سیستم‌های فازی و کاربردها
سال اول، شماره اول (پاییز ۱۳۹۷) صص. ۴۳ تا ۵۴

نظریهٔ احتمال و نظریهٔ امکان: شباهت‌ها و تفاوت‌ها

سید محمود طاهری
دانشگاه تهران، دانشکدهٔ فنی

چکیده
نظریهٔ احتمال و نظریهٔ امکان، دو نظریهٔ ریاضی برای مدل‌سازی، بررسی و تحلیل نایقینی (عدم‌اطمینان / عدم‌قطعیت) هستند. هرچند این دو نظریه از جهاتی شبیه هم هستند، ولی تفاوت‌های بنیادی با یکدیگر دارند. در این مقاله، به‌کوتاهی، شباهت‌ها و به‌ویژه تفاوت‌های این دو نظریه بررسی می‌شود. چند مثالِ مقایسه‌ای ارائه می‌شود تا تفاوت‌های احتمال و امکان به‌طور ملموس و عینی روشن شود. در پایان، یک پرسش طرح می‌شود تا خوانندگان با بررسی آن، دربارهٔ تفاوت احتمال و امکان بیشتر تأمل کنند.

۱ سرآغاز

نظریهٔ امکان ($Possibility\ Theory$) چه تفاوتی با نظریهٔ احتمال ($Probability\ Theory$) دارد؟ از منظری دیگر: اندازهٔ امکان ($Possibility\ \ Measure$) چه ویژگی‌هایی دارد؟ و با اندازهٔ احتمال ($Probability\ \ Measure$) چه شباهت‌ها و چه تفاوت‌هایی دارد؟ اساساً امکان چگونه مفهومی است و با چه مفاهیمی مرتبط است؟ آیا نظریهٔ امکان را می‌توان به نظریهٔ احتمال تقلیل داد؟ آیا مسائل مبتنی بر

Mathematics Subject Classification (2010): 60A05; 60A86; 03B52, **Email:** sm.taheri@ut.ac.ir.
عبارات و کلمات کلیدی: اندازهٔ احتمال، اندازهٔ امکان، اندازهٔ لزوم، نایقینی، اصل سازگاری.

امکان را می‌توان با روش‌های احتمالی حل‌وفصل کرد؟ آیا ممکن است که در یک مسئلهٔ کاربردی، با هر دو نوع نایقینی ($Uncertainty$) مواجه بود؟ آیا احتمال و امکان، رقیب هم هستند یا مکمل هم؟

تا چند دههٔ پیش، باور رایج این بود که نایقینی (عدم‌قطعیت / عدم‌اطمینان) موجود در سیستم‌ها/اطلاعات/پیشامدها صرفاً ماهیت احتمالی دارند و ناشی از تصادف (شانس) هستند، و در نتیجه صرفاً با روش‌های احتمالی می‌توان آن‌ها را بررسی و ارزیابی کرد. افزون اینکه، از دیرباز تنها رهیافت ریاضی تکامل‌یافته برای بررسی نایقینی، نظریهٔ احتمال بوده است. گرچه این نظریه در بسیاری موارد سودمند است، ولی تنها در یک نوع خاص از نایقینی کارایی دارد. در بسیاری از وضعیت‌ها، نایقینی دربارهٔ یک سیستم (/ فرایند/ پیشامد)، تنها به‌دلیل مؤلفه‌های تصادفی نیست، بلکه ممکن است اطلاعات دربارهٔ سیستم، *ناکافی*، *مبهم*، *نادقیق*، *و / یا متناقض* باشد. انواع گوناگون اطلاعات ناقص، به انواع گوناگون نایقینی می‌انجامد که فقط یکی از آن نوع‌ها، در قالب نظریهٔ احتمال بیان‌شدنی است: نایقینیِ ناشی از جنبه‌های تصادفی.

در دهه‌های اخیر، نظریه‌های ریاضیِ گوناگونی برای بررسی و تحلیل نایقینی معرفی شده‌اند که برای مروری بر آن‌ها می‌توانید به [۳] مراجعه کنید. یک نظریهٔ مطرح در این باره، نظریهٔ امکان است که در مدل‌سازی و تحلیل سیستم‌ها و اطلاعات متضمّن ابهام کارایی دارد [۱۰] (برای چند پژوهش جدید در کاربرهای نظریهٔ امکان به [۶]، [۷] و [۱۲] مراجعه کنید). در مقالهٔ پیش‌رو، ضمن معرفی و تشریح کوتاه مبانی نظریهٔ امکان و اندازه‌های امکان، به تشریح تفاوت‌ها و تشابه‌های بین اندازه‌های احتمال و اندازه‌های امکان می‌پردازیم.

نکته: گفتنی است که در معرفی اندازه‌های امکان دو رویکرد وجود دارد. رویکرد اول آن است که در کار بدیع پروفسور زاده [۱۸]، با معرفی نظریهٔ امکان برای اولین بار، ارائه شد. در این رویکرد، اندازهٔ امکان، به‌صورت یک اندازه ($Measure$) متناظر با یک مجموعهٔ فازی ($Fuzzy\ \ Set$) مطرح می‌شود (نیز رک به [۱]). در رویکرد دوم، اندازه‌های امکان در چارچوب اندازه‌های عدم‌اطمینان تعریف می‌شود [۱۴]، در این رویکرد می‌توان دو نظریهٔ احتمال و امکان را درچارچوب نظریهٔ شواهد دمپستر–شفر نیز مقایسه کرد [۵]. در این مقاله، از رویکرد دوم (البته فارغ از نظریهٔ دمپستر–شفر) استفاده کرده‌ایم. برای اختصار، از تعریف اندازهٔ احتمال چشم‌پوشی کرده‌ایم.

۲ اندازهٔ امکان

در این بخش تعریف اندازهٔ امکان را ارائه و چند نتیجهٔ مقدماتی را در این مورد بیان می‌کنیم (نیز [۱۴] را ببینید). در این بحث فرض می‌کنیم Ω مجموعهٔ مرجع و $\mathcal{B}$ یک میدان سیگمایی از زیرمجموعه‌های Ω است.

تعریف ۱.۲. تابع مجموعه‌ای $Poss : \mathcal{B} \to [۰, ۱]$ را یک اندازهٔ امکان بر $(\Omega, \mathcal{B})$ گوییم اگر

۱. $Poss(\phi) = ۰$ و $Poss(\Omega) = ۱$

۲. برای هر دنباله $A_i \in \mathcal{B}$ که $i \in N$ و $A_۱ \subseteq A_۲ \subseteq \ldots$ یا $A_۱ \supseteq A_۲ \supseteq \ldots$

$$\lim_{i\to\infty} Poss(A_i) = Poss(\lim_{i\to\infty} A_i)$$

۳. برای هر A و B از $\mathcal{B}$

$$Poss(A \cup B) = \max[Poss(A), Poss(B)]$$

در تعریف بالا، تحت شرائطی کلی، Ω را فضای پیشامدها و هر زیرمجموعهٔ A از آن‌را یک پیشامد می‌گوییم. خاطر نشان می‌کنیم که در شرط سوم، قید نشده است که A و B جدا از هم باشند.
اگر A و A^c دو پیشامد متمم باشند (به تعبیری دیگر متناقض با هم باشند)، آنگاه از شرط سوم نتیجه می‌شود که

$$\max[Poss(A), Poss(A^c)] = ۱ \tag{۱}$$

یعنی از دو پیشامد که متمم یکدیگرند دست‌کم یکی کاملاً ممکن است. البته اینکه پیشامد A کاملاً ممکن است، مانع نمی‌شود که پیشامد متمم آن نیز ممکن باشد و حتی از درجهٔ امکان بالایی برخوردار باشد. این ویژگیِ اندازه‌های امکان با بسیاری از داوری‌های واقعی سازگار است. در مثال‌های آینده این نکته را بیشتر شرح می‌دهیم.

در نظریهٔ امکان از اندازهٔ دیگری به نام *اندازهٔ لزوم* نیز استفاده می‌شود.

تعریف ۲.۲. تابع مجموعه‌ای $Nec : \mathcal{B} \longrightarrow [۰, ۱]$ را یک اندازهٔ لزوم بر $(\Omega, \mathcal{B})$ گوییم اگر در شرایط ۱ و ۲ تعریف بالا صدق کند و برای هر A و B از $\mathcal{B}$،

$$N(A \cap B) = \min[Nec(A), Nec(B)] \tag{۲}$$

نکته ۳.۲. متناظر با هر اندازهٔ امکان $Poss$ بر $(\Omega, \mathcal{B})$، یک اندازهٔ لزوم N وجود دارد که با رابطه زیر تعریف می‌شود

$$Nec(A) = ۱ - Poss(A^c) \tag{۳}$$

پس اندازهٔ لزومِ هر پیشامد مانند A برابر با تفاضل عدد یک و اندازهٔ امکان پیشامد متمم (متناقض با A) است.

$N(A)$ به معنی میزان حتمیّتِ (/ ضرورتِ) رخ‌دادن پیشامد A است. مثلاً $Nec(A) = ۱$، یعنی لزومِ رخ دادن A یک است و بنابراین A، لزوماً (قطعاً) رخ می‌دهد. از سوی دیگر $Nec(A) = ۰$ یعنی هیچ لزومی ندارد که A رخ دهد، و البته این بدان معنی نیست که A ممکن نیست رخ دهد. همچنین از ۳.۲ نتیجه می‌شود که

$$Poss(A) = ۱ - Nec(A^c) \tag{۴}$$

این رابطه نیز تعبیری مشابه تعبیر رابطهٔ ۳.۲ دارد. به‌ویژه اینکه پیشامد A وقتی کاملاً ممکن است که هیچ لزومی برای وقوع پیشامد متمم (متناقض با) آن نباشد. به‌علاوه از رابطهٔ ۲.۲ نتیجه می‌شود که $\min[Nec(A), Nec(A^c)] = ۰$ به این معنی که از دو پیشامد متمم (متناقض با هم) حداکثر یکی از آنها دارای لزوم مثبت است (با رابطهٔ ۱.۲ مقایسه کنید).

بر اساس مطالب فوق و برای مقایسه، می‌توان روابط متناظر در اندازه‌های امکان و دوگانِ آن‌ها یعنی اندازه‌های لزوم را به صورت زیر جمع‌بندی کرد:

روابط مربوط به اندازه‌های لزوم	روابط مربوط به اندازه‌های امکان
$N(A \cap B) = \min[N(A), N(B)]$	$Poss(A \cup B) = \max[Poss(A), Poss(B)]$
$N(A) = ۱ - Poss(A^C)$	$Poss(A) = ۱ - N(A^C)$
$\min[N(A), N(A^C)] = ۰$	$\max[Poss(A), Poss(A^C)] = ۱$
$N(A) + N(A^C) \leq ۱$	$Poss(A) + Poss(A^C) \geq ۱$
$N(A) > ۰ \Rightarrow Poss(A) = ۱$	$Poss(A) < ۱ \Rightarrow N(A) = ۰$
$Poss(A) \geq N(A)$	

مثال ۴.۲ (تشخیص چهره). شخصی را از دور می‌بینید. به شما اطلاع داده شده است که این شخص یکی از سه نفر

$$\Omega = \{A: \text{مرزبان}, B: \text{مهرگان}, C: \text{مهران}\}$$

است. شما برخی ویژگی‌های شخص را می‌بینید ولی نمی‌توانید به‌طور کامل تشخیص دهید که او چه کسی است. برای تشریح بهتر مسئله، دو حالت (سناریو) را در نظر می‌گیریم و بررسی می‌کنیم.

سناریوی اول: ویژگی‌هایی که از شخص می‌بینید (برای مثال: قد، هیکل، نوع راه رفتن، ...) با ویژگی‌هایی که از مرزبان می‌دانید انطباق و سازگاری کامل دارد، بنابراین امکان اینکه وی مرزبان باشد برابر یک است، یعنی Poss(A)=۱. در عین‌حال ویژگی‌هایی که از شخص می‌بینید با ویژگی‌هایی که از مهرگان می‌دانید نیز انطباق و سازگاری کامل دارد، بنابراین امکان اینکه وی مهرگان باشد نیز برابر یک است، یعنی Poss(B)=۱. به‌علاوه ویژگی‌های این شخص با ویژگی‌هایی که از مهران اطلاع دارید به‌اندازهٔ ۰/۶ انطباق و سازگاری دارد، بنابراین امکان اینکه وی مهران باشد ۰/۶است، یعنی Poss(C)=۱. در اینجا، حتمیت (/ لزوم) اینکه این شخص مرزبان باشد صفر است، زیرا کاملاً ممکن است وی فرد دیگری باشد (مهرگان). توجه کنید که

$$Nec(A) = ۱-Poss(A^c) = ۱-Poss(B\cup C) = ۱-max\{Poss(B), Poss(C)\} = ۱ - max\{۱, ۰/۶\} = ۰$$

به‌طور مشابه هیچ حتمیت و ضرورتی نیست که وی مهرگان باشد، زیرا کاملاً ممکن است مرزبان باشد؛ و بدیهی است که اندازهٔ حتمیت (/ لزوم) اینکه وی مهران باشد نیز صفر است (زیرا اساساً امکان این پیشامد کمتر از یک است). در همین سناریو امکان اینکه شخصی که از دور می‌بینیم ''مرزبان یا مهرگان''باشد برابر یک است و حتمیت اینکه وی ''مرزبان یا مهرگان'' باشد برابر ۰/۴ است (چرا؟)

سناریوی دوم: ویژگی‌هایی که از شخص می‌بینید (قد و هیکل و نوع راه رفتن و ...) با ویژگی‌هایی که از مرزبان می‌دانید انطباق و سازگاری کامل دارد، بنابراین امکان اینکه وی مرزبان باشد برابر یک است، یعنی Poss(A)=۱ . در عین‌حال این ویژگی‌ها با ویژگی‌هایی که از مهرگان و مهران می‌دانید، به‌ترتیب، به میزان ۰/۸ و ۰/۶ انطباق و سازگاری دارد. بنابراین امکان اینکه وی مهرگان (مهران) باشد برابر ۰/۸ (۰/۶) است، یعنی Poss(B)= ۰/۸ و Poss(C)=۰/۶ . در این سناریو، حتمیت (/ لزوم) اینکه این شخص مرزبان باشد صفر نیست (برخلاف سناریو اول)، زیرا کاملاً ممکن نیست وی فرد دیگری باشد (مهرگان یا مهران). توجه کنید که

$$Nec(A) = ۱-Poss(A^c) = ۱-Poss(B\cup C) = ۱-max\{Poss(B), Poss(C)\} =$$

$$1 - max\{0.8, 0.6\} = 0.2$$

یعنی به میزان ۰/۲ حتمیت داریم که وی مرزبان است. نیز اینکه هیچ حتمیت و لزومی وجود ندارد که او مهرگان باشد، زیرا کاملاً ممکن است وی مرزبان باشد. و بدیهی است اندازهٔ حتمیت (/ لزوم) اینکه وی مهرگان باشد (یا اینکه مهران باشد) صفر است (زیرا اساساً امکان هر یک از این دو پیشامد کمتر از یک است). همچنین حتمیت اینکه شخصی که از دور میبینیم "مهرگان یا مهران" باشد برابر صفر است (چرا؟)

نتیجه ۵.۲. *از مطالب بالا آشکار است که در نظریهٔ امکان، نایقینی مرتبط با یک پیشامد (یا به‌طور معادل: اطمینان ما از هر پیشامد) با دو عدد مشخص می‌شود: ۱) درجهٔ امکان خودِ پیشامد، و ۲) درجهٔ امکان پیشامد متناقض با آن پیشامد. متممِ (نسبت به یک) امکان پیشامد متناقض، درجهٔ لزوم خود پیشامد تعریف می‌شود. این دو عدد در توصیف و تبیین اطمینان و عدم‌اطمینان (/ قطعیت و عدم‌قطعیت) نسبت به هر پیشامد، اساس کار در نظریهٔ امکان است. این توصیف، با نوع تفکر انسانی سازگار است. زیرا ما در بررسی وقوع یک پیشامد، زمینه‌ها و قراین وقوع آن پیشامد و نیز زمینه‌ها و قرائن وقوع پیشامدهای جانشین را در نظر می‌گیریم.*

مثال ۶.۲. **(تشخیص بیماری)** شخصی با درد شدید در ناحیهٔ شکم به بیمارستان مراجعه می‌کند. پزشک با معاینات اولیه و بررسی بالینی، تشخیص می‌دهد که درد بیمار ناشی از سنگ‌کلیه (A) یا ناشی از التهاب/عفونت آپاندیس (B) است. پزشک اظهار می‌کند که تا انجام آزمایشات لازم و عکس‌برداری و ... نمی‌تواند بگوید بیماری دقیقاً چیست، و بیان می‌کند که:

– کاملاً ممکن است که بیمار سنگ‌کلیه داشته باشد (زیرا علائم درد، انطباق و سازگاری کامل با درد سنگ‌کلیه دارند).

– همچنین کاملاً ممکن است درد ناشی از آپاندیس باشد (زیرا علائم و نشانه‌های آپاندیس نیز کاملاً در بیمار مشاهده می‌شود).

بدین‌ترتیب پزشک از سویی دستوراتی را برای درمان سنگ‌کلیه، و از سوی دیگر دستورات اولیه را برای درمان آپاندیس توصیه می‌کند، تا اینکه پس از انجام آزمایشات دقیق و عکس‌برداری و ...، تشخیص قطعی داده شود. (این وضعیت برای نویسنده اتفاق افتاده است!) در این مسئله، با توجه به نظر پزشک داریم

$$Poss(A) = 1, Poss(B) = 1$$

دقت دارید که جمع دو مقدار امکان، برابر دو می‌شود (بزرگ‌تر از یک). نه ما و نه پزشکان از این موضوع

که جمع مقادیر امکان از یک بزرگ‌تر شده است تعجب نمی‌کنیم، زیرا نایقینی (عدم‌قطعیت) در بارهٔ نوع بیماری، در قالب اندازه‌های امکان بیان شده است. به بیان دیگر، در اینجا مسئلهٔ امکان وقوع بیماری سنگ‌کلیه و امکان آپاندیس مطرح است و نه احتمال این وقایع.

مثال ۷.۲. مثال بالا را می‌توان از منظر احتمال نیز بررسی کرد، البته با این فرض که اطلاعات فراوان از سوابق بیماران مشابه داشته باشیم. فرض کنید پزشک دسترسی به سوابق تعداد فراوان از بیماران مشابه داشته باشد، یعنی بیمارانی که از لحاظ جنس و ردهٔ سنی و ...، مشابه با بیمار فعلی بوده‌اند و به دلیل درد مشابه به بیمارستان مراجعه کرده‌اند. فرض کنید ۰/۶ از این دست بیماران، پس از انجام آزمایشات دقیق و عکس‌برداری و ...، معلوم شده است که سنگ‌کلیه داشته‌اند و ۰/۴ از این بیماران، پس از بررسی‌های دقیق معلوم شده است که التهاب/عفونت آپاندیس داشته‌اند. بر پایهٔ این اطلاعات (یعنی فراوانی‌های نسبی گذشته)، پزشک ادعا می‌کند که بیماریِ شخص فعلی، با احتمال ۰/۶ سنگ‌کلیه و با احتمال ۰/۴ التهاب/عفونت آپاندیس است.

۳ آیا امکان، مفهومی عینی است یا ذهنی؟

آیا امکان، یک مفهوم ذهنی است یا عینی ؟ آیا مقادیر تابع امکان (یا به‌طور متناظر: درجات تابع عضویت یک مجموعه فازی) براساس برداشت‌های شخصی صورت می‌گیرد یا برپایهٔ مشاهدات عینی؟ خوانندگان آگاه هستند که از دیرباز این پرسش دربارهٔ مفهوم احتمال مطرح بوده است. گروهی مانند کینز[۱] و جفریز[۲] از احتمال مفهومی ذهنی را برداشت کردند، و برخی شامل رایشن‌باخ [۳] و میزس [۴] احتمال را یک مفهوم عینی تلّقی می‌کردند. گروه سومی نیز مانند کارناپ [۵] و صدر [۶] احتمال منطقی را مطرح کردند، و گروه چهارم ازجمله پوپر [۷] مفهوم گرایشی/تمایلی احتمال را معرفی نمودند. دراین‌باره مباحث گسترده‌ای در سدهٔ گذشتهٔ میلادی در گرفت. اکنون نسبتاً آشکار شده است که هر یک از گروه‌های فوق، مفهوم و مقصود متفاوتی را

[۱] J.M. Keynes
[۲] H. Jeffreys
[۳] H. Reichenbach
[۴] R.V. Misses
[۵] R. Carnap
[۶] سید محمدباقر صدر
[۷] K.R. Popper

درنظر داشته‌اند. به این‌صورت که یک گروه احتمال بر مبنای فراوانی‌نسبی (که مفهومی عینی و تجربی است) و گروهی دیگر احتمال ذهنی (که یک مفهوم شخصی است) را درنظر داشته‌اند. گروهی نیز مفهوم احتمال منطقی را که چارچوب و کاربردهای خاصی دارد مورد توجه قرار داده‌اند، و گروه چهارم نیز مفهومی از احتمال را که بیشتر مورد توجه فلاسفهٔ علم است مطرح کرده‌اند. در واقع گروه‌های فوق چهار مفهوم متفاوت را درنظر دارند که هر چهار مفهوم با یک کلمهٔ احتمال بیان می‌شود، و این باعث سوءتفاهم‌ها و مجادله‌ها شده است ([۳] و [۴]).

البته مفهوم و تعبیر رایج احتمال در رشته‌های ریاضی و آمار و بیشتر شاخه‌های فنی–مهندسی، مفهوم مبتنی بر فراوانی‌نسبی و بنابراین یک مفهوم عینی است. این برداشت از احتمال همان چیزی است که با جنبهٔ تصادفی پدیده‌ها و متغیرها مرتبط است.

این موضوع را دربارهٔ امکان، به‌کوتاهی، توضیح می‌دهیم.

وجه عینی امکان

در برخی مسائل، امکان وجه عینی/تجربی دارد. برای نمونه، در مثال بیماری سنگ‌کلیه و آپاندیس، پزشک براساس معاینات تجربی و علائم بالینی و نوع درد و مانند اینها امکان ابتلا به سنگ‌کلیه و امکان آپاندیس را مطرح می‌کند. در مثال تشخیص چهره نیز وضع، کم‌وبیش، این‌گونه است.

در این نوع مسائل، پرسش اصلی این است که چگونه و با چه روشی، بر اساس مشاهدات تجربی، اندازه‌های امکان را تعیین کنیم. تشریح این موضوع خارج از حوصلهٔ این مقاله است و علاقه‌مندان را، برای نمونه، به [۱۶] ارجاع می‌دهیم.

وجه ذهنی امکان

در برخی مسائل، امکان وجه ذهنی (/شخصی) دارد. برای نمونه، مفهوم جوان از دید همهٔ افراد یکسان نیست. مثلاً یک فرد ۳۸ ساله از دید یک نفر به اندازهٔ ۰/۶ جوان است، ولی از منظر فرد دیگر به اندازهٔ ۰/۵ جوان تلقی می‌شود. زیرا از منظر فرد اول، سن ۳۸ سالگی به‌میزان ۰/۶ با جوانی تطبیق/سازگاری دارد ولی از دید فرد دوم این تطبیق به‌میزان ۰/۵ است. در اینجا نیز تعیین اندازه‌های امکان برپایهٔ برداشت‌های ذهنی، یک موضوع مهم است. علاقه‌مندان به این موضوع را، برای نمونه، به [۱۱] ارجاع می‌دهیم.

۴ شباهت‌ها و تفاوت‌های احتمال و امکان

از مطالب بالا روشن است که امکان و احتمال هر دو وجوهی از نایقینی هستند. در واقع اندازهٔ امکان و اندازهٔ احتمال دو نوع اندازه برای ارزیابی (سنجش) نایقینی (عدم‌قطعیت) هستند ([۳]، نیز [۱۵] را ببینید). دیگر اینکه، بُرد توابع امکان و احتمال هردو محدود به بازهٔ [۱ و ۰] است. ولی تفاوت‌های این دو اندازه (/ مفهوم) بسیار است. این تفاوت‌ها را می‌توان به‌شرح زیر فهرست کرد.

۱) احتمال، با وجه تصادفی (شانسی) یک متغیر سروکار دارد. در حالی‌که امکان با وجه امکانی یک متغیر (ابهام / میزان سازگاری با یک صفت / میزان تطابق با یک صفت) مرتبط است.

۲) جمع مقادیر هر تابع احتمال بر کلّ فضای مرتبط برابر یک است. در حالی‌که برای تابع امکان این محدودیت وجود ندارد.

۳) در اندازه‌های احتمال، احتمال پیشامد متمم A بر پایهٔ احتمال پیشامد A به‌طور یکتا مشخص می‌شود، یعنی اینکه داریم $P(A^C) = ۱ - P(A)$ ولی برای اندازه‌های امکان چنین نیست (البته شرط ۱.۲ را داریم).

۴) اندازه‌های احتمال دارای ویژگی جمع‌پذیری هستند، ولی اندازه‌های امکان این ویژگی را ندارند.

۵) در چارچوب نظریهٔ احتمال، نایقینی مربوط به هر پیشامد مانند A تنها با یک عدد که احتمال آن پیشامد است مشخص می‌شود ($P(A)$). در حالی‌که در نظریهٔ امکان، نایقینی مرتبط با هر پیشامد با دو عدد، یعنی امکان پیشامد ($Poss(A)$) و لزوم (حتمیت) پیشامد ($Nes(A)$) مشخص می‌گردد.

۶) اندازه‌های امکان این ویژگی را دارند که امکان اجتماع دو پیشامد بر حسب امکان دو مؤلفه قابل‌محاسبه است (طبق اصل ۳ در تعریف ۱.۲)، ولی در اندازه‌های احتمال چنین نیست.

۵ اصل سازگاری امکان - احتمال

از مطالب بالا آشکار شد که احتمال و امکان دو جنبهٔ متفاوت از عدم‌اطمینان هستند. در عین‌حال وضعیت‌هایی وجود دارند که از هر دو جنبهٔ احتمال و امکان قابل بررسی‌اند (مانند مثال‌های ۴.۲ و ۵.۲). در این موارد یک پرسش مطرح می‌شود: چه ارتباطی بین احتمال و امکان وجود دارد؟ در بیان یک رابطه بین امکان و احتمال، *اصل سازگاریِ امکان - احتمال* توسط زاده به صورت زیر ارائه شده است

« درجهٔ بالای امکان، مستلزم درجهٔ بالای احتمال نیست، ولی درجهٔ بالای احتمال، مستلزم درجهٔ بالای امکان است؛ به بیان دیگر در هر مورد، امکان حداقل به بزرگی احتمال است [۱۸] »

زاده تأکید می‌کند که: «باید توجه داشت که اصل سازگاری قاعده‌ای دقیق یا رابطه‌ای ذاتی بین مفاهیم امکان و احتمال نیست، بلکه یک صورت‌بندی تقریبی از درک شهودی ما نسبت به این نکته است که کم شدن امکان، منجر به کم شدن احتمال می‌شود و نه بالعکس». اصل سازگاری زاده، صرفاً به بیان رابطهٔ بین امکان و احتمالِ تک‌تک عناصر فضای نمونه نظر دارد. ولی همان‌طور که دوبوا و پراد [۹] یادآوری کرده‌اند، دراین اصل باید بر بزرگ‌تر بودنِ امکان هر پیشامد دلخواه (و نه هر پیشامد منفرد) نسبت به احتمال آن تأکید کرد. با این حال به‌نظر می‌رسد که اصل سازگاری، حتی با ملاحظهٔ اصلاح دوبوا – پراد شایان دقت بیشتری است. توضیح آن‌که به همان دلیل که می‌پذیریم که امکان هر پیشامد بزرگ‌تر از احتمال آن باشد، باید توجه کنیم که برای دو پیشامد، آنکه ممکن‌تر است باید محتمل‌تر هم باشد (و نیز بالعکس). می‌توان مثال‌هایی ساخت که دو توزیع احتمال و امکان در شرط زاده و هم‌چنین در شرط دوبوا – پراد صدق کنند، اما از رعایت مقصودِ اصل سازگاری تخطّی کنند. بدین‌گونه که برای دو پیشامد، احتمال پیشامد اول از پیشامد دوم بیشتر ولی امکان پیشامد اول کمتر باشد. برای پرهیز از این دشواری، اصل سازگاری را به‌صورت تصحیح‌شدهٔ زیر بیان می‌کنیم.

اصل سازگاری امکان – احتمال: درجهٔ بالای امکان برای یک پیشامد، مستلزم درجهٔ بالای احتمال برای آن پیشامد نیست، ولی درجهٔ بالای احتمال مستلزم درجهٔ بالای امکان است. به‌علاوه برای دو پیشامد آنکه ممکن‌تر است، محتمل‌تر است.

۶ پرسش پایانی

در پایان این مقاله، مثالی مطرح می‌کنیم که در تشریح تفاوت امکان و احتمال مشهور است. در این مثال، دو سناریوی تصمیم‌گیری مطرح می‌شود و از خواننده خواسته می‌شود که پاسخ پرسش مرتبط در هر سناریو را بدهد. امید است خوانندگان بتوانند با توجه به مطالبی که، البته به‌کوتاهی، در تمایز احتمال و امکان بیان کردیم، پاسخ‌ها را به‌درستی تشخیص دهند.

مثال ۱.۶. در کویر شهداد گم شده‌اید و از تشنگی در حال جان دادن هستید. دو بطری می‌یابید. شما مجازید که تنها یک بطری را انتخاب کنید.

سناریوی اول: بر بطری اول نوشته شده است: (این بطری با احتمال ۰/۹ حاوی مایع سمّیِ کُشنده است و با احتمال ۰/۱ حاوی آب سالم است). بر بطری دوم نوشته شده است: (این بطری با امکان ۰/۹ حاوی مایع سمّیِ کشنده است و با امکان ۰/۱ حاوی آب سالم است). کدام بطری را انتخاب می‌کنید؟

سناریوی دوم: بر بطری اول نوشته شده است: (این بطری با احتمال ۰/۱ حاوی مایع سمّیِ کشنده است و با احتمال ۰/۹ حاوی آب سالم است). بر بطری دوم نوشته شده است: (این بطری با امکان ۰/۱ حاوی مایع سمّیِ کشنده است و با امکان ۰/۹ حاوی آب سالم است). کدام بطری را انتخاب می‌کنید؟

بحث و نتیجه‌گیری

نظریهٔ احتمال و نظریهٔ امکان دو نظریهٔ ریاضی متفاوت برای بررسی و تحلیل دو نوع متفاوت نایقینی هستند. این دو نظریه، مکمل هم هستند و نه رقیب یکدیگر [۱۹]. افزون اینکه، بسا انواع دیگری از نایقینی وجود داشته باشد که برای بررسی آنها به انواع دیگری از نظریه‌های ریاضی نیاز داشته باشیم.

مراجع

[۱] طاهری، س.م. (۱۳۷۸)، *آشنایی با نظریهٔ مجموعه‌های فازی*، چاپ دوم، انتشارات جهاد دانشگاهی دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد.

[۲] طاهری، س.م. (۱۳۸۱)، یگانگی و چندگانگی احتمال، *نامهٔ فرهنگستان علوم*، **۱۹**، ۹۳-۱۲۵.

[۳] طاهری، س.م. (۱۳۸۷)، اندازه‌های عدم اطمینان، *فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی*، **۴۱**، ۹-۲۶.

[۴] گیلیز، د.ا. (۱۳۸۶)، نظریه‌های فلسفی احتمال (ترجمه: محمدرضا مشکانی)، مؤسسهٔ *انتشارات علمی دانشگاه صنعتی شریف*.

[5] Agrawal D. and Nayal H.S. (2015), Possibility theory versus probability theory in fuzzy measure theory, *International J. of Engineering Research and Applications*, **5**, 37-43.

[6] Amor N.B., Dubois D., Gouider H. and Prade H. (2017), Possibilistic preference networks, *Information Sciences*, **In Press**.

[7] Arefi M. and Taheri S.M. (2016), Possibilistic Bayesian inference based on fuzzy data, *International J. of Machine Learning and Cybernetics*, **7**, 753-763.

[8] Coletti G. and Scozzafava R. (2004), Conditional probability, fuzzy sets, and possibility: a unifying view, *Fuzzy Sets and Systems*, **144**, 227-249.

[9] Dubois D. and Prade H. (1980), *Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications*, Academic Press.

[10] Dubois D. and Prade H. (1988), *Possibility Theory*, Plenum Press.

[11] Dubois D., Prade H. and Smets P. (2008), A definition of subjective possibility, *International J. of Approximate Reasoning*, **48**, 352-364.

[12] Fan C., Zhenzhou L. and Yan S. (2018), Time-dependent failure possibility analysis under consideration of fuzzy uncertainty, *Fuzzy Sets and Systems*, **in press**.

[13] Hisdal E. (1988), Are grade of membership probabilities?, *Fuzzy Sets and Systems*, **254**, 325-348.

[14] Klir G.J. and Folger T.A. (1988), *Fuzzy Sets, Uncertainty, and Information*, Prentice-Hall.

[15] Drakopoulus J.A. (1995), Probabilities, possibilities, and fuzzy sets, *Fuzzy Sets and Systems*, **75**, 1-15.

[16] Masson M.H. and Denoeux T. (2006), Inferring a possibility distribution from empirical data, *Fuzzy Sets and Systems*, **157**, 319-340.

[17] Troffaes M.C.M., Miranda E. and Destercke S. (2013), On the connection between probability boxes and possibility measures, *Information Sciences*, **224**, 88-108.

[18] Zadeh L.A. (1978), Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility, *Fuzzy Sets and Systems*, **1**, 3-28.

[19] Zadeh L.A. (1995), Probability theory and fuzzy logic are complementary rather than competitive, *Technometrics*, **37**, 271-276.