است:

$$T(x, z) \leq y \text{ اگر و تنها اگر } z \leq (x \Rightarrow_T y)$$

این خاصیت، «قانون باقی مانده»^۱ نامیده می‌شود که بیان می‌کند \Rightarrow_T دقیقاً باقی مانده t -نرم T است.

مثال ۷.۲. (R -استلزام‌های متناظر با سه t -نرم اصلی)

- R -استلزام مبتنی بر t -نرم مینیمم، به صورت «اگر $x \leq y$ آنگاه $x \Rightarrow_G y = 1$ و در غیر این صورت y » است و «استلزام گودل» نامیده می‌شود.
- R -استلزام مبتنی بر t -نرم ضربی، به صورت «اگر $x \leq y$ آنگاه $x \Rightarrow_P y = 1$ و در غیر این صورت y/x » است و «استلزام ضربی یا گوگن» نامیده می‌شود.

^۱Residuation Law

• R - استلزام مبتنی بر t -نرم لوکاشویچ، به صورت

$$x \stackrel{\text{L}}{\Rightarrow} y = \min\{1, 1 - x + y\}$$

است و «استلزام لوکاشویچ» نامیده می‌شود.

۲.۲. مشبکه و BL -جبر.

تعریف ۸.۲ (مشبکه). یک «مشبکه» روی مجموعه غیرتهی L ، ساختاری جبری به صورت

$$\mathcal{L} = (L, \wedge, \vee, \downarrow, \uparrow)$$

از نوع (\ast, \ast, \ast, \ast) است به طوری که برای هر $x, y, z \in L$ ، ویژگی‌های زیر برقرار باشد:

- (۱) جابجایی: $x \vee y = y \vee x$ و $x \wedge y = y \wedge x$
- (۲) شرکت‌پذیری: $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$ و $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$
- (۳) جذب: $(x \vee y) \wedge x = x$ و $(x \wedge y) \vee x = x$
- (۴) مرزها: $x \vee \downarrow = x$ و $x \wedge \uparrow = x$

همچنین روی L ، رابطه ترتیب جزئی \leq به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$x \leq y \text{ اگر و تنها اگر } x \wedge y = x \text{ (یا به طور معادل } x \vee y = y)$$

تعریف ۹.۲ (مشبکه باقی‌مانده‌ای). یک «مشبکه باقی‌مانده‌ای»^۱، یک ساختار جبری به صورت

$$\mathcal{A} = (A, \wedge, \vee, \odot, \Rightarrow, \downarrow, \uparrow)$$

از نوع $(\ast, \ast, \ast, \ast, \ast, \ast)$ است به طوری که:

• $(A, \wedge, \vee, \downarrow, \uparrow)$ یک مشبکه کران‌دار است که \downarrow کران پایین و \uparrow کران بالای آن است.

• (A, \odot, \uparrow) یک تکوار^۲ جابجایی است؛ یعنی برای هر $x, y, z \in L$ دارای خواص زیر است:

- (۱) شرکت‌پذیری: $(x \odot y) \odot z = x \odot (y \odot z)$
- (۲) عضو همانی: $x \odot \uparrow = x = \uparrow \odot x$
- (۳) جابجایی: $x \odot y = y \odot x$

^۱residuated lattice

^۲monoid

• قانون باقی مانده: $(x \odot z) \leq y$ اگر و تنها اگر $z \leq (x \Rightarrow y)$

تعریف ۱۰.۲ (BL -جبر). یک « BL -جبر»، یک مشبکه باقی مانده ای است که دارای خواص زیر باشد:

• پیش خطی: $(x \Rightarrow y) \vee (y \Rightarrow x) = \uparrow$

• تقسیم پذیری: $x \wedge y = x \odot (x \Rightarrow y)$

قضیه ۱۱.۲. اگر T یک t -نرم پیوسته باشد، آنگاه ساختار

$$([\circ, \uparrow], \min, \max, T, \Rightarrow, \circ, \uparrow)$$

یک BL -جبر است.

می توان ثابت کرد که هر t -نرم پیوسته روی $[\circ, \uparrow]$ ، ترکیب خاصی از سه t -نرم گودل، ضربی و لوکاشویچ است.

تعریف ۱۲.۲ (MV -جبر). یک BL -جبر $(A, \wedge, \vee, \odot, \Rightarrow, \downarrow, \uparrow)$ یک MV -جبر است هرگاه اتحاد $(x \Rightarrow \circ) \Rightarrow \circ$ در آن برقرار باشد.

۳. آنالیز ناستاندارد، اعداد ابرحقیقی و اصل انتقال

در این فصل، مروری مختصر بر مفاهیم پایه ای آنالیز ناستاندارد خواهیم داشت. مراجع اصلی عبارت هستند از [۵]، [۱۰] و [۱۱].

تعریف ۱.۳ (فرافیلتر). یک «فرافیلتر»^۱ روی مجموعه اعداد طبیعی (\mathbb{N}) ، مجموعه ای چون \mathcal{U} متشکل از زیرمجموعه های \mathbb{N} است که شرایط زیر را داشته باشد:

• $\emptyset \notin \mathcal{U}$

• اگر $A \in \mathcal{U}$ و $A \subseteq B \subseteq \mathbb{N}$ ، آنگاه $B \in \mathcal{U}$

• اگر $A, B \in \mathcal{U}$ ، آنگاه $A \cap B \in \mathcal{U}$

• برای هر $A \subseteq \mathbb{N}$ ، دقیقاً یکی از دو مجموعه A یا $\mathbb{N} \setminus A$ در \mathcal{U} است.

یک فیلتر، اصلی است هرگاه دقیقاً متشکل از همه مجموعه های شامل یک مجموعه خاص در \mathbb{N} باشد. یک مثال از فرافیلتر، فرافیلتر اصلی در نقطه $n_0 \in \mathbb{N}$ است که شامل تمام زیرمجموعه های A از \mathbb{N} می شود که $n_0 \in A$. اما در آنالیز ناستاندارد، به یک فرافیلتر غیر

^۱ultrafilter

اصلی نیاز داریم که وجود آن از اصل انتخاب ناشی می‌شود و می‌توان اثبات کرد که در حد یکریختی، یکتا است.

تعریف ۲.۳ (تقریباً همه‌جا). گوئیم خاصیت $P(x_1, \dots, x_k)$ تقریباً همه‌جا (a.e.) در \mathbb{N} برقرار است اگر به‌ازای فرافیلتر غیراصلی \mathcal{U} ، $\{\bar{n} | P(\bar{n})\}$ در \mathcal{U} باشد، جایی که \bar{n} یک دنباله k -عضوی دلخواه از اعضای \mathbb{N} است.

تعریف ۳.۳ (اعداد ابرحقیقی). مجموعه دنباله‌های نامتناهی از اعداد حقیقی مانند $\langle x \rangle = \langle x_1, x_2, x_3, \dots \rangle$ با \mathbb{R}^∞ نشان داده می‌شود. هر عمل روی اعداد حقیقی را می‌توان با تعریف جمله‌به‌جمله، به عملی روی \mathbb{R}^∞ گسترش داد؛ برای مثال:

$$\langle a \rangle + \langle b \rangle = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots \rangle$$

و یا

$$\max\{\langle a \rangle, \langle b \rangle\} = \langle \max\{a_1, b_1\}, \max\{a_2, b_2\}, \dots \rangle$$

برای هر $\langle a \rangle, \langle b \rangle \in \mathbb{R}^\infty$ می‌نویسیم $a \stackrel{a.e.}{=} b$ هرگاه برای $a_i = b_i$ تقریباً همه‌جا برقرار باشد. علاوه بر این، هر حکم دیگری در مورد اعداد حقیقی را می‌توان به همین شیوه به \mathbb{R}^∞ گسترش داد؛ برای مثال، $\langle a \rangle \leq \langle b \rangle$ اگر و فقط اگر $a_i \leq b_i$ تقریباً همه‌جا برقرار باشد. مجموعه رده‌های هم‌ارزی تعریف‌شده بر حسب $\stackrel{a.e.}{=}$ ، حلقه‌ای خارج‌قسمتی روی \mathbb{R}^∞ تشکیل می‌دهد که \mathbb{R}^* نامیده می‌شود. هر کلاس $[\langle x \rangle] \in \mathbb{R}^*$ یک «عدد ابرحقیقی» نامیده می‌شود. می‌توان دید که \mathbb{R}^* شامل همه \mathbb{R} نیز هست؛ زیرا هر $r \in \mathbb{R}$ را می‌توان با رده هم‌ارزی $[\langle r, r, r, \dots \rangle]$ یکی در نظر گرفت. اگر دو دنباله $\langle x \rangle$ و $\langle y \rangle$ در یک رده هم‌ارزی باشند، می‌نویسیم $\langle x \rangle \equiv \langle y \rangle$. اعمال جبری روی \mathbb{R}^* به‌صورت مؤلفه‌ای تعریف می‌شوند؛ برای مثال، $[\langle x \rangle] + [\langle y \rangle] = [\langle x \rangle + \langle y \rangle]$ و $[\langle x \rangle] \cdot [\langle y \rangle] = [\langle x \rangle \cdot \langle y \rangle]$ و ترتیب روی \mathbb{R}^* نیز به این صورت تعریف می‌شود:

$$[\langle x \rangle] \leq [\langle y \rangle] \quad \text{هرگاه} \quad \langle x \rangle \leq \langle y \rangle \quad \text{a.e.}$$

می‌توان نشان داد که تعریف‌های بالا، مستقل از انتخاب نماینده هستند؛ یعنی اگر $\langle x \rangle \equiv \langle x' \rangle$ و $\langle y \rangle \equiv \langle y' \rangle$ ، آنگاه به‌طور مثال:

$$[\langle x \rangle] + [\langle y \rangle] = [\langle x' \rangle] + [\langle y' \rangle] \quad (۱)$$

$$[\langle x \rangle] \cdot [\langle y \rangle] = [\langle x' \rangle] \cdot [\langle y' \rangle] \quad (۲)$$

$$(۳) \quad \langle x \rangle \leq \langle y \rangle \text{ اگر و فقط اگر } \langle x' \rangle \leq \langle y' \rangle \text{ a.e.}$$

قضیه ۴.۳. \mathbb{R}^* با عملها و ترتیب تعریف شده، یک میدان مرتب است. ضمناً برای هر دو عنصر $\langle x \rangle, \langle y \rangle \in \mathbb{R}^*$ ، از میان سه حالت $\langle x \rangle < \langle y \rangle$ و $\langle x \rangle = \langle y \rangle$ و $\langle x \rangle > \langle y \rangle$ دقیقاً یکی برقرار است.

با توجه به تعریف اعداد ابرحقیقی و دو لم اخیر، می توان گفت \mathbb{R}^* گسترشی از \mathbb{R} است و می توان \mathbb{R} را در آن نشانند.

تعریف ۵.۳. (بی نهایت کوچک، کران دار، بی نهایت نزدیک). $x \in \mathbb{R}^*$ یک «عدد بی نهایت کوچک» نامیده می شود اگر برای هر $n \in \mathbb{N}$ داشته باشیم $|x| < 1/n$. $x \in \mathbb{R}^*$ یک «عدد کران دار» یا «عدد محدود» نامیده می شود اگر برای حداقل یک $n \in \mathbb{N}$ داشته باشیم $|x| < n$. به علاوه، هر x و y عضو \mathbb{R} «بی نهایت نزدیک به هم» گفته می شوند و می نویسیم $x \approx y$ هرگاه $x - y$ بی نهایت کوچک باشد. x بی نهایت بزرگ است هرگاه $1/x$ بی نهایت کوچک باشد.

در تعریف فوق، تابع قدرمطلق به طور طبیعی به اعداد ابرحقیقی گسترش یافته است. (پاراگراف پس از لم ۸.۳ را ببینید.)

مثال ۶.۳. (۱) $\langle 1, \frac{1}{p}, \frac{1}{q}, \dots \rangle$ یک عدد بی نهایت کوچک و محدود است.

(۲) $\langle 1, 2, \dots \rangle$ یک عدد بی نهایت بزرگ است.

لم ۷.۳. (لم و تعریف جزء استاندارد). به ازای هر عدد ابرحقیقی کران دار x ، یک عدد حقیقی یکتا وجود دارد که بی نهایت به x نزدیک است. این عدد حقیقی را «جزء استاندارد x » می نامیم و با $st(x)$ نمایش می دهیم. برای هر عدد حقیقی r داریم $st(r) = r$.

لم ۸.۳. (خواص پایه ای جزء استاندارد). برای هر $x, y \in \mathbb{R}^*$ کران دار و $a \in \mathbb{R}$ داریم:

- یکنوایی: اگر $x \leq y$ آن گاه $st(x) \leq st(y)$
- خواص جبری: $st(x+y) = st(x) + st(y)$ و $st(x \cdot y) = st(x) \cdot st(y)$
- کرانها و توابع min و max : اگر $0 \leq x, y \leq 1$ آن گاه
 - (۱) $st(\min\{x, y\}) = \min\{st(x), st(y)\}$
 - (۲) $st(\max\{x, y\}) = \max\{st(x), st(y)\}$

گسترش مجموعه ها، رابطه ها و تابع ها از \mathbb{R} به \mathbb{R}^* ، به نحو طبیعی صورت می گیرد. برای مثال، هر $A \subseteq \mathbb{R}$ به مجموعه A^* گسترش می یابد که هریک اعضای آن برحسب رده ای از

دنباله‌ها تعریف می‌شود که جملات آن تقریباً همگی در A هستند. گسترش توابع نیز به صورت مؤلفه به مؤلفه تعریف می‌شود. گاهی مواقع، یک شیء ریاضی و گسترش ناستاندارد آن را با یک نماد واحد نشان می‌دهیم.

برای کار با آنالیز ناستاندارد، عموماً از «اصل انتقال» استفاده می‌کنیم که بسیار راه‌گشا است. اصل انتقال بیان می‌کند که هر جمله صوری ریاضی که فقط با استفاده از زبان میدان‌های مرتب (شامل سورها، روابط و عملگرهای جبری تعریف شده روی اعداد حقیقی) بیان شده باشد (یا برحسب آن‌ها تعریف پذیر باشد)، اگر در ساختار \mathbb{R} برقرار باشد، آن‌گاه تعبیر آن در ساختار \mathbb{R}^* نیز برقرار است و برعکس. در رویکرد ساختنی به اعداد حقیقی ناستاندارد، اصل انتقال در واقع یک قضیه است. البته در رویکرد اصل موضوعی، اصل انتقال، به عنوان یک اصل پذیرفته می‌شود. ([۷، ۸]) با استفاده از این اصل، تمامی قوانین و ویژگی‌های صوری‌ای که در اعداد حقیقی درست هستند، بدون تغییر به دستگاه ناستاندارد منتقل می‌شوند، مگر گزاره‌هایی که به «استاندارد بودن» عناصر اشاره می‌کنند. این اصل، ابزار اصلی آنالیز ناستاندارد است؛ زیرا امکان می‌دهد بسیاری از خواص تحلیلی را مستقیماً از \mathbb{R} به \mathbb{R}^* منتقل کنیم.

ابزارهایی که در این فصل معرفی کردیم، به ما اجازه می‌دهند بازه یک استاندارد $[0, 1]$ را به بازه ناستاندارد $[0, 1]^*$ گسترش دهیم و t -نرم‌های پیوسته و استلزام‌های مبتنی بر آن‌ها را به این بازه منتقل کنیم. ابزار اصلی، اصل انتقال است. البته این اصل، درستی اصل کمال برای اعداد حقیقی ناستاندارد را ثابت نمی‌کند، زیرا این اصل مرتبه اول نیست و به زیرمجموعه‌های \mathbb{R} اشاره دارد.

۴. منطق و جبر لوکاشویچ ناستاندارد

در این فصل، در ابتدا به معرفی منطق و جبر لوکاشویچ می‌پردازیم. در این قسمت، مرجع اصلی [۶] است. در ادامه، دستگاه منطقی خود را که مبتنی بر گسترش مجموعه درجات صدق منطق لوکاشویچ به بازه یک ناستاندارد است، معرفی می‌کنیم. ایده این گسترش در [۲] آمده ولی پیاده‌سازی آن برای اولین بار در این مقاله صورت می‌گیرد.

۱.۴. منطق و جبر لوکاشویچ استاندارد.

تعریف ۱.۴ (MV -جبر استاندارد). MV -جبر استاندارد عبارت است از BL -جبر مبتنی بر بازه یک استاندارد و t -نرم لوکاشویچ. این ساختار را با $\mathbb{L}[0, 1]$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۲.۴ (منطق لوکاشویچ \mathcal{L}). زبان منطق لوکاشویچ شامل مجموعه‌ای شمارا از متغیرهای گزاره‌ای، عملگرهای منطقی \neg (نفی) و \rightarrow (استلزام) و پرانتزها است. نماد \perp برای فرمول‌های همیشه نادرست (مثلاً $p \wedge \neg p$) و \top برای فرمول‌های همیشه درست (مثلاً $p \rightarrow p$) در نظر گرفته می‌شود. سایر عملگرها مانند \wedge, \vee و \leftrightarrow بر اساس این عملگرها تعریف می‌شوند. مجموعه فرمول‌های \mathcal{L} برحسب نمادهای یادشده، به طریق طبیعی تعریف می‌شوند.

اصول این منطق عبارتند از:

$$(1) \quad \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$$

$$(2) \quad (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$$

$$(3) \quad (\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$$

$$(4) \quad ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi)$$

قاعدهٔ اصلی استنتاج در \mathcal{L} همان قیاس استثنایی است؛ یعنی از φ و $(\varphi \rightarrow \psi)$ ، نتیجه ψ می‌شود.

قضیه ۳.۴ (درستی و تمامیت \mathcal{L} نسبت به MV -جبر استاندارد). منطق لوکاشویچ نسبت به MV -جبر استاندارد درست و کامل است؛ یعنی برای هر فرمول φ داریم:
 φ تحت همهٔ ارزش‌گذاری‌های روی $\mathcal{L}[0, 1]$ درجهٔ صدق ۱ می‌گیرد اگر و تنها اگر φ در \mathcal{L} اثبات‌پذیر باشد.

منظور از یک ارزش‌گذاری، تابعی است از مجموعهٔ متغیرهای گزاره‌ای به بازهٔ یکۀ که به‌طور منحصربه‌فرد و طبیعی، به مجموعهٔ همهٔ فرمول‌ها گسترش می‌یابد. نتیجهٔ فوق نشان می‌دهد که هر قضیهٔ \mathcal{L} نظیر یک اتحاد در MV -جبر استاندارد است. ([۶]: ص. ۷۵)

۲.۴. جبر ناستاندارد و منطق لوکاشویچ. بر اساس نتایج فصل سوم، هر t -نرم پیوسته (از جمله t -نرم لوکاشویچ) به‌طور طبیعی به بازهٔ ناستاندارد $[0, 1]^*$ گسترش می‌یابد و تمامی ویژگی‌های آن (پیوستگی، جابجایی، شرکت‌پذیری و یکنوایی) حفظ می‌شود. به همین دلیل، استلزام لوکاشویچ نیز در فضای ناستاندارد همان رفتار نسخهٔ استاندارد خود را خواهد داشت.

تعریف ۴.۴ (MV -جبر ناستاندارد). ساختار $(\mathcal{L}, \Rightarrow, \perp, \top, \min, \max, \mathcal{L})^*$ را MV -جبر ناستاندارد می‌نامیم و با $\mathcal{L}[0, 1]^*$ نشان می‌دهیم.

همهٔ نکاتی که تاکنون بیان کردیم، ما را قادر می‌سازند که قضیهٔ زیر را که نتیجهٔ اصلی این مقاله است، اثبات کنیم.

قضیه ۵.۴ (درستی و تمامیت \mathcal{L} نسبت به MV -جبر ناستاندارد). اگر φ فرمولی در زبان منطقی لوکاشویچ باشد، آنگاه همه ارزش‌گذاری‌های روی $\mathcal{L}[0, 1]^*$ به φ مقدار ۱ می‌دهند اگر و تنها اگر φ در \mathcal{L} اثبات‌پذیر باشد.

اثبات. بنابر قضیه درستی و تمامیت منطق لوکاشویچ نسبت به MV -جبر استاندارد، قضیه‌بودن در \mathcal{L} را می‌توان به درستی جمله‌های مرتبه اول در $\mathcal{L}[0, 1]$ ارتباط داد. بنابر اصل انتقال در آنالیز ناستاندارد، دقیقاً همین جملات مرتبه اول در ساختار $\mathcal{L}[0, 1]^*$ نیز درست هستند. بنابراین، منطق لوکاشویچ در هر دو تعبیر استاندارد و ناستاندارد، درست و کامل باقی می‌ماند.

□

به‌عنوان یک مثال از قضیه ۵.۴، اصل $(\psi \rightarrow \varphi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$ را در نظر بگیرید. بنابر درستی \mathcal{L} نسبت به $\mathcal{L}[0, 1]$ ،

$$\forall x, y \in [0, 1] \quad x \xrightarrow{\mathcal{L}} (y \xrightarrow{\mathcal{L}} x) = 1.$$

پس، بنا به اصل انتقال، داریم

$$\forall x, y \in^* [0, 1] \quad x^* \xrightarrow{\mathcal{L}} (y^* \xrightarrow{\mathcal{L}} x) = 1.$$

این مثالی از درستی \mathcal{L} نسبت به $\mathcal{L}[0, 1]^*$ است. از طرف دیگر، فرمول گزاره‌ای $\varphi \wedge \neg\varphi$ را در نظر بگیرید. این قضیه‌ای از \mathcal{L} نیست، پس بنا به تمامیت \mathcal{L} نسبت به بازه استاندارد، فرمول مرتبه اول

$$\forall x \in [0, 1] (\min(x, x \xrightarrow{\mathcal{L}} 0) = 1)$$

در ساختار $\mathcal{L}[0, 1]$ درست نیست. پس بنابر اصل انتقال، فرمول مرتبه اول

$$\forall x \in^* [0, 1] (\min(x, x^* \xrightarrow{\mathcal{L}} 0) = 1)$$

در ساختار ناستاندارد برقرار نیست. این مثالی از تمامیت \mathcal{L} نسبت به $\mathcal{L}[0, 1]^*$ است.

۵. کاربردها و چشم‌اندازهای کاربردی

در این فصل، ظرفیت‌های به‌کارگیری چارچوب پیشنهادی این مقاله، یعنی گسترش درجات صدق از بازه یکه استاندارد به بازه یکه ناستاندارد $\mathcal{L}[0, 1]^*$ را در چند زمینه پرکاربرد نشان می‌دهیم. ایده محوری آن است که ابزارهای ریاضی معرفی‌شده، یعنی «بی‌نهایت‌کوچک» یا

«بی‌نهایت نزدیک»، ابزاری طبیعی و دقیق برای فرمول‌بندی عباراتی چون «قابل چشم‌پوشی» یا «تقریباً یکسان» فراهم می‌کنند.

در سامانه‌های کنترل، مفهوم «بی‌نهایت کوچک» نقشی بنیادین دارد؛ چه در مواردی که این تغییرات مبنای تصمیم‌گیری باشند و چه در شرایطی که آگاهانه نادیده گرفته شوند. در بسیاری از سامانه‌های دقیق، مانند ترموستات‌های دیجیتال، کنترل‌کننده‌ها به‌طور پیوسته وضعیت متغیرها را در بازه‌های زمانی بسیار کوتاه بررسی می‌کنند. این بازه‌ها چنان کوچک‌اند که تغییرات درون آن‌ها را می‌توان مصداقی از «بی‌نهایت کوچک» دانست. در چنین مواردی، تصمیم‌گیری سیستم بر اساس همین تغییرات جزئی صورت می‌گیرد؛ برای مثال، اگر دمای محیط تنها کسری از درجه از مقدار مطلوب فاصله داشته باشد، ترموستات ممکن است دستور روشن شدن بخاری را صادر کند. این واکنش به تغییرات بسیار کوچک، نمونه‌ای از کاربرد عملی مفهوم بی‌نهایت کوچک در کنترل است، حتی بدون استفاده مستقیم از ابزارهای ریاضیاتی مانند مشتق یا انتگرال.

با این حال، در برخی سامانه‌ها، همین تغییرات بی‌نهایت کوچک به‌طور عمدی نادیده گرفته می‌شوند. دلیل این امر آن است که واکنش به تغییرات بسیار جزئی می‌تواند منجر به نوسانات بی‌مورد، افزایش مصرف انرژی، یا کاهش عمر قطعات مکانیکی شود. برای نمونه، در یک یخچال خانگی، اگر دما تنها چند صدم درجه تغییر کند، سیستم هیچ واکنشی نشان نمی‌دهد؛ زیرا چنین تغییراتی تأثیر محسوسی بر کیفیت نگهداری مواد غذایی ندارند. در اینجا، کنترل‌کننده تنها زمانی وارد عمل می‌شود که تغییر دما از یک آستانه مشخص فراتر رود.

ممکن است این پرسش مطرح شود که چرا به‌جای مفهوم انتزاعی «بی‌نهایت کوچک» از یک عدد استاندارد کوچک به‌عنوان آستانه استفاده نمی‌شود. پاسخ آن است که عدد ثابت، فاقد انعطاف‌پذیری لازم برای تطبیق با شرایط متغیر سیستم است. این مقدار نمی‌تواند تفاوت میان نویز و سیگنال واقعی را به‌درستی تشخیص دهد، و در شرایط مختلف ممکن است یا به تغییرات مهم بی‌تفاوت باشد یا به نویزهای بی‌اهمیت واکنش نشان دهد. افزون بر این، تغییرات کوچک گاه به‌صورت تجمعی رخ می‌دهند؛ یعنی هر تغییر به‌تنهایی قابل صرف‌نظر کردن است، اما در مجموع می‌توانند اثر قابل توجهی داشته باشند. استفاده از عدد ثابت استاندارد در این زمینه کارا نیست، در حالی که مفهوم بی‌نهایت کوچک در تحلیل‌های پیوسته چنین توانایی‌ای را فراهم می‌سازد.

در نتیجه، چه در طراحی سامانه‌هایی که به تغییرات بسیار جزئی واکنش نشان می‌دهند، و چه در مواردی که این تغییرات نادیده گرفته می‌شوند، مفهوم بی‌نهایت کوچک جایگاهی کلیدی در فهم و مدیریت رفتار سیستم‌های کنترل دارد. این مفهوم، با وجود انتزاعی بودن، در

عمل به تصمیم‌گیری‌های دقیق، پایدار و بهینه منجر می‌شود. دو عملگر یا محمول منطقی‌ای که در ادامه معرفی می‌شوند، می‌توانند نقش مهمی در کاربرد یادشده ایفا کنند.

۱.۵. مدل‌سازی اصلاح‌گرهای زبانی و عبارات تقریبی. فرض کنید $\varepsilon > 0$ یک عدد بی‌نهایت کوچک باشد ($\varepsilon \approx 0$). برای $x \in [0, 1]^*$ ، دو گزاره کمکی را معرفی می‌کنیم:

$$\text{Almost}_\varepsilon(x) : \iff x \geq 1 - \varepsilon, \quad \text{Negl}_\varepsilon(x) : \iff x \leq \varepsilon.$$

تعبیر شهودی:

• $\text{Almost}_\varepsilon(x)$ می‌گوید « x تقریباً یک است»؛ در زبان طبیعی: «تقریباً درست/تقریباً کامل/تا حد بسیار زیادی پذیرفتنی».

• $\text{Negl}_\varepsilon(x)$ می‌گوید « x قابل چشم‌پوشی است»؛ در زبان طبیعی: «ناچیز/بی‌تأثیر».

در منطق فازی، عملگرهای t -نرم برای مدل‌سازی رابط منطقی «و قوی» میان دو مقدار فازی به‌کار می‌روند. این عملگرها نقش کلیدی در ترکیب گزاره‌های فازی و تعیین میزان صدق یک نتیجه در یک استلزام فازی دارند. در اغلب موارد، t -نرم‌ها به‌گونه‌ای تعریف می‌شوند که رفتار پیوسته و تدریجی داشته باشند؛ به‌طوری‌که با تغییرات نرم در ورودی‌ها، خروجی نیز به‌صورت یکنواخت تغییر کند. سه t -نرم مشهور یادشده از این نوع هستند. با این حال، نمونه‌هایی از t -نرم‌های ناپیوسته نیز وجود دارند که رفتار آن‌ها به‌صورت جهشی و ناگهانی است. این نوع t -نرم‌ها در برخی کاربردهای خاص، به‌ویژه در تصمیم‌گیری‌های قاطع یا فیلترهای سخت‌گیرانه، مورد استفاده قرار می‌گیرند.

یکی از ساده‌ترین نمونه‌های t -نرم ناپیوسته، t -نرم بولی است. این عملگر به‌صورت زیر تعریف می‌شود: اگر هر دو ورودی دقیقاً برابر با ۱ باشند، خروجی نیز ۱ خواهد بود؛ در غیر این صورت، خروجی صفر است. به‌عبارت دیگر، تنها زمانی نتیجه «کاملاً درست» تلقی می‌شود که هر دو فرض آن به‌طور کامل برقرار باشند، و در هر حالت دیگر — اگر یکی از ورودی‌ها تنها اندکی کمتر از ۱ باشد — خروجی به‌طور ناگهانی به صفر سقوط می‌کند. این رفتار، مصداقی روشن از ناپیوستگی در t -نرم است. توجه کنید که گسترش t -نرم‌ها به بازه یک‌ه ناستاندارد مطابق روش عمومی گسترش توابع، پیوسته یا ناپیوسته، به فضای ناستاندارد صورت می‌گیرد و از این نظر، بین توابع پیوسته و ناپیوسته تفاوتی نیست.

برای درک بهتر کاربرد چنین t -نرمی، می‌توان به یک سامانه امنیتی اشاره کرد که بر اساس دو شرط عمل می‌کند: فعال بودن حسگر حرکت و باز بودن درب. اگر از t -نرم بولی

استفاده شود، تنها زمانی زنگ هشدار فعال می شود که هر دو شرط دقیقاً برقرار باشند. حتی اگر حسگر حرکت مقدار فازی $0/99$ داشته باشد، خروجی صفر خواهد بود و زنگ هشدار فعال نمی شود. این نوع رفتار، در سامانه هایی که نیاز به تصمیم گیری قاطع دارند، مطلوب است؛ زیرا از واکنش های ناخواسته به شرایط نیمه محتمل جلوگیری می کند.

در مجموع، t -نرم های ناپیوسته با وجود آن که در بسیاری از کاربردهای فازی رایج نیستند، در شرایطی که نیاز به مرزبندی دقیق و واکنش های قطعی وجود دارد، می توانند ابزار مناسبی باشند. انتخاب میان t -نرم پیوسته یا ناپیوسته باید بر اساس ماهیت مسئله، حساسیت سیستم به تغییرات ورودی، و نوع تصمیم گیری مورد انتظار صورت گیرد.

گزاره ۱.۵ (پایداری «تقریباً-درست» تحت t -نرم ها). اگر T یک t -نرم پیوسته باشد و $x, y \in [0, 1]^*$ با $x, y \geq 1 - \varepsilon$ ، آن گاه:

$$*T_G(x, y) = \min\{x, y\} \geq 1 - \varepsilon$$

$$*T_L(x, y) = \max\{0, x + y - 1\} \geq 1 - 2\varepsilon$$

$$*T_P(x, y) = xy \geq (1 - \varepsilon)^2 = 1 - 2\varepsilon + \varepsilon^2 \approx 1 - 2\varepsilon$$

به ویژه، در هر سه حالت، $T(x, y)$ نیز «تقریباً-درست» است (با پارامتر مرتبه ε).

مثال ۲.۵ (نمونه زبانی). عبارت « φ تقریباً درست است» را می توان با شرط $v(\varphi) \geq 1 - \varepsilon$ (برای یک ارزش گذاری ناستاندارد $[0, 1]^*$ $v: \text{Fm} \rightarrow [0, 1]^*$) صوری کرد. اگر «تقریباً φ » و «تقریباً ψ » هر دو برقرار باشند، طبق گزاره ۱.۵، ترکیب عطفی آن ها (با هر یک از T_G, T_L, T_P) نیز «تقریباً» برقرار می ماند.

۲.۵ سیستم های خبره و تصمیم گیری چندمعیاره. فرض کنید C_1, \dots, C_n معیارها و $w_i \in [0, 1]$ اوزان آن ها باشند ($\sum_i w_i = 1$). برای هر گزینه A ، امتیازهای $s_i(A)$ از $[0, 1]^*$ داده شده و امتیاز کل به شکل

$$S_T(A) := T(w_1 \odot s_1(A), \dots, w_n \odot s_n(A))$$

تعریف می شود که در آن T یک t -نرم و \odot رابط «و قوی» نظیر آن است. آن گاه برتری «تقریباً قطعی» را با یک آستانه بی نهایت کوچک مدل می کنیم:

$$A \succ_{\varepsilon} B \iff S_T(A) \geq S_T(B) + \varepsilon$$

این رابطه قابلیت چشم‌پوشی اختلاف‌های ناچیز را به زبان تصمیم وارد می‌کند. اگر $ST(A) \approx ST(B)$ ، هیچ‌یک بر دیگری «به‌طور معنادار» ترجیح ندارد و می‌توان قواعد گزینش را بر حسب $st(ST(\cdot))$ نوشت: گزینش نهایی با $st(ST)$ همان گزینش «تقریباً» با آستانه ε است، اما با پیاده‌سازی استاندارد و پایدار. این را می‌توان قواعد تصمیم با ناحیه بی‌تفاوتی ناستاندارد نامید.

در ادامه، اشاره‌ای به کاربردی تئوری از منطق فازی ناستاندارد در توجیه پارادوکس خرمن می‌کنیم. در پارادوکس خرمن، تفاوت‌های کوچک باعث می‌شوند که درجه صدق منطقی گزاره‌ها در نهایت تغییر قابل توجهی پیدا کند، یعنی از ۱ به ۰ یا به عکس تغییر کنند. مشکل مفهومی در آنجا است که این تغییرات کوچک، ملموس نیستند ولی مجموع همه آن‌ها چشمگیر است. این تغییرات را می‌توان به اندازه بی‌نهایت کوچک در نظر گرفت که آن‌ها را نامحسوس می‌کند و بنابراین مشکل تغییرات نامرئی حل می‌شود. در واقع، در این پارادوکس با جمع جبری تغییراتی بی‌نهایت کوچک روبه‌رو هستیم، که در مجموع دیگر بی‌نهایت کوچک نیست، بلکه برابر با ۱ است. برای بررسی بیشتر این موضوع، [۲] را ببینید.

۶. نتیجه‌گیری

در این مقاله، ابتدا مبانی منطق‌های فازی و ساختارهای جبری متناظر با آن‌ها (به‌ویژه BL -جبر و MV -جبر) مرور شد. سپس چارچوب آنالیز ناستاندارد معرفی شده و به کمک آن، مجموعه درجات صدق از بازه یکه استاندارد به بازه یکه ناستاندارد $[0, 1]^*$ گسترش داده شد تا امکان کار با مقادیر «بی‌نهایت کوچک» و «بی‌نهایت نزدیک» ایجاد شود. نتایج اصلی ما بدین شرح است:

- نشان دادیم که اگر T یک t -نرم پیوسته روی $[0, 1]$ باشد، آنگاه گسترش ناستاندارد آن T^* یک t -نرم پیوسته روی $[0, 1]^*$ است و با استلزام باقیمانده متناظر، ساختار BL -جبر را تشکیل می‌دهد.
- با استفاده از اصل انتقال، ثابت کردیم هر اتحادی که در BL -جبر استاندارد برقرار باشد، در BL -جبر ناستاندارد نیز برقرار است (و برعکس).
- ثابت کردیم که منطق لوکاشویچ دقیقاً همان منطق جبر لوکاشویچ ناستاندارد $[0, 1]^{\ddagger}$ است.

• نشان دادیم که مقادیر بی نهایت کوچک، ابزاری طبیعی و دقیق برای صوری سازی اصلاح گرهای زبانی، مانند «تقریباً درست» و «قابل چشم پوشی»، فراهم می آورند و پایداری این مفاهیم تحت همبندی ها و استلزام های باقیمانده ای برقرار است. توجه کنید که منطق فازی در ابتدا برای افزودن قابلیت بیان مفاهیم مبهم که در منطق کلاسیک قابل بیان نبودند، معرفی شد. گسترش مورد نظر ما، این ظرفیت را افزایش می دهد.

۱.۶. چشم انداز پژوهش های آینده. این پژوهش را می توان در محورهای زیر ادامه داد:

(۱) بررسی منطق های فازی غنی تر: گسترش منطق لوکاشویچ به منطق های وجهی یا سوردار فازی و بررسی درستی و تمامیت آن ها؛

(۲) تعمیم رهیافت ناستاندارد: استفاده از ابزارهای آنالیز ناستاندارد برای بررسی منطق های فازی دیگر و مقایسه آن ها با روش های جبری؛

(۳) کالیبراسیون داده محور پارامترهای «تقریباً قابل چشم پوشی»، مطالعه تجربی در حوزه های واقعی (کنترل و تصمیم گیری) و بررسی معیارهای انتخاب t -نرم مناسب برای کاربردهای خاص.

به طور کلی، مسیرهای گشوده بسیاری برای توسعه منطق های فازی وجود دارد و انتظار می رود تلفیق رویکردهای جبری و آنالیز ناستاندارد، به پیشرفت های نظری و کاربردی تازه ای بینجامد. همان طور که تأکید شد، کاربردهای مورد نظر، نتیجه افزایش قدرت بیانی حاصل از افزودن اعداد ابرحقیقی برای مدل سازی ظریف تر پدیده های طبیعی است. ساخت دستگاه های منطقی جدید برای مدل سازی مفاهیم فازی نیز از دستاوردهای مورد انتظار است.

۷. تشکر و قدردانی

این اثر تحت حمایت مادی بنیاد علم ایران (INSF) برگرفته شده از طرح شماره «۴۰۳۹۰۶۹» انجام شده است^۱. از سه داور محترم مقاله بابت پیشنهادهای مفیدشان که منجر به بهبود ارائه مقاله شد، بسیار سپاسگزار هستیم.

مراجع

- [۱] منیری، م. (۱۳۹۸)، «ریاضیات در تقابل با فلسفه و علوم طبیعی»، فرهنگ و اندیشه ریاضی، ۳۸ (۶۵)، صص. ۶۱-۷۵
- [۲] منیری، م. (۱۴۰۴). «بن‌مایه‌های تجدیدنظرطلبی در منطق و منطق فازی»، سیستم‌های فازی و کاربردها، ۸ (۱۶)، صص. ۲۰۷-۲۱۸.
- [3] Bergmann, M. (2008). *An Introduction to Many-Valued and Fuzzy Logic: Semantics, Algebras, and Derivation Systems*, Cambridge University Press.
- [4] Castaño, D. & Varela, J. P. D. & Savoy, G. (2025), "Strong completeness for the predicate logic of the continuous t -norms", *Fuzzy Sets and Systems*, **500**, pp. 1-25.
- [5] Goldblatt, R. (1998). *Lectures on the hyperreals: an introduction to nonstandard analysis* (Vol. 188). Springer Science & Business Media.
- [6] Hájek, P. (2001). *Metamathematics of fuzzy logic* (Vol. 4). Springer Science & Business Media.
- [7] Kanovei, V. & Reeken, M. (2004), *Nonstandard Analysis, Axiomatically*, Book Series Springer *Monographs in Mathematics*, Springer Berlin: Heidelberg.
- [8] Nelson, E. (1977). "Internal Set Theory: A New Approach to Nonstandard Analysis," *Bulletin of the American Mathematical Society*, **83** (6).
- [9] Nguyen, H. T., Walker, C., & Walker, E. A. (2018). *A First Course in Fuzzy Logic*, CRC Press.
- [10] Loeb, P. A. & Wolff, M. P. H. (eds.) (2015). *Nonstandard Analysis for the Working Mathematician*, Springer Dordrecht.
- [11] Robinson, A. (1974). *Non-standard analysis*. Princeton University Press.
- [12] Verbruggen, H. B. & Bruijn, P. M. (1997). "Fuzzy control and conventional control: What is (and can be) the real contribution of Fuzzy Systems?", *Fuzzy Sets and Systems*, **90** (2), pp. 151-160.

¹This work is based upon research funded by Iran National Science Foundation (INSF) under project No.4039069