

ضریب همبستگی بین داده‌های فازی

رضا زارعی و طاهره کیانپور

دانشگاه گیلان، دانشکده علوم ریاضی، گروه آمار

چکیده

همبستگی یکی از مهم‌ترین شاخص‌هایی است که به‌طور گسترده در زمینه‌های مختلف به‌کار می‌رود و اندازه‌ای با اهمیت در تحلیل داده‌هاست. از آنجایی‌که بسیاری از داده‌های واقعی ممکن است نادقیق باشند، توسعه مفهوم همبستگی در محیط نادقیق ضروری به‌نظر می‌رسد. در این مقاله، ابتدا بر اساس تعریف کلاسیک ضریب همبستگی و اصل توسعه داده یک معیار برای محاسبه ضریب همبستگی بین اعداد فازی را مطالعه می‌کنیم که در آن رویکرد برنامه‌ریزی ریاضی به‌منظور محاسبه میزان درجه عضویت به‌کار گرفته شده است. سپس، روشی دیگر برای تعیین و محاسبه دقیق تابع عضویت با استفاده از T -نرم دراستیک و اعمال جبری مبتنی بر آن مورد بررسی قرار گرفته است که به برنامه‌ریزی ریاضی بستگی ندارد.

۱ مقدمه

بررسی ساختار همبستگی و ارتباط میان متغیرها یکی از مسایل مورد توجه در آمار است. در بیشتر تحلیل‌های آماری یافتن و تعیین نوع رابطه بین متغیرهای تصادفی و مشاهدات حاصل از آن‌ها همواره مورد

Mathematics Subject Classification (2010): 62H25; 03E72, **Email:** rezazarei.r@gmail.com.

عبارات و کلمات کلیدی: اصل توسعه، برنامه‌ریزی ریاضی، ضریب همبستگی، عدد فازی، T -نرم دراستیک.

۱۳۹۷ (انجمن سیستم‌های فازی ایران)

توجه محققین بوده است. تاکنون اندازه‌های متنوعی تحت عنوان ضرایب همبستگی بدین منظور معرفی شده و روش‌های مختلفی برای بررسی این ارتباط وجود دارد که بسته به ویژگی داده‌های مورد بررسی و هدف تحقیق، می‌توان از هر کدام از آن‌ها استفاده نمود. بر حسب این‌که متغیرها کمی یا کیفی باشند، ضریب همبستگی شاخصی است که میزان رابطه بین متغیرها را نشان می‌دهد. از مهم‌ترین ضرایب همبستگی که تاکنون معرفی شده‌اند می‌توان به ضریب همبستگی پیرسن، ضریب همبستگی رتبه‌ای اسپیرمن، C ضریب همبستگی توافق پیرسون یا ضریب توافق، ضریب همبستگی کرامر، ضریب همبستگی گاما، ضریب همبستگی فی اشاره کرد. یک ملاک مناسب برای تعیین همبستگی دو متغیر کمی ضریب همبستگی پیرسن می‌باشد که توسط پیرسون معرفی شد که از آن زمان تا کنون به منظور تعیین میزان رابطه، نوع و جهت رابطه‌ی بین دو متغیر فاصله‌ای یا نسبی و یا یک متغیر فاصله‌ای و یک متغیر نسبی به کار برده می‌شود.

با وجود کاربرد فراوان ضرایب همبستگی اشاره شده در بسیاری از مسایل واقعی به سبب شرایط حاکم بر مسئله خطای ماشین و یا خطای انسانی امکان اندازه‌گیری دقیق مشاهدات در مسئله تحت بررسی وجود ندارد. در این شرایط داده‌ها به صورت نادقیق گردآوری و ثبت شده و از این‌رو استفاده از روش‌های دقیق برای تجزیه و تحلیل این گونه مسائل با خطاهای جبران‌ناپذیری همراه خواهد بود. بنابراین در چنین شرایطی می‌بایست روش‌های جایگزین به‌منظور تجزیه و تحلیل همبستگی بین دو مجموعه از داده‌ها یا دو متغیر تصادفی در شرایطی که داده‌های گردآوری شده، نادقیق هستند ارائه دهیم.

در این مقاله با استفاده از ابزارهای مفیدی که نظریه مجموعه‌های فازی برای صورت‌بندی مفاهیم نادقیق در اختیار ما قرار داده است، به بررسی ضریب همبستگی پیرسون برای مجموعه داده‌های نادقیق خواهیم پرداخت.

۲ ضریب همبستگی بین اعداد فازی

با فرض این‌که $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$ یک نمونه تصادفی از متغیرهای دو جامعه باشند، ضریب همبستگی پیرسن برای این مجموعه مشاهدات به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\rho_{X,Y} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}}$$

علاوه بر آن در صورتی که مقادیر مشاهده شده این نمونه تصادفی را با $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ نشان دهیم، برآورد ضریب همبستگی آن را با $r_{X,Y}$ نشان می‌دهیم که به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$r_{X,Y} = \hat{\rho}_{X,Y} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}. \quad (1)$$

با توجه به رابطه (۱)، به راحتی می‌توان نشان داد که $-1 \leq r_{X,Y} \leq +1$.

۱.۲ حالت خاص

در این زیربخش هدف محاسبه ضریب همبستگی بین زوج مشاهدات بر اساس یک نمونه تصادفی n تایی است که در بین آن‌ها یکی از داده‌ها دارای ابهام است و به صورت نادقیق مشاهده و ثبت شده است. به منظور سهولت در محاسبات فرض می‌کنیم که نمونه از چهار زوج مشاهده گردآوری و به صورت زیر ثبت شده‌اند (شکل ۱ را ببینید)

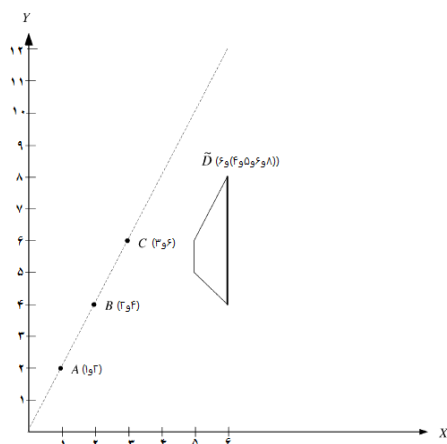
$$A = (1, 2), \quad B = (2, 4), \quad C = (3, 6), \quad D = (6, \tilde{Y}_D),$$

که در آن $\tilde{Y}_D = (4, 5, 6, 8)$ یک عدد فازی ذوزنقه‌ای با تابع عضویت زیر می‌باشد

$$\mu_{\tilde{Y}_D}(y) = \begin{cases} y - 4 & 4 \leq y \leq 5, \\ 1 & 5 \leq y \leq 6, \\ \frac{8-y}{2} & 6 \leq y \leq 8. \end{cases}$$

برای تعیین مقدار ضریب همبستگی این مشاهدات نیازمند محاسبه میانگین مشاهدات در دو نمونه تصادفی هستیم. واضح است که مقدار $\bar{X} = 3$ عددی دقیق است، اما با توجه به این که یکی از مشاهدات مربوط به Y_i ها نادقیق است، میانگین مشاهدات ثبت شده مربوط به Y_i ها به صورت زیر می‌باشد

$$\bar{\tilde{Y}}_D = 3 + \frac{\tilde{Y}_D}{4}.$$



شکل ۱: نمودار زوج مشاهدات A, B, C, D

حال با استفاده از رابطه (۱) ضریب همبستگی به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$\tilde{r}_{X,Y} = \frac{\sum_{i=A,B,C,D} (X_i - 3)(Y_i - 3 - \frac{\tilde{Y}_D}{4})}{\sqrt{\sum_{i=A,B,C,D} (X_i - 3)^2 \sum_{i=A,B,C,D} (Y_i - 3 - \frac{\tilde{Y}_D}{4})^2}} \quad (2)$$

علی‌رغم این‌که عبارت به دست آمده در رابطه (۲) یک کمیت فازی است، لزومی ندارد که شکل تابع عضویت آن با تابع \tilde{Y}_D (به عنوان تنها مشاهد‌های که ابهام ایجاد کرده است) یکسان باشد، چرا که این رابطه یک ترکیب غیر خطی از \tilde{Y}_D است.

برای به دست آوردن تابع عضویت $\tilde{r}_{X,Y}$ از عملگرهای محاسباتی که بر اساس α -برش اعداد فازی پایه‌گذاری شده‌اند، استفاده می‌کنیم. به این منظور ابتدا α -برش عدد فازی دوزنقه‌ای \tilde{Y}_D و $\tilde{r}_{X,Y}$ را

به ترتیب به صورت زیر محاسبه می‌کنیم

$$\begin{aligned} (\tilde{Y}_D)_\alpha &= \left[(\tilde{Y}_D)_\alpha^L, (\tilde{Y}_D)_\alpha^U \right] \\ &= \left[\min_y \left\{ y \in [\varphi, \lambda] \mid \mu_{\tilde{Y}_D}(y) \geq \alpha \right\}, \max_y \left\{ y \in [\varphi, \lambda] \mid \mu_{\tilde{Y}_D}(y) \geq \alpha \right\} \right], \\ (\tilde{r}_{X,Y})_\alpha &= \left[(\tilde{r}_{X,Y})_\alpha^L, (\tilde{r}_{X,Y})_\alpha^U \right] \\ &= \left[\min_r \left\{ r \in [-1, 1] \mid \mu_{\tilde{r}_{X,Y}}(r) \geq \alpha \right\}, \max_r \left\{ r \in [-1, 1] \mid \mu_{\tilde{r}_{X,Y}}(r) \geq \alpha \right\} \right]. \end{aligned}$$

حال برای هر مقدار دلخواه $0 \leq \alpha \leq 1$ می‌توانیم α -برش‌های $(\tilde{Y}_D)_\alpha^L$ و $(\tilde{Y}_D)_\alpha^U$ را که مقادیری دقیق هستند محاسبه کرد و با جایگذاری آن‌ها در رابطه (۲)، α -برش‌های $(\tilde{r}_{X,Y})_\alpha^L$ و $(\tilde{r}_{X,Y})_\alpha^U$ را تعیین کرد.

برای تعیین تابع عضویت ضریب همبستگی \tilde{r} ، ابتدا α -برش‌های عدد فازی ذوزنقه‌ای \tilde{Y}_D را به صورت زیر تعیین می‌کنیم

$$(\tilde{Y}_D)_\alpha = [\varphi + \alpha, \lambda - 2\alpha],$$

با قرار دادن این مقادیر در رابطه (۲)، α -های $\tilde{r}_{X,Y}$ به صورت زیر به دست خواهد آمد

$$(\tilde{r}_{X,Y})_\alpha^L = \frac{(\varphi + 3\alpha)}{\sqrt{10/5\alpha^2 + 112}}, \quad (\tilde{r}_{X,Y})_\alpha^U = \frac{(16 - 6\alpha)}{\sqrt{42\alpha^2 - 168\alpha + 280}}.$$

حال برای تعیین تابع عضویت $\tilde{r}_{X,Y}$ از دو رابطه به دست آمده α -برش‌های آن استفاده می‌کنیم. با اندکی محاسبات جبری تابع عضویت $\tilde{r}_{X,Y}$ به صورت زیر به دست می‌آید

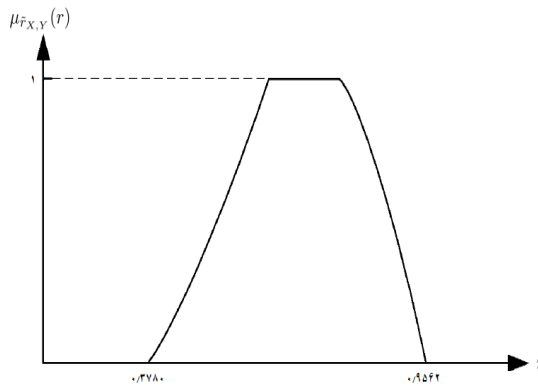
$$\mu_{\tilde{r}_{X,Y}}(r) = \begin{cases} \frac{-24 + 28\sqrt{6r^2 - 6r^4}}{18 - 21r^2} & \frac{1}{\sqrt{5}} \leq r \leq \sqrt{\frac{2}{5}}, \\ 1 & \sqrt{\frac{2}{5}} \leq r \leq \frac{1}{\sqrt{154}}, \\ \frac{48 - 42r^2 - 14\sqrt{6r^2 - 6r^4}}{18 - 21r^2} & \frac{1}{\sqrt{154}} \leq r \leq \frac{1}{\sqrt{5}}. \end{cases} \quad (3)$$

توجه داشته باشید با توجه به این‌که \tilde{Y}_D (تنها مشاهده دارای ابهام در مجموعه مشاهدات) از نوع ذوزنقه‌ای بوده، برای تعیین مقادیر ابتدایی، وسط و انتهایی به صورت زیر عمل می‌کنیم. دامنه سمت چپ و

راست عدد فازی ذوزنقه‌ای به ترتیب عبارتند از

$$\begin{aligned} \left[(\tilde{r}_{X,Y})_{\alpha=0}^L, (\tilde{r}_{X,Y})_{\alpha=1}^L \right] &= \left[\frac{1}{\sqrt{7}}, \sqrt{\frac{2}{5}} \right], \\ \left[(\tilde{r}_{X,Y})_{\alpha=0}^U, (\tilde{r}_{X,Y})_{\alpha=1}^U \right] &= \left[\frac{10}{\sqrt{154}}, \frac{8}{\sqrt{70}} \right]. \end{aligned}$$

همان‌طور که انتظار می‌رفت بر اساس این رابطه کمترین مقدار ضریب همبستگی برابر با $0/378^\circ$ و بیشترین مقدار ضریب همبستگی $0/9562^\circ$ است که دقیقاً با مقادیر به دست آمده از رابطه (۳) مطابقت دارد. با این وجود باید توجه نمود که هر چند تنها مشاهده نادقیق در مجموعه مشاهدات یک عدد فازی ذوزنقه‌ای است، اما نمودار تابع عضویت ضریب همبستگی فازی به دست آمده (شکل (۲) را ببینید) منطبق بر نمودار یک عدد فازی ذوزنقه‌ای نیست.



شکل ۲: نمودار تابع عضویت ضریب همبستگی بین مشاهدات A, B, C, D

۲.۲ حالت کلی

فرض کنید $(\tilde{X}_1, \tilde{Y}_1), (\tilde{X}_2, \tilde{Y}_2), \dots, (\tilde{X}_n, \tilde{Y}_n)$ نمونه‌ای از مشاهدات نادقیق جمع‌آوری شده دو متغیر تحت بررسی باشند که هدف محاسبه و تحلیل ضریب همبستگی بین آن‌ها است. مشابه با رابطه (۱)،

ضریب همبستگی این مشاهدات نادقیق به صورت زیر قابل بازنویسی است

$$\tilde{r}_{X,Y} = \frac{\sum_{i=1}^n (\tilde{X}_i - \frac{\sum_{i=1}^n \tilde{X}_i}{n})(\tilde{Y}_i - \frac{\sum_{i=1}^n \tilde{Y}_i}{n})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (\tilde{X}_i - \frac{\sum_{i=1}^n \tilde{X}_i}{n})^2 \sum_{i=1}^n (\tilde{Y}_i - \frac{\sum_{i=1}^n \tilde{Y}_i}{n})^2}}. \quad (۴)$$

برخلاف زیربخش قبل که تنها یک داده نادقیق وجود داشت، رابطه (۴) تابعی از اعداد فازی مختلف است که محاسبه مقدار آن نیازمند انجام محاسبات جبری فراوان و پیچیده روی این اعداد است که به سادگی نتیجه بخش نخواهد بود. در چنین شرایطی استفاده از اصل گسترش کار را بسیار ساده تر خواهد کرد. بر اساس این اصل، تابع عضویت ضریب همبستگی این مشاهدات به صورت زیر تعریف می شود

$$\mu_{\tilde{r}_{X,Y}}(r) = \sup_{X,Y} \min \left\{ \mu_{\tilde{X}_i}(x_i), \mu_{\tilde{Y}_i}(y_i), \forall i \mid r = r_{X,Y} \right\}, \quad (۵)$$

که در آن $r_{X,Y}$ در رابطه (۱) تعریف شده است.

در ادامه از به کارگیری اصل گسترش برای α -برش های $\tilde{r}_{X,Y}$ استفاده خواهیم کرد که در نهایت منجر به تعیین تابع عضویت خواهد شد. فرض کنید α -برش های \tilde{X}_i و \tilde{Y}_i (برای $0 \leq \alpha \leq 1$) $(i = 1, 2, \dots, n)$ به صورت زیر تعریف شده باشند

$$\begin{aligned} (\tilde{X}_i)_\alpha &= \left[(\tilde{X}_i)_\alpha^L, (\tilde{X}_i)_\alpha^U \right] = \left[\min_x \left\{ x_i \in X \mid \mu_{\tilde{X}_i}(x_i) \geq \alpha \right\}, \max_x \left\{ x_i \in X \mid \mu_{\tilde{X}_i}(x_i) \geq \alpha \right\} \right] \\ (\tilde{Y}_i)_\alpha &= \left[(\tilde{Y}_i)_\alpha^L, (\tilde{Y}_i)_\alpha^U \right] = \left[\min_y \left\{ y_i \in Y \mid \mu_{\tilde{Y}_i}(y_i) \geq \alpha \right\}, \max_y \left\{ y_i \in Y \mid \mu_{\tilde{Y}_i}(y_i) \geq \alpha \right\} \right], \end{aligned}$$

که در این روابط X و Y مجموعه های مرجعی هستند که \tilde{X}_i و \tilde{Y}_i بر روی آن ها تعریف شده اند. بر اساس رابطه (۵)، مقدار $\mu_{\tilde{r}_{X,Y}}$ مینیمم مقادیر $\mu_{\tilde{X}_i}(x_i)$ و $\mu_{\tilde{Y}_i}(y_i)$ به ازای تمام مقادیر i است. بنابراین برای این که $\mu_{\tilde{r}_{X,Y}}(r) = \alpha$ بایستی به ازای تمام مقادیر i داشته باشیم که

$$\mu_{\tilde{X}_i}(x_i) \geq \alpha, \quad \mu_{\tilde{Y}_i}(y_i) \geq \alpha,$$

و حداقل یکی از مقادیر $\mu_{\tilde{X}_i}(x_i)$ یا $\mu_{\tilde{Y}_i}(y_i)$ مساوی با α باشند به طوری که $r = r_{X,Y}$. حال با توجه

به این نکته که تمام α -برش‌ها تودرتو می‌باشند، می‌توان برای تمام $1 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \infty$ نوشت

$$[(X_i)_{\alpha_1}^L, (X_i)_{\alpha_1}^U] \subseteq [(X_i)_{\alpha_2}^L, (X_i)_{\alpha_2}^U],$$

$$[(Y_i)_{\alpha_1}^L, (Y_i)_{\alpha_1}^U] \subseteq [(Y_i)_{\alpha_2}^L, (Y_i)_{\alpha_2}^U].$$

بنابراین $\mu_{\tilde{Y}_i}(y_i) = \alpha$ و $\mu_{\tilde{Y}_i}(y_i) \geq \alpha$ ، $\mu_{\tilde{X}_i}(x_i) = \alpha$ ، $\mu_{\tilde{X}_i}(x_i) \geq \alpha$ می‌باشند. بنابراین برای محاسبه تابع عضویت ضریب همبستگی فازی $\tilde{r}_{X,Y}$ کفایت کران‌های پایین و بالای α -برش این کمیت فازی را محاسبه کنیم که با توجه به توضیحات ارائه شده می‌توان این دو کران را در قالب دو برنامه‌ریزی غیرخطی به صورت زیر مدل بندی کرد

$$(\tilde{r}_{X,Y})_{\alpha}^L = \min \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}, \quad (6)$$

$$s.t. \quad (\tilde{X}_i)_{\alpha}^L \leq x_i \leq (\tilde{X}_i)_{\alpha}^U, \quad \forall i, \quad (\tilde{Y}_i)_{\alpha}^L \leq y_i \leq (\tilde{Y}_i)_{\alpha}^U, \quad \forall i,$$

$$(\tilde{r}_{X,Y})_{\alpha}^U = \max \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}. \quad (7)$$

$$s.t. \quad (\tilde{X}_i)_{\alpha}^L \leq x_i \leq (\tilde{X}_i)_{\alpha}^U, \quad \forall i, \quad (\tilde{Y}_i)_{\alpha}^L \leq y_i \leq (\tilde{Y}_i)_{\alpha}^U, \quad \forall i.$$

برای حل این برنامه‌ریزی‌های غیرخطی از روش گرادیان و نرم‌افزار متلب استفاده خواهیم کرد. برای دو مقدار α_1 و α_2 دلخواه که $1 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \infty$ هستند، ناحیه جواب‌های شدنی تعریف شده توسط α_1 در برنامه‌های ارائه شده روابط (6) و (7) کوچک‌تر از ناحیه تعریف شده توسط α_2 خواهد بود. در نتیجه α -برش‌های $\tilde{r}_{X,Y}$ در سطح α_1 در α -برش‌های ایجاد شده در سطح α_2 قرار خواهد گرفت و به این دلیل تابع عضویت ضریب همبستگی $\tilde{r}_{X,Y}$ محدب خواهد شد. حال با داشتن شرط تحدب مورد بحث می‌توانیم پهنه‌های چپ و راست تابع عضویت $\tilde{r}_{X,Y}$ را با استفاده از α -برش‌های به دست آمده محاسبه کنیم و در نهایت به فرم تابع عضویت خواهیم رسید.

نکته قابل ذکر این است که با توجه به تابع عضویت در نظر گرفته شده برای داده‌های نادقیق اولیه، ممکن است فرم پهنه‌های چپ و راست تابع عضویت، آنقدر پیچیده به دست آیند که امکان پیدا کردن خود تابع

عضویت وجود نداشته باشد. در این شرایط از روش‌های عددی برای محاسبه میزان عضویت استفاده خواهیم کرد. با در نظر گرفتن $L(r)$ و $R(r)$ به عنوان پهنای چپ و راست تابع عضویت، می‌توان فرم نهایی تابع عضویت را از رابطه زیر به دست آورد

$$\mu_{\tilde{r}_{X,Y}}(r) = \begin{cases} L(r) & (\tilde{r}_{X,Y})_{\alpha=0}^L \leq r \leq (\tilde{r}_{X,Y})_{\alpha=1}^L, \\ 1 & (\tilde{r}_{X,Y})_{\alpha=1}^L \leq r \leq (\tilde{r}_{X,Y})_{\alpha=1}^U, \\ R(r) & (\tilde{r}_{X,Y})_{\alpha=1}^U \leq r \leq (\tilde{r}_{X,Y})_{\alpha=0}^U. \end{cases} \quad (۸)$$

در ادامه با ذکر یک مثال عددی به تشریح روش ارائه شده می‌پردازیم.

مثال ۱.۲. رابطه بین شاخص‌های تکنولوژی و مدیریت همواره موضوعی مهم بوده و اندازه‌گیری آن مورد توجه محققین بسیاری قرار گرفته است. [۴] با استفاده از اطلاعات موجود راجع به این دو متغیر که معمولاً در قالب متغیرهای زبانی بیان می‌شوند، آن‌ها را به صورت اعداد فازی مدل‌بندی و ارائه نموده‌اند. بر این اساس، جداول ۱ و ۲ به ترتیب -برش-های α مربوط به سطوح مختلف تکنولوژی (\tilde{T}_i) و مدیریت (\tilde{M}_i) در یک نمونه ۱۵ تایی از شرکت‌های صنعتی کشور تایوان را نشان می‌دهد که با دقت 0.1 گزارش شده‌اند. بر اساس روش مورد مطالعه در این زیربخش و با استفاده از α -برش‌های موجود برای هر یک از سطوح مختلف برش، می‌توان یک برنامه ریزی غیرخطی تشکیل داد و با استفاده از نرم‌افزار متلب آن را حل کرد و جواب نهایی که همان α -برش مقدار ضریب همبستگی می‌باشد را به دست آورد. در پایان نتایج مربوط به هریک از سطوح مختلف α در جدول (۳) ارائه شده است. بر اساس مقادیر α -برش بالایی و پایینی $\tilde{r}_{\tilde{T},\tilde{M}}$ در سطوح مختلف، نمودار تقریبی ضریب همبستگی فازی بین مدیریت و تکنولوژی با استفاده از نرم افزار متلب در شکل (۳) رسم شده است.

برای تحلیل همبستگی بین این دو متغیر بر اساس شاخص ضریب همبستگی معرفی شده، ابتدا به نکات زیر که می‌توان از نتایج حاصل استخراج کرد توجه می‌کنیم

الف) تکیه‌گاه $\tilde{r}_{\tilde{T},\tilde{M}}$ بسیار گسترده است و دامنه آن از 0.8281 تا 0.9862 می‌باشد. بر اساس این بازه به دست آمده می‌توان چنین نتیجه‌گیری کرد که اگر چه ضریب همبستگی در این شرایط کمیته نادقیق است، اما نمی‌تواند کمتر از 0.8281 و بیشتر از 0.9862 باشد.

جدول ۱: مقادیر α - برش شاخص‌های متغیر تکنولوژی فازی شرکت‌های منتخب در مثال (۱.۲)

شرکت		$\alpha = 0$	$\alpha = 1$	$\alpha = 0/2$	$\alpha = 0/3$	$\alpha = 0/4$	$\alpha = 0/5$	$\alpha = 0/6$	$\alpha = 0/7$	$\alpha = 0/8$	$\alpha = 0/9$	$\alpha = 1$
۱	L	0/0790	0/0963	0/1127	0/1282	0/1448	0/1565	0/1694	0/1812	0/1917	0/2018	0/2120
	U	0/2527	0/3346	0/3174	0/3012	0/2858	0/2712	0/2576	0/2449	0/2330	0/2222	0/2120
۲	L	0/6348	0/6549	0/6741	0/6923	0/7097	0/7262	0/7418	0/7565	0/7703	0/7832	0/7953
	U	0/9069	0/8924	0/7889	0/8661	0/8548	0/8444	0/8343	0/8246	0/8156	0/8058	0/7953
۳	L	0/4444	0/4604	0/4786	0/4969	0/5153	0/5339	0/5526	0/5714	0/5904	0/6094	0/6287
	U	0/7420	0/7323	0/7223	0/7119	0/7011	0/6899	0/6784	0/6665	0/6543	0/6416	0/6287
۴	L	0/1692	0/1898	0/2103	0/2305	0/2506	0/2706	0/2904	0/3100	0/3294	0/3486	0/3677
	U	0/5585	0/5398	0/5210	0/5022	0/4832	0/4641	0/4450	0/4258	0/4065	0/3871	0/3677
۵	L	0/4674	0/4830	0/4988	0/5125	0/5265	0/5402	0/5534	0/5663	0/5788	0/5908	0/6029
	U	0/5598	0/7400	0/7213	0/7036	0/6869	0/6710	0/6550	0/6417	0/6286	0/6157	0/6029
۶	L	0/6469	0/6703	0/6927	0/7144	0/7352	0/7554	0/7749	0/7938	0/8121	0/8299	0/8472
	U	0/9322	0/9253	0/9181	0/9106	0/9026	0/8943	0/8856	0/8766	0/8671	0/8573	0/8472
۷	L	0/1835	0/1999	0/2155	0/2290	0/2418	0/2546	0/2674	0/2801	0/2927	0/3053	0/3179
	U	0/4605	0/4431	0/4265	0/4108	0/3957	0/3813	0/3685	0/3558	0/3432	0/3305	0/3179
۸	L	0/2636	0/2824	0/3010	0/3195	0/3397	0/3591	0/3785	0/3981	0/4178	0/4377	0/4577
	U	0/6740	0/6635	0/6528	0/6418	0/6305	0/6190	0/6073	0/5952	0/5830	0/5704	0/5577
۹	L	0/0628	0/0731	0/0841	0/0959	0/1085	0/1218	0/1358	0/1506	0/1660	0/1822	0/1992
	U	0/4027	0/3800	0/3570	0/3347	0/3132	0/2923	0/2723	0/2529	0/2343	0/2163	0/1992
۱۰	L	0/1554	0/1742	0/1928	0/2112	0/2294	0/2474	0/2651	0/2827	0/2999	0/3169	0/3337
	U	0/4934	0/4766	0/4613	0/4464	0/4310	0/4154	0/3996	0/3834	0/3671	0/3505	0/3337
۱۱	L	0/0085	0/0166	0/0238	0/0319	0/0408	0/0506	0/0613	0/0728	0/0851	0/0983	0/1123
	U	0/3030	0/2799	0/2577	0/2364	0/2159	0/1964	0/1778	0/1601	0/1432	0/1273	0/1123
۱۲	L	0/2927	0/3046	0/3159	0/3268	0/3382	0/3500	0/3623	0/3751	0/3885	0/4024	0/4170
	U	0/6096	0/5856	0/5628	0/5413	0/5208	0/5013	0/4827	0/4651	0/4483	0/4322	0/4170
۱۳	L	0/3112	0/3305	0/3499	0/3695	0/3892	0/4090	0/4289	0/4489	0/4691	0/4894	0/5098
	U	0/6399	0/6255	0/6105	0/5953	0/5806	0/5666	0/5536	0/5404	0/5272	0/5136	0/5008
۱۴	L	0/2754	0/2963	0/3172	0/3382	0/3594	0/3808	0/4024	0/4241	0/4460	0/4680	0/4903
	U	0/6348	0/6217	0/6082	0/5945	0/5805	0/5662	0/5516	0/5367	0/5215	0/5060	0/4903
۱۵	L	0/3344	0/3547	0/3702	0/3859	0/4016	0/4164	0/4318	0/4480	0/4649	0/4826	0/5011
	U	0/6411	0/6253	0/6098	0/5948	0/5802	0/5660	0/5523	0/5393	0/5264	0/5137	0/5011

ب) با فرض این‌که تمام داده‌های گزارش شده در این مثال اعدادی دقیق باشند ($\alpha = 1$) مقدار ضریب همبستگی بین دو متغیر تحت بررسی برابر با $0/295$ خواهد بود. از طرفی به سادگی می‌توان دید که میزان عضویت $r = 0/295$ در مجموعه فازی به دست آمده برابر با ۱ است. علاوه بر آن می‌توانیم جهت استنباط دقیق‌تر میزان عضویت $r = 0$ که مبنی بر ناهمبسته بودن دو متغیر است را نیز بررسی کنیم. بر این اساس میزان عضویت $r = 0$ در مجموعه فازی به دست آمده برابر $0/78$ است که مقداری قابل توجه است.

پ) با توجه به نمودار به دست آمده برای تابع عضویت $\tilde{T}, \tilde{I}, \tilde{N}$ و با اندکی محاسبات، مساحت قرار گرفته

جدول ۲: مقادیر α - برش شاخص‌های متغیر مدیریت فازی شرکت‌های منتخب در مثال (۱.۲)

شرکت		$\alpha = 0$	$\alpha = 0/1$	$\alpha = 0/2$	$\alpha = 0/3$	$\alpha = 0/4$	$\alpha = 0/5$	$\alpha = 0/6$	$\alpha = 0/7$	$\alpha = 0/8$	$\alpha = 0/9$	$\alpha = 1$
۱	L	۰/۲۴۸۶	۰/۲۶۸۲	۰/۲۸۷۹	۰/۳۰۷۷	۰/۳۲۷۶	۰/۳۴۷۶	۰/۳۶۷۸	۰/۳۸۸۰	۰/۴۰۸۳	۰/۴۲۸۸	۰/۴۴۹۳
	U	۰/۶۶۱۶	۰/۶۳۹۷	۰/۶۱۷۸	۰/۵۹۶۲	۰/۵۷۴۷	۰/۵۵۳۴	۰/۵۳۲۳	۰/۵۱۱۳	۰/۴۹۰۵	۰/۴۶۹۸	۰/۴۴۹۳
۲	L	۰/۴۹۰۲	۰/۵۱۳۲	۰/۵۳۶۱	۰/۵۵۸۹	۰/۵۸۱۶	۰/۶۰۴۳	۰/۶۲۶۹	۰/۶۴۹۵	۰/۶۷۲۰	۰/۶۹۴۵	۰/۷۱۷۰
	U	۰/۹۱۳۸	۰/۸۹۳۳	۰/۸۷۴۸	۰/۸۵۵۲	۰/۸۳۵۶	۰/۸۱۶۰	۰/۷۹۶۳	۰/۷۶۵	۰/۷۵۶۷	۰/۷۳۹۶۷	۰/۷۱۷۰
۳	L	۰/۲۶۲۴	۰/۲۷۷۶	۰/۲۹۳۱	۰/۳۰۸۸	۰/۳۲۴۷	۰/۳۴۰۸	۰/۳۵۷۱	۰/۳۷۳۶	۰/۳۹۰۲	۰/۴۰۷۱	۰/۴۲۴۳
	U	۰/۵۷۵۲	۰/۵۵۸۹	۰/۵۴۲۸	۰/۵۲۷۱	۰/۵۱۱۶	۰/۴۹۶۴	۰/۴۸۱۴	۰/۴۶۶۸	۰/۴۵۱۴	۰/۴۳۸۲	۰/۴۲۴۳
۴	L	۰/۶۲۵۸	۰/۶۴۸۵	۰/۶۶۱۱	۰/۶۸۳۷	۰/۷۱۶۲	۰/۷۳۸۷	۰/۷۶۱۲	۰/۷۸۳۶	۰/۸۰۶۰	۰/۸۲۸۴	۰/۸۵۰۷
	U	۰/۹۶۸۰	۰/۹۵۶۹	۰/۹۴۵۶	۰/۹۳۳۲	۰/۹۲۲۸	۰/۹۱۱۴	۰/۹۰۰۰	۰/۸۸۷۹	۰/۸۷۵۸	۰/۸۶۳۴	۰/۸۵۰۷
۵	L	۰/۲۳۳۱	۰/۲۵۱۳	۰/۲۷۱۶	۰/۲۹۰۹	۰/۳۱۰۳	۰/۳۲۹۸	۰/۳۴۹۴	۰/۳۶۹۱	۰/۳۸۹۰	۰/۴۰۸۹	۰/۴۲۹۰
	U	۰/۶۲۳۳	۰/۶۰۳۲	۰/۵۸۳۳	۰/۵۶۲۵	۰/۵۴۲۸	۰/۵۲۳۳	۰/۵۰۳۵	۰/۴۸۵۸	۰/۴۶۶۷	۰/۴۴۷۸	۰/۴۲۹۰
۶	L	۰/۱۳۹۵	۰/۱۵۶۳	۰/۱۷۳۳	۰/۱۹۰۴	۰/۲۰۷۶	۰/۲۲۵۰	۰/۲۴۲۵	۰/۲۶۰۲	۰/۲۷۸۰	۰/۲۹۵۹	۰/۳۱۳۹
	U	۰/۵۰۴۲	۰/۴۸۴۱	۰/۴۶۳۲	۰/۴۴۲۶	۰/۴۲۵۳	۰/۴۰۶۲	۰/۳۸۷۳	۰/۳۶۸۶	۰/۳۵۰۲	۰/۳۳۱۹	۰/۳۱۳۹
۷	L	۰/۰۷۰۷	۰/۰۸۶۰	۰/۱۰۱۵	۰/۱۱۷۱	۰/۱۳۲۸	۰/۱۴۸۶	۰/۱۶۴۴	۰/۱۸۰۴	۰/۱۹۶۵	۰/۲۱۲۷	۰/۲۲۹۰
	U	۰/۴۰۰۳	۰/۳۸۲۴	۰/۳۶۴۷	۰/۳۴۷۱	۰/۳۲۹۷	۰/۳۱۲۵	۰/۲۹۵۵	۰/۲۷۸۶	۰/۲۶۱۹	۰/۲۴۵۴	۰/۲۲۹۰
۸	L	۰/۱۰۷۶	۰/۱۲۵۲	۰/۱۴۲۹	۰/۱۶۰۸	۰/۱۷۸۸	۰/۱۹۶۹	۰/۲۱۵۲	۰/۲۳۳۶	۰/۲۵۱۶	۰/۲۷۰۷	۰/۲۸۹۴
	U	۰/۴۸۶۶	۰/۴۶۶۰	۰/۴۴۵۷	۰/۴۲۵۶	۰/۴۰۵۶	۰/۳۸۵۸	۰/۳۶۶۲	۰/۳۴۶۷	۰/۳۲۷۵	۰/۳۰۷۸	۰/۲۸۹۴
۹	L	۰/۱۴۶۹	۰/۱۶۳۴	۰/۱۸۰۰	۰/۱۹۶۷	۰/۲۱۳۴	۰/۲۳۰۶	۰/۲۴۷۸	۰/۲۶۵۰	۰/۲۸۲۴	۰/۲۹۹۹	۰/۳۱۷۵
	U	۰/۵۰۵۶	۰/۴۸۵۸	۰/۴۶۶۲	۰/۴۴۶۸	۰/۴۲۷۷	۰/۴۰۸۸	۰/۳۹۰۱	۰/۳۷۱۶	۰/۳۵۲۴	۰/۳۳۳۴	۰/۳۱۷۵
۱۰	L	۰/۲۵۵۵	۰/۲۷۲۱	۰/۲۸۸۹	۰/۳۰۵۹	۰/۳۲۳۱	۰/۳۴۰۵	۰/۳۵۸۱	۰/۳۷۵۹	۰/۳۹۳۸	۰/۴۱۱۰	۰/۴۲۰۳
	U	۰/۶۲۱۸	۰/۶۰۱۳	۰/۵۸۱۱	۰/۵۶۱۲	۰/۵۴۱۶	۰/۵۲۲۴	۰/۵۰۳۴	۰/۴۸۴۷	۰/۴۶۶۳	۰/۴۴۸۲	۰/۴۳۰۳
۱۱	L	۰/۰۴۴۸	۰/۰۵۱۹	۰/۰۵۹۰	۰/۰۶۶۴	۰/۰۷۳۷	۰/۰۸۱۲	۰/۰۸۸۹	۰/۰۹۶۷	۰/۱۰۴۷	۰/۱۱۳۰	۰/۱۲۱۴
	U	۰/۲۱۸۸	۰/۲۰۷۸	۰/۱۹۷۲	۰/۱۸۶۸	۰/۱۷۶۶	۰/۱۶۶۸	۰/۱۵۷۲	۰/۱۴۷۹	۰/۱۳۸۸	۰/۱۳۰۰	۰/۱۲۱۴
۱۲	L	۰/۳۳۷۱	۰/۳۵۷۷	۰/۳۷۸۳	۰/۳۹۹۰	۰/۴۱۹۷	۰/۴۴۰۴	۰/۴۶۱۱	۰/۴۸۱۹	۰/۵۰۲۶	۰/۵۲۳۴	۰/۵۴۴۲
	U	۰/۷۵۴۰	۰/۷۳۳۸	۰/۷۱۱۶	۰/۶۹۰۵	۰/۶۶۹۴	۰/۶۴۸۴	۰/۶۲۷۵	۰/۶۰۶۶	۰/۵۸۵۷	۰/۵۶۴۹	۰/۵۴۴۲
۱۳	L	۰/۵۲۴۹	۰/۵۴۲۲	۰/۵۵۹۵	۰/۵۹۱۷	۰/۶۱۳۸	۰/۶۳۵۹	۰/۶۵۸۰	۰/۶۸۰۰	۰/۷۰۲۰	۰/۷۲۳۹	۰/۷۴۵۸
	U	۰/۹۴۹۵	۰/۹۲۹۲	۰/۹۰۸۹	۰/۸۸۸۶	۰/۸۶۸۳	۰/۸۴۸۰	۰/۸۲۷۶	۰/۸۰۷۲	۰/۷۸۶۸	۰/۷۶۶۵	۰/۷۴۵۸
۱۴	L	۰/۴۹۵۷	۰/۵۱۷۹	۰/۵۴۰۱	۰/۵۶۲۴	۰/۵۸۴۷	۰/۶۰۷۱	۰/۶۲۹۴	۰/۶۵۱۸	۰/۶۷۴۳	۰/۶۹۶۷	۰/۷۱۹۲
	U	۰/۸۳۱۰	۰/۸۲۰۲	۰/۸۰۹۴	۰/۷۹۸۴	۰/۷۸۷۴	۰/۷۷۶۲	۰/۷۶۵۰	۰/۷۵۳۷	۰/۷۴۲۳	۰/۷۳۰۸	۰/۷۱۹۲
۱۵	L	۰/۳۸۶۳	۰/۴۰۹۱	۰/۴۳۱۶	۰/۴۵۴۰	۰/۴۷۶۵	۰/۴۹۹۰	۰/۵۲۱۵	۰/۵۴۳۹	۰/۵۶۶۴	۰/۵۸۸۹	۰/۶۱۱۵
	U	۰/۷۷۱۵	۰/۷۵۵۷	۰/۷۳۹۹	۰/۷۲۴۰	۰/۷۰۸۰	۰/۶۹۲۱	۰/۶۷۶۰	۰/۶۶۰۰	۰/۶۴۴۹	۰/۶۲۷۷	۰/۶۱۱۵

جدول ۳: مقادیر α - برش ضریب همبستگی فازی بین تکنولوژی و مدیریت شرکت‌های منتخب در نمونه تصادفی

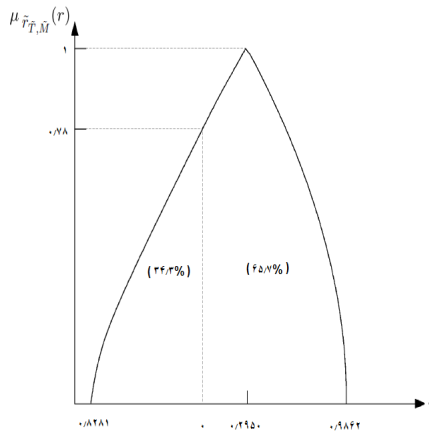
مثال (۱.۲)

کران		$\alpha = 0$	$\alpha = 0/1$	$\alpha = 0/2$	$\alpha = 0/3$	$\alpha = 0/4$	$\alpha = 0/5$	$\alpha = 0/6$	$\alpha = 0/7$	$\alpha = 0/8$	$\alpha = 0/9$	$\alpha = 1$
	L	-۰/۸۲۸۱	-۰/۷۷۴۸	-۰/۶۹۳۳	-۰/۵۹۴۷	-۰/۴۸۶۱	-۰/۳۶۹۶	-۰/۲۴۲۶	-۰/۱۰۹۱	۰/۰۲۶۷	۰/۱۶۴۹	۰/۲۹۵۰
	U	۰/۹۸۶۲	۰/۹۷۰۴	۰/۹۴۷۵	۰/۹۱۶۳	۰/۸۷۴۳	۰/۸۱۶۷	۰/۷۴۰۹	۰/۶۵۳۷	۰/۵۴۲۵	۰/۴۲۳۳	۰/۲۹۵۰

در سمت چپ صفر برابر با $۳۴/۳$ درصد و در سمت راست آن $۶۵/۷$ درصد بوده است.

بر اساس سه مورد ذکر شده می‌توان در مجموع چنین نتیجه‌گیری کرد که ارتباط بین مدیریت و تکنولوژی

در شرکت مورد بررسی نسبتاً ضعیف بوده است.



شکل ۳: نمودار تقریبی تابع عضویت ضریب همبستگی فازی بین تکنولوژی و مدیریت در مثال (۱.۲)

۳ ضریب همبستگی بین اعداد فازی تحت T -نرم دراستیک

همان‌طور که در بخش قبل گفته شد، نخستین رویکرد برای تعریف ضریب همبستگی بین اعداد فازی بر پایه استفاده از α -برش‌های اعداد فازی بود که منجر به حل یک برنامه‌ریزی ریاضی می‌شود. در این بخش با رویکردی متفاوت که بر پایه استفاده از T نرم‌ها بنا نهاده شده است، به بررسی رویکردی جدید برای ضریب همبستگی بین اعداد فازی می‌پردازیم.

۱.۳ عملیات جبری روی اعداد فازی بر اساس T -نرم دراستیک

در این زیربخش عملیات جبری چهارگانه شامل جمع، تفریق، ضرب، تقسیم بین اعداد فازی LR را بر اساس T -نرم دراستیک را به کوتاهی مورد مطالعه قرار می‌دهیم [۱].

تعریف ۱.۳. فرض کنید $I = [0, 1]$. یک تابع دو متغیره به صورت $T : I \times I \rightarrow I$ را یک T -نرم گوئیم اگر در خواص زیر صدق کند

الف) $T(x, 1) = x$

ب) یکنوایی: $x_1 \leq x_2, y_1 \leq y_2 \implies T(x_1, y_1) \leq T(x_2, y_2)$

پ) جابه‌جایی: $T(x, y) = T(y, x)$

(ت) شرکت‌پذیری: $T[x, T(y, z)] = T[T(x, y), z]$

T -نرم‌ها و T -هم‌نرم‌ها (یا S -نرم‌ها) را نرم‌های مثلثی و هم‌نرم‌های مثلثی نیز گویند. این دو رده از اندازه‌ها به خاطر نقشی که در نامساوی‌های مثلثی دارند به این نام خوانده می‌شوند و به دلیل ویژگی‌های بسیار جالب اخیراً بیشتر مورد توجه واقع شده‌اند. در بین عملگرهای T -نرم عملگر دراستیک خواص جالبی دارد و مورد توجه قرار گرفته است و به صورت زیر تعریف می‌شود

$$T_W(x, y) = \begin{cases} x & y = 1, \\ y & x = 1, \\ 0 & x, y \neq 1. \end{cases}$$

فرض کنید $T = T_W$ ضعیف‌ترین T -نرم باشد و $\tilde{A} = (a, \alpha_A, \beta_A)_{LR}$ و $\tilde{B} = (b, \alpha_B, \beta_B)_{LR}$ دو عدد فازی LR باشند. در این صورت جمع بین این دو عدد فازی تحت T -نرم دراستیک عبارتست از

(۹)

$$\tilde{A} \oplus \tilde{B} = (a, \alpha_A, \beta_A)_{LR} \oplus (b, \alpha_B, \beta_B)_{LR} = (a+b, \max\{\alpha_A, \alpha_B\}, \max\{\beta_A, \beta_B\})_{LR}.$$

در صورتی که $L = R$ باشد، تفاضل این دو عدد فازی تحت T -نرم دراستیک یک عدد فازی LR به صورت زیر است

$$\begin{aligned} \tilde{A} \ominus \tilde{B} &= (a, \alpha_A, \beta_A)_{LR} \ominus (b, \alpha_B, \beta_B)_{LR} \\ &= (a, \alpha_A, \beta_A)_{LR} \oplus (-b, \beta_B, \alpha_B)_{LR} = (a-b, \max\{\alpha_A, \beta_B\}, \max\{\beta_A, \alpha_B\})_{LR}. \end{aligned} \quad (10)$$

برای بررسی ضرب دو عدد فازی LR تحت T -نرم دراستیک بایستی حالت‌های مختلفی را برای مراکز دو عدد فازی تحت بررسی مورد مطالعه قرار دهیم که در ادامه به آن پرداخته شده‌است. حالت اول: فرض کنید $a, b > 0$. در این صورت برای مقادیر $z \leq ab$ داریم

$$\begin{aligned} (\tilde{A} \otimes \tilde{B})(z) &= \sup_{x,y=z} T_W(\tilde{A}(x), \tilde{B}(y)) \\ &= \max \left\{ \tilde{A}\left(\frac{z}{b}\right), \tilde{B}\left(\frac{z}{a}\right) \right\} = \max \left\{ L\left(\frac{a - \frac{z}{b}}{\alpha_A}\right), L\left(\frac{b - \frac{z}{a}}{\alpha_B}\right) \right\} \\ &= \max \left\{ L\left(\frac{ab - z}{\alpha_{Ab}}\right), L\left(\frac{ab - z}{\alpha_{Ba}}\right) \right\}. \end{aligned} \quad (11)$$

بنابراین می‌توان نوشت

$$(\tilde{A} \otimes \tilde{B})(z) = \begin{cases} L \left[\frac{(ab-z)}{\max\{\alpha_{Ab}, \alpha_{Ba}\}} \right] & z \geq ab - \max\{\alpha_{Ab}, \alpha_{Ba}\}, \\ \circ & \text{در غیر این صورت.} \end{cases} \quad (12)$$

به‌طور مشابه

$$(\tilde{A} \otimes \tilde{B})(z) = \begin{cases} R \left[\frac{(z-ab)}{\max\{\beta_{Ab}, \beta_{Ba}\}} \right] & z \leq ab - \max\{\beta_{Ab}, \beta_{Ba}\}, \\ \circ & \text{در غیر این صورت.} \end{cases} \quad (13)$$

با جمع‌بندی دو عبارت به‌دست آمده در روابط (۱۲) و (۱۳) می‌توان ضرب دو عدد فازی LR را در حالت $a, b > \circ$ به صورت یک عدد فازی LR با تعریف زیر ارائه نمود

$$\tilde{A} \otimes \tilde{B} = (ab, \max\{\alpha_{Ab}, \alpha_{Ba}\}, \max\{\beta_{Ab}, \beta_{Ba}\})_{LR}. \quad (14)$$

به روش مشابه با آنچه که در حالت اول مورد بررسی قرار گرفت، حالت‌های ممکن دیگر برای a, b به عنوان مراکز دو عدد فازی تحت بررسی در ادامه آورده شده است.

حالت دوم: اگر $a, b < \circ$ آنگاه ضرب دو عدد فازی \tilde{A} و \tilde{B} یک عدد فازی LR با تعریف زیر می‌باشد

$$\tilde{A} \otimes \tilde{B} = (ab, \max\{\beta_{Ab}, \beta_{Ba}\}, \max\{\alpha_{Ab}, \alpha_{Ba}\})_{RL}.$$

حالت سوم: فرض کنید $a = \circ, b > \circ$ در این صورت حاصل ضرب دو عدد فازی \tilde{A} و \tilde{B} عدد فازی LR با تعریف زیر است

$$\tilde{A} \otimes \tilde{B} = (\circ, \alpha_{Ab}, \beta_{Ab})_{LR}.$$

حالت چهارم: برای حالتی که $a = \circ, b < \circ$ باشد، حاصل ضرب یک عدد فازی LR به‌صورت زیر است

$$\tilde{A} \otimes \tilde{B} = (\circ, -\beta_{Ab}, -\alpha_{Ab})_{RL}.$$

حالت پنجم: در صورتی که $a = \circ, b = \circ$ باشند آن‌گاه

$$\tilde{A} \otimes \tilde{B} = (\circ, \circ, \circ)_{LR} = I_{\{\circ\}}(x).$$

که در آن

$$I_{\{\circ\}}(x) = \begin{cases} 1 & x = \circ \\ \circ & \text{در غیر این صورت} \end{cases}.$$

حالت ششم: در این حالت فرض می‌کنیم $a < \circ, b > \circ$ و علاوه بر آن $L = R$ باشد. در این صورت

$$\tilde{A} \otimes \tilde{B} = (ab, \max\{\alpha_{Ab}, -\beta_{Ba}\}, \max\{\beta_{Ab}, -\alpha_{Ba}\})_{RR}.$$

در صورتی که \tilde{A} و \tilde{B} اعداد فازی متقارن باشند آن‌گاه حاصل ضرب این دو عدد فازی متقارن یک عدد فازی LR با تعریف زیر می‌باشد

$$(\tilde{A} \otimes \tilde{B})(z) = (ab, \max\{\alpha_A | b |, \alpha_B | a |\}, \max\{\alpha_A | b |, \alpha_B | a |\})_{LL}.$$

برای به دست آوردن تابع عضویت ضریب همبستگی فازی $\tilde{r}_{X,Y}$ نیازمند محاسبه تابع عضویت آماره‌های میانگین و انحراف معیار می‌باشیم. در ادامه بدون کاستن از کلیت مسئله فرض می‌کنیم که \tilde{A} و \tilde{B} دو عدد فازی مثلثی متقارن باشند. در این بخش فرض می‌کنیم که $\tilde{A} + \dots + \tilde{A} = n \odot \tilde{A}$ باشد. در این صورت اگر $\tilde{A} = (a, \alpha)$ باشد آن‌گاه $\tilde{A} + \dots + \tilde{A} = (na, \alpha) = n \odot \tilde{A}$. بنابراین برای هر مقدار غیر صفر مانند t داریم $t \odot \tilde{A} = (ta, \alpha)$.

اکنون فرض کنید که n مشاهده فازی از متغیرهای \tilde{X} و \tilde{Y} در اختیار داشته باشیم و هدف محاسبه ضریب همبستگی این زوج مشاهدات نادقیق باشد. در چنین شرایطی رابطه (۱) را بر حسب نمادگذاری‌های جدید انجام شده، به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم [۳]

$$\tilde{r}_{X,Y} = \frac{\sum_{j=1}^n (\tilde{X}_j - \frac{1}{n} \odot \sum_{j=1}^n \tilde{X}_j)(\tilde{Y}_j - \frac{1}{n} \odot \sum_{j=1}^n \tilde{Y}_j)}{\sqrt{\sum_{j=1}^n (\tilde{X}_j - \frac{1}{n} \odot \sum_{j=1}^n \tilde{X}_j)^2 \sum_{j=1}^n (\tilde{Y}_j - \frac{1}{n} \odot \sum_{j=1}^n \tilde{Y}_j)^2}}. \quad (15)$$

فرض کنید $\tilde{Y}_j = (y_j, \delta_j)_L$ و $\tilde{X}_j = (x_j, r_j)_L$ نمونه‌های تصادفی از جوامع تحت بررسی باشند که به صورت اعداد فازی متقارن در نظر گرفته شده‌اند ($j = 1, \dots, n$). با توجه به عملگرهای جبری تعریف

شده بر اساس T - نرم دراستیک و نمادگذاری‌های انجام شده می‌توان نوشت

$$\tilde{X} = \frac{1}{n} \odot \sum_{j=1}^n \tilde{X}_j = \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j, \max_{1 \leq j \leq n} r_j \right)_L, \quad \tilde{Y} = \frac{1}{n} \odot \sum_{j=1}^n \tilde{Y}_j = \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n y_j, \max_{1 \leq j \leq n} \delta_j \right)_L$$

در این صورت با استفاده از رابطه (۱۴) خواهیم داشت

$$\begin{aligned} (\tilde{X}_j - \tilde{X})(\tilde{Y}_j - \tilde{Y}) &= \left(\left(x_j - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j \right) \left(y_j - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n y_j \right) \right. \\ &\quad \left. , \max \left(\left| x_j - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j \right| \max_{1 \leq j \leq n} \delta_j, \left| y_j - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n y_j \right| \max_{1 \leq j \leq n} r_j \right) \right)_L. \end{aligned}$$

با استفاده رابطه (۹) داریم

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n (\tilde{X}_j - \frac{1}{n} \odot \sum_{j=1}^n \tilde{X}_j) (\tilde{Y}_j - \frac{1}{n} \odot \sum_{j=1}^n \tilde{Y}_j) &= \left(\sum_{j=1}^n \left(x_j - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \right) \left(y_j - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_k \right) \right. \\ &\quad \left. , \max_{1 \leq j \leq n} \left(\left| x_j - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \right| \max_{1 \leq k \leq n} \delta_k, \left| y_j - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_k \right| \max_{1 \leq k \leq n} r_k \right) \right)_L \end{aligned}$$

از طرفی به‌طور مشابه می‌توان نوشت

$$\sum_{j=1}^n (\tilde{X}_j - \frac{1}{n} \odot \sum_{j=1}^n \tilde{X}_j)^2 = \left(\sum_{j=1}^n \left(x_j - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \right)^2, \max_{1 \leq j \leq n} \left| x_j - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \right| \max_{1 \leq k \leq n} r_k \right)_L$$

بنابراین

$$\begin{aligned}
 & \sqrt{\sum_{j=1}^n (\tilde{X}_j - \frac{1}{n} \odot \sum_{k=1}^n \tilde{X}_k)^2 \sum_{j=1}^n (\tilde{Y}_j - \frac{1}{n} \odot \sum_{k=1}^n \tilde{Y}_k)^2} \quad (18) \\
 &= \left(\sqrt{\sum_{j=1}^n (x_j - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k)^2 \sum_{j=1}^n (y_j - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_k)^2} \right. \\
 & \quad \left. , \sqrt{\sum_{j=1}^n (x_j - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k)^2 \sum_{j=1}^n (y_j - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_k)^2} \right. \\
 & \quad \times \max \left\{ \sum_{j=1}^n (x_j - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k)^2 \max_{1 \leq j \leq n} |y_j - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_k| \max_{1 \leq k \leq n} \delta_k, \right. \\
 & \quad \left. \sum_{j=1}^n (y_j - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_k)^2 \max_{1 \leq j \leq n} |x_j - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k| \max_{1 \leq k \leq n} r_k \right\} \Bigg)_L.
 \end{aligned}$$

در نهایت می‌توان تابع عضویت ضریب همبستگی فازی \tilde{r} را با استفاده از روابط به‌دست آمده برای تقسیم اعداد فازی تحت $-T$ نرم دراستیک محاسبه نمود.

مثال ۲.۳. یک مجموعه داده شامل یک ۸ زوج مشاهده از اعداد فازی مثلثی متقارن که در جدول (۲.۳) آورده شده‌اند را در نظر بگیرید [۲]

برای محاسبه ضریب همبستگی ابتدا محاسبات زیر را با توجه به روابط به‌دست آمده در این بخش انجام می‌دهیم

$$\sum_{j=1}^n (\tilde{X}_j - \tilde{X})(\tilde{Y}_j - \tilde{Y}) = (5/7500, 5/5625)$$

بنابراین

$$\sqrt{\sum_{j=1}^n (\tilde{X}_j - \tilde{X})^2 \sum_{j=1}^n (\tilde{Y}_j - \tilde{Y})^2} = (55/410, 6/1646)$$

در این صورت ضریب همبستگی اعداد فازی برابر است

جدول ۴: مجموعه داده شامل ۸ جفت از اعداد فازی مثلثی متقارن در مثال (۲.۳)

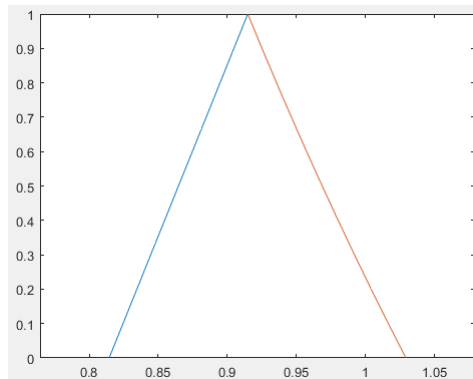
i	\tilde{X}_i	\tilde{Y}_i
۱	(۲/۰,۰/۵)	(۴/۰,۰/۵)
۲	(۳/۵,۰/۵)	(۵/۵,۰/۵)
۳	(۵/۵,۱/۰)	(۷/۵,۱/۰)
۴	(۷/۰,۰/۵)	(۶/۵,۰/۵)
۵	(۸/۵,۰/۵)	(۸/۵,۵/۰)
۶	(۱۰/۵,۱/۰)	(۸/۰,۱/۰)
۷	(۱۱/۰,۰/۵)	(۱۰/۵,۰/۵)
۸	(۱۲/۵,۰/۵)	(۹/۵,۰/۵)

$$\tilde{r}_{X,Y} = \frac{(۵/۷۵۰۰, ۵/۵۶۲۵)}{(۵۵/۴۸۱۰, ۶/۱۶۴۶)} = \begin{cases} 1 - \frac{۰/۹۱۴۷-z}{۰/۰۱۸ \times \max\{۵/۵۶۲۵, ۶/۱۶۴۶ \times z\}} & ۰/۸۱۴۵ \leq z \leq ۰/۹۱۴۷ \\ 1 - \frac{z-۰/۹۱۴۷}{۰/۰۱۸ \times \max\{۵/۵۶۲۵, ۶/۱۶۴۶ \times z\}} & ۰/۹۱۴۷ \leq z \leq ۱/۰۲۹۱ \\ ۰ & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (۱۹)$$

$$= \begin{cases} 1 - \frac{۰/۹۱۴۷-z}{۰/۱۰۰} & ۰/۸۱۴۵ \leq z \leq ۰/۹۰۲۳, \\ 1 - \frac{۰/۹۱۴۷-z}{۰/۱۱۱ \times z} & ۰/۹۰۲۳ \leq z \leq ۰/۹۱۴۷, \\ 1 - \frac{z-۰/۹۱۴۷}{۰/۱۱۱ \times z} & ۰/۹۱۴۷ \leq z \leq ۱/۰۲۹۱, \\ ۰ & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (۲۰)$$

نمودار مربوط به تابع عضویت ضریب همبستگی فازی مثلثی متقارن در شکل زیر نمایش داده شده است.

اگرچه رویکرد مبتنی بر T -نرم دراستیک محاسبات را به طرز قابل توجهی ساده‌تر می‌کند، اما همان‌طور که در شکل ۴ می‌توان دید حدود به دست آمده برای ضریب همبستگی در این مثال از ۱ بیشتر شده است که



شکل ۴: نمودار تقریبی تابع عضویت ضریب همبستگی فازی مثلثی متقارن در مثال (۲.۳)

با تعریف آن در شرایطی که داده‌ها دقیق باشند مطابقت ندارد.

مراجع

- [۱] طاهری، م (۱۳۷۵)، آشنایی با نظریه‌ی مجموعه‌های فازی، انتشارات جهاد دانشگاهی مشهد.
- [2] Chachi, J., Taheri, S.M., (2016), Multiple Fuzzy Regression Model for Fuzzy Input Output Data, Iranian Journal of Fuzzy Systems, Vol 13, pp 63-78.
- [3] Hong D. H., (2006), "Fuzzy measures for a correlation coefficient of fuzzy numbers under T_W (the weakest t -norm)-based fuzzy arithmetic operations", Information Sciences, Vol 176, pp 150-160.
- [4] Liu, S. T., Kao, C., (2002), "Fuzzy measures for correlation coefficient of fuzzy numbers", Fuzzy Sets and Systems, Vol 128, pp 267-275.