سیستم های فازی و کاربردها
سال اول، شماره اول (پاییز) ۱۳۹۷ صص.۲۳تا۳۲
DOR:20.1001.1.27174409.1397.1.1.2.3

عملگرهای میانگین وزن‌دار ترتیبی روی مشبکه‌های کامل

فاطمه کوچکی نژاد و ماشاءا... ماشین چی

دانشگاه شهید باهنر کرمان، دانشکده ریاضی و کامپیوتر، گروه ریاضی

چکیده

با در نظر گرفتن برخی عملگرهای جمع‌بندی، بردارهای وزنی خاصی تعریف می‌شود. سپس، تعریف عملگرهای میانگین وزن‌دار ترتیبی با استفاده از یک بردار وزنی خاص داده شده ارائه می‌شود. به علاوه، نشان داده می‌شود که تعریف پیشنهادی برای عملگرهای میانگین وزن‌دار ترتیبی روی مشبکه‌های کامل، تعمیمی از تعریف ارائه شده توسط لیزاسوئین و مورنو می‌باشد.

۱ سرآغاز

عملگرهای جمع‌بندی به طور گسترده در بسیاری از زمینه‌ها اعم از نظری مانند احتمال و فیزیک و مهندسی و علوم انسانی مانند تصمیم‌گیری، تصمیم‌گیری چند معیاره، علوم کامپیوتر، تشخیص الگو و پردازش تصویر، هوش مصنوعی، سیستم‌های مبتنی بر قانون فازی، اقتصاد و امور مالی و بسیاری زمینه‌های کاربردی دیگر مانند علوم طبیعی کاربرد دارند [۱، ۳].

در سرتاسراین مقاله، $(L, \leq_L)$ یک مشبکه کامل است که در آن، ۰_L و ۱_L به ترتیب بزرگترین و کوچکترین عناصر L هستند [۸].

تعریف ۱.۱. [۲] یک عملگر جمع‌بندی n- تایی روی L تابع $A : L^n \to L$ است به طوریکه

Mathematics Subject Classification (2010): 00A69; 06B23 , **Email:** mashinchi@uk.ac.ir.

عبارات و کلمات کلیدی:عملگر جمع‌بندی، عملگرهای میانگین وزن‌دار ترتیبی، مشبکه کامل

(الف) $A(a_1,\dots,a_n) \leq_L A(a'_1,\dots,a'_n)$ هرگاه، $a_i \leq_L a'_i$ برای $1 \leq i \leq n$.

(ب) $A(0_L,\dots,0_L) = 0_L$ و $A(1_L,\dots,1_L) = 1_L$.

اگر $n = 2$ آنگاه، عملگر جمع‌بندی دوتایی یا به طور خلاصه، عملگر جمع‌بندی می‌نامیم.

ملاحظه ۲.۱. اگر $A : L^2 \to L$ یک عملگر جمع‌بندی روی $(L, \leq_L)$ با عنصر خنثی 1_L، باشد آنگاه، برای هر $a, b \in L$ داریم:

(الف) $A(a,b) \leq {}_L A(a, 1_L) = a$؛

(ب) $A(a,b) \leq {}_L a \wedge b$؛

(پ) $A(0_L, b) \leq {}_L 0_L$ و لذا، $A(0_L, b) = 0_L$.

دو نوع عملگر جمع‌بندی پرکاربرد، t ‑نرم و t ‑کونرم‌ها هستند [1].

تعریف ۳.۱. [2] تابع $T : L^2 \to L$ یک t ‑نرم روی $(L, \leq_L)$ است اگر جابجایی، شرکت‌پذیر، افزایشی در هر مولفه و دارای عنصر خنثی 1_L باشد.

تعریف ۴.۱. [2] تابع $S : L^2 \to L$ یک t ‑نرم روی $(L, \leq_L)$ است اگر جابجایی، شرکت‌پذیر، افزایشی در هر مولفه و دارای عنصر خنثی 0_L باشد.

ملاحظه ۵.۱. [2] اگر $S : L^2 \to L$ یک t ‑نرم روی $(L, \leq_L)$ باشد آنگاه، برای هر $a, b \in L$ داریم:

(الف) $a = S(a, 0_L) \leq_L S(a,b)$؛

(ب) $a \vee b \leq_L S(a,b)$؛

(پ) $1_L \leq_L S(1_L, b)$ و همچنین، $S(1_L, b) = 1_L$.

زمانی که از بازه حقیقی $[0,1]$ استفاده می‌کنیم یکی از معمول‌ترین عملگرهای جمع‌بندی، میانگین وزن‌دار $F : [0,1]^n \to [0,1]$ تعریف شده با

$$F(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^{n} w_i a_i$$

برای هر $(a_۱, a_۲, \dots, a_n) \in [۰, ۱]^n$ می‌باشد که $\mathbf{w} = (w_۱, w_۲, \dots, w_n) \in [۰, ۱]^n$ در شرط $w_۱ + \dots + w_n = ۱$ صدق می‌کند.

در [۹]، یاگر عملگر میانگین وزن‌دار ترتیبی (عملگر OWA) را روی $[۰, ۱]$ تعریف کرد. برای بردار وزن داده شده $\mathbf{w} = (w_۱, \dots, w_n) \in [۰, ۱]^n$، $\sum_{i=۱}^{n} w_i = ۱$، عملگر OWA به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$OWA_{\mathbf{w}}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=۱}^{n} w_i x_{\sigma(i)}$$

به طوریکه σ یک جایگشت روی $X = \{۱, ۲, \dots, n\}$ است و $x_{\sigma(۱)} \leq \dots \leq x_{\sigma(n)}$. تاکنون، این نوع از میانگین‌های وزن‌دار در بسیاری از پژوهش‌ها مورد مطالعه قرار گرفته است مانند [۴، ۵] و [۷].

در [۵]، مفهوم عملگر OWA به هر مشبکه کامل L مجهز به یک t-نرم و یک t-کونرم تعمیم داده شده است. اما، در حقیقت، نه t-نرم و نه t-کونرم روی L ضروری نیستند. در اینجا، شرایط روی مشبکه تغییر داده شده و تعریف عملگر OWA روی مشبکه‌های کامل گسترش می‌یابد.

۲ عملگرهای OWA تعریف شده روی مشبکه‌های کامل

در اینجا، ابتدا، تعریف عملگرهای OWA روی مشبکه‌های کامل معرفی شده در [۵] را مرور می‌کنیم.

لم ۲.۱. *[۵] فرض کنید $(L, \leq_L)$ یک مشبکه کامل باشد. برای هر $(a_۱, \dots, a_n) \in L^n$، مقادیر زیر را در نظر بگیرید:*

$$\begin{aligned}
&b_۱ = a_۱ \vee \dots \vee a_n \in L;\\
&b_۲ = [(a_۱ \wedge a_۲) \vee \dots \vee (a_۱ \wedge a_n)] \vee [(a_۲ \wedge a_۳) \vee \dots \vee (a_۲ \wedge a_n)]\\
&\qquad\qquad \vee \dots \vee [a_{n-۱} \wedge a_n] \in L;\\
&\vdots\\
&b_k = \bigvee \{a_{j_۱} \wedge \dots \wedge a_{j_k} | \{j_۱, \dots, j_k\} \subseteq \{۱, \dots, n\}\} \in L;\\
&\vdots\\
&b_n = a_۱ \wedge \dots \wedge a_n \in L.
\end{aligned}$$

آنگاه،

$$a_۱ \wedge \cdots \wedge a_n = b_n \leq_L b_{n-۱} \leq_L \cdots \leq_L b_۱ = a_۱ \vee \cdots \vee a_n.$$

اگر مجموعه $\{a_۱, \ldots, a_n\}$ مرتب کلی باشد آنگاه، بردار $(b_۱, \ldots, b_n)$ برای برخی جایگشت σ از $\{۱, \ldots, n\}$ برابر با $(a_{\sigma(۱)}, \ldots, a_{\sigma(n)})$ است. توجه کنید که در این حالت، b_k، k امین ترتیب آماری نمونه $\{a_۱, \ldots, a_n\}$ است.

تعریف ۲.۲. [۵] فرض کنید $(L, \leq_L, T, S)$ یک مشبکه کامل مجهز به t-نرم T و t-کونرم S باشد. گوییم $(\alpha_۱, \ldots, \alpha_n) \in L^n$ یک

(الف) بردار وزنی در $(L, \leq_L, T, S)$ است اگر $S(\alpha_۱, \ldots, \alpha_n) = ۱_L$ و گوییم یک

(ب) بردار وزنی توزیع‌پذیر در $(L, \leq_L, T, S)$ است اگر همچنین در

$$a = T(a, S(\alpha_۱, \ldots, \alpha_n)) = S(T(a, \alpha_۱), \ldots, T(a, \alpha_n))$$

برای هر $a \in L$ صدق کند.

تعریف ۳.۲. [۵] فرض کنید $(\alpha_۱, \ldots, \alpha_n) \in L^n$ در $(L, \leq_L, T, S)$ باشد. برای هر $(a_۱, \ldots, a_n) \in L^n$ بردار مرتب کامل $(b_۱, \ldots, b_n)$ ساخته شده در لم ۱.۲ را در نظر بگیرید. تابع $F_\alpha : L^n \to L$ داده شده با

$$F_\alpha(a_۱, \ldots, a_n) = S(T(\alpha_۱, b_۱), \ldots, T(\alpha_n, b_n)),$$

برای تمام $(a_۱, \ldots, a_n) \in L^n$، یک عملگر OWA n-تایی نامیده می‌شود.

اکنون، تعریف پیشنهاد شده در [۶] را برای عملگرهای OWA روی مشبکه‌های کامل ارائه می‌کنیم. در ادامه فرض می‌کنیم که A یک عملگر جمع‌بندی n-تایی و B_i برای هر $i = ۱, \ldots, n$ یک عملگر جمع‌بندی باشد. همچنین، $\mathbf{B} = (B_۱, \ldots, B_n)$.

تعریف ۴.۲. [۶] گوییم $\mathbf{w} = (w_۱, \ldots, w_n) \in L^n$ یک

(الف) A-بردار وزنی است اگر $A(w_۱, \ldots, w_n) = ۱_L$ و گوییم یک

(ب) A–$\mathbf{B}$ –بردار وزنی است اگر

$$a = A(B_1(w_1, a), \ldots, B_n(w_n, a))$$

برای هر $a \in L$.

تعریف ۵.۲. [۶] فرض کنید $(L, \leq_L)$ یک مشبکه کامل و بردار $\mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_n) \in L^n$ یک A–$\mathbf{B}$ –بردار وزنی باشد. تابع $OWA_{\mathbf{B}\text{-}A,\mathbf{w}} : L^n \to L$ داده شده با

$$OWA_{\mathbf{B}\text{-}A,\mathbf{w}}(a_1, \ldots, a_n) = A(B_1(w_1, b_1), \ldots, B_n(w_n, b_n))$$

برای تمام $(a_1, \ldots, a_n) \in L^n$ یک A–$\mathbf{B}$ –عملگر OWA n –تایی نامیده می‌شود. جاییکه، برای هر $(a_1, \ldots, a_n) \in L^n$، عناصر $b_1 \leq_L \cdots \leq_L b_n$ با استفاده از لم ۱.۲ محاسبه می‌شوند.

توجه کنید که $OWA_{\mathbf{B}\text{-}A,\mathbf{w}}(c, \ldots, c) = c$ برای هر A–$\mathbf{B}$ –بردار وزنی.

ملاحظه ۶.۲. [۶] تعریف ۵.۲ همچنین، تعریف ارائه شده در [۵] را شامل می‌شود بنابراین، این روش، تعمیم روش ارائه شده در [۵] می‌باشد.

دیده می‌شود که عملگر جمع‌بندی A نیازی نیست که متقارن، شرکت‌پذیر و یا دارای عنصر خنثی ۰ باشد (بنابراین، می‌تواند بسیار متفاوت از t –کونرم‌های در نظر گرفته شده در [۵] باشد.)

به طور مشابه، عملگرهای جمع‌بندی در نظر گرفته شده B_i لازم نیست که نرم مثلثی باشند.

مثال ۷.۲. [۶] فرض کنید $L = [0, 1]$ بازه واحد استاندارد حقیقی مجهز به ترتیب معمول اعداد حقیقی باشند. تعریف می‌کنیم: $A, B_1, B_2 : [0, 1]^2 \to [0, 1]$ با

$$A(x_1, x_2) = \min\{1, \sqrt{(x_1 + x_2^2)}\}, B_1(x_1, x_2) = x_1.x_2^2$$

و

$$B_2(x_1, x_2) = x_1.x_2.$$

پس، بردار $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2) \in [0, 1]^2$ یک A–$\mathbf{B}$ –بردار وزنی است اگر و تنها اگر $w_1 + w_2^2 = 1$.

پس، برای بردار $\boldsymbol{w}$ با در نظر گرفتن مقدار دلخواه $w = w_1 \in [0, 1]$، داریم: $w_2 = \sqrt{(1 - w)}$.

آنگاه، برای $\boldsymbol{w}=(w,\sqrt{(۱-w^{۲})})$، A-$\mathbf{B}$ -عملگر OWA متناظر به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned}&OWA_{\mathbf{B}\text{-}A,\mathbf{w}}(x_۱,x_۲)\\&\qquad=\min\{۱,(B_۱(w,\max\{x_۱,x_۲\})\\&\qquad\quad+B_۲^{۲}(۱-w,\min\{x_۱,x_۲\}))^{\frac{۱}{۲}}\}\\&\qquad=\min\{۱,\sqrt{w.\max^{۲}\{x_۱,x_۲\}+(۱-w).\min^{۲}\{x_۱,x_۲\}}\}\\&\qquad=\sqrt{w.\max^{۲}\{x_۱,x_۲\}+(۱-w).\min^{۲}\{x_۱,x_۲\}}.\end{aligned}$$

قضیه زیر نشان می‌دهد که عملگر OWA تعریف شده در تعریف ۵.۲ در ویژگیهای عملگرهای OWA معرفی شده در [۵] صدق می‌کند.

قضیه ۸.۲. *[۶] فرض کنید $\boldsymbol{w}=(w_۱,\dots,w_n)\in L^n$ یک A-$\boldsymbol{B}$ -بردار وزنی و $OWA_{\boldsymbol{B}\text{-}A,\mathbf{w}}$ عملگر $\boldsymbol{B}$-A OWA n -تایی متناظر باشد. آنگاه،*

(الف) $OWA_{\boldsymbol{B}\text{-}A,\mathbf{w}}$ یک عملگر جمع‌بندی n -تایی متقارن است.

(ب) $OWA_{\boldsymbol{B}\text{-}A,\mathbf{w}}$ خودتوان است.

(پ) $a_۱\wedge\cdots\wedge a_n\le_L OWA_{\boldsymbol{B}\text{-}A,\mathbf{w}}(a_۱,\dots,a_n)\le_L a_۱\vee\cdots\vee a_n$ برای هر $(a_۱,\dots,a_n)\in L^n$.

اثبات. (الف) ابتدا نشان می‌دهیم $OWA_{\mathbf{B}\text{-}A,\mathbf{w}}$ یک عملگر جمع‌بندی است. اگر $a_i\le_L a_i'$ آنگاه، برای هر $۱\le i\le n$ داریم:

$$\bigwedge_{i=۱}^{k}a_{j_i}\le_L\bigwedge_{i=۱}^{k}a'_{j_i}$$

برای تمام $k=۱,\dots,n$ و $\{j_۱,\dots,j_k\}\subseteq\{۱,\dots,n\}$، و همچنین، $b_k\le_L b_k'$. بنابراین، $B_k(w_k,b_k)\le_L B_k(w_k,b_k')$ برای تمام $k=۱,\dots,n$ و سپس،

$$\begin{aligned}&A(B_۱(w_۱,b_۱),\dots,B_n(w_n,b_n))\le_L\\&\qquad\qquad A(B_۱(w_۱,b_۱'),\dots,B_n(w_n,b_n')).\end{aligned}$$

از آنجا که A و B_i برای تمام $i = 1, 2, \dots, n$ عملگرهای جمع‌بندی هستند لذا، روشن است که $OWA_{\mathbf{B}\text{-}A,\mathbf{w}}(0_L, \dots, 0_L) = 0_L$ و $OWA_{\mathbf{B}\text{-}A,\mathbf{w}}(1_L, \dots, 1_L) = 1_L$. تقارن $OWA_{\mathbf{B}\text{-}A,\mathbf{w}}$ از تقارن $\vee$ و $\wedge$ نتیجه می‌شود.

(ب) اگر $a_1 = \dots = a_n = a \in L$، آنگاه، $b_k = a$ برای تمام $k = 1, \dots, n$ و بنابراین، با تعریف ۴.۲، داریم:

$$OWA_{\mathbf{B}\text{-}A,\mathbf{w}}(a, \dots, a) = A(B_1(w_1, a), \dots, B_n(w_n, a)) = a.$$

(پ) فرض کنید $(a_1, \dots, a_n) \in L^n$. برای هر $1 \le k \le n$ داریم: $b_n \le_L b_k \le_L b_1$. بنابراین، با تعریف ۴.۲ و قسمت‌های (الف) و (ب)، داریم:

$$\begin{aligned} a_1 \wedge \dots \wedge a_n = b_n & \\ &= A(B_1(w_1, b_n), \dots, B_n(w_n, b_n)) \\ &\le_L A(B_1(w_1, b_1), \dots, B_n(w_n, b_n)) \\ &= OWA_{\mathbf{B}\text{-}A,\mathbf{w}}(a_1, \dots, a_n) \\ &\le_L OWA_{\mathbf{B}\text{-}A,\mathbf{w}}(b_1, \dots, b_1) \\ &= b_1. \end{aligned}$$

لذا، $a_1 \wedge \dots \wedge a_n \le_L OWA_{\mathbf{B}\text{-}A,\mathbf{w}}(a_1, \dots, a_n) \le_L a_1 \vee \dots \vee a_n$. □

بنابر قضیه ۸.۲، $OWA_{\mathbf{B}\text{-}A,\mathbf{w}}$ تعریف شده در تعریف ۵.۲ یک عملگر جمع‌بندی میانگین است.

لم ۹.۲. *[۶] فرض کنید A یک عملگر جمع‌بندی n-تایی روی مشبکه L بوده به طوریکه $e = 0_L$ عنصر خنثی آن برای هر مولفه باشد و فرض کنید B_i عملگرهای جمع‌بندی روی L با عنصر خنثی $e = 1_L$ برای تمام $i = 1, 2, \dots, n$ باشند. بردارهای $(1_L, 0_L, \dots, 0_L)$ و $(0_L, 0_L, \dots, 1_L)$ A-$\boldsymbol{B}$-بردار وزنی هستند.*

قضیه ۱۰.۲. *[۶] فرض کنید A یک عملگر جمع‌بندی n-تایی روی L بوده به طوریکه $e = 0_L$ عنصر خنثی آن باشد و فرض کنید B_i یک عملگر جمع‌بندی دوتایی روی L با عنصر خنثی $e = 1_L$ برای تمام $i = 1, 2, \dots, n$ باشد.*

(الف) *اگر* $\mathbf{w} = (1_L, 0_L, \dots, 0_L)$ *آنگاه،*

$$OWA_{\boldsymbol{B}\text{-}A,\mathbf{w}}(a_1, \dots, a_n) = a_1 \vee \dots \vee a_n$$

برای هر $(a_1, \dots, a_n) \in L^n$.

(ب) *اگر* $\mathbf{w} = (0_L, 0_L, \dots, 1_L)$ *آنگاه،*

$$OWA_{\boldsymbol{B}\text{-}A,\mathbf{w}}(a_1, \dots, a_n) = a_1 \wedge \dots \wedge a_n$$

برای هر $(a_1, \dots, a_n) \in L^n$.

(پ) *اگر* $\mathbf{w} = (0_L, \dots, 1_L, \dots, 0_L)$ *با* 1_L *در* k *امین مکان* $(1 < k < n - 1)$ *باشد، آنگاه،*

$$OWA_{\boldsymbol{B}\text{-}A,\mathbf{w}}(a_1, \dots, a_n) = b_k$$

برای هر $(a_1, \dots, a_n) \in L^n$.

اثبات.

(الف) برای هر $(a_1, \dots, a_n) \in L^n$ داریم:

$$\begin{aligned} OWA_{\mathbf{B}\text{-}A,\mathbf{w}}(a_1, \dots, a_n) &= A(B_1(1_L, b_1), B_2(0_L, b_2), \dots, B_n(0_L, b_n)) \\ &= A(b_1, 0_L, \dots, 0_L) \\ &= b_1 \\ &= a_1 \vee \dots \vee a_n. \end{aligned}$$

(ب) برای هر $(a_1, \dots, a_n) \in L^n$ داریم:

$$\begin{aligned} OWA_{\mathbf{B}\text{-}A,\mathbf{w}}(a_1, \dots, a_n) &= A(B_1(0_L, b_1), B_2(0_L, b_2), \dots, B_n(1_L, b_n)) \\ &= A(0_L, 0_L, \dots, b_n) \\ &= b_n \\ &= a_1 \wedge \dots \wedge a_n. \end{aligned}$$

(پ) برای هر $(a_1, \ldots, a_n) \in L^n$ داریم:

$$\begin{aligned} OWA_{\mathbf{B}\text{-}A,\mathbf{w}}(a_1, \ldots, a_n) &= A(B_1(0_L, b_1), \ldots, B_k(1_L, b_k), \ldots, B_n(0_L, b_n)) \\ &= A(0_L, \ldots, b_k, \ldots, 0_n) \\ &= b_k \end{aligned}$$

□

نتیجه

با استفاده از بردارهای وزنی خاصی، تعریف عملگرهای میانگین وزن‌دار ترتیبی ارائه شد. همچنین، نشان داده شد که تعریف پیشنهادی برای عملگرهای میانگین وزن‌دار ترتیبی روی مشبکه‌های کامل، تعمیمی از تعریف ارائه شده توسط لیزاسوئین و مورنو [۵] است.

مراجع

[1] Beliakov, G., Pradera, A. & Calvo, T., *Aggregation functions: A guide for practitioners*, Studies In Fuzziness and Soft Computing, Springer, Berlin, (2007).

[2] De Baets, B., & Mesiar, R., Triangular norms on product lattices, *Fuzzy Sets and Systems*, **104**, (1999), 61-75.

[3] Grabisch, M., Marichal, J.-L., Mesiar, R., & Pap, E., *Aggregation Functions (Encyklopedia of Mathematics and its Applications)*, Cambridge University Press, (2009).

[4] Kolesárová, A., Mesiar, R., & Stupňanová, A., Axiomatic generalizations of OWA operators, *IFSA-EUSFLAT 2015*, (2015), 441-446.

[5] Lizasoain, I., & Moreno, C., OWA operators defined on complete lattices. *Fuzzy Sets and Systems*, **224**, (2013), 36-52.

[6] Mesiar, R., Kouchakinejad, F., Siposova, A., & Mashinchi, M., OWA Operators on Complete Lattices, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 10.1109/TFUZZ.2018.2829470, (2018).

[7] Mesiar, R., Stupňanová, A., & Yager, R. R., Generalizations of OWA operators, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, **23**(6), (2015), 2154-2162.

[8] Nguyen, H. T., Walker, E. A., *A first course in fuzzy logic*, CRC Press, Boca Raton, Florida, (2006).

[9] Yager, R. R., On ordered weighted averaging aggregation operators in multicriteria decisionmaking, *Systems, Man and Cybernetics, IEEE Transactions on*, **18**(1), (1988), 183-190.