سیستم های فازی و کاربردها
سال اول، شماره اول (پاییز ۱۳۹۷) صص: ۷۳ تا ۹۱
DOR:20.1001.1.27174409.1397.1.1.6.7

ضریب همبستگی بین داده‌های فازی

رضا زارعی و طاهره کیانپور

دانشگاه گیلان، دانشکده علوم ریاضی، گروه آمار

چکیده

همبستگی یکی از مهم‌ترین شاخص‌هایی است که به‌طور گسترده در زمینه‌های مختلف به‌کار می‌رود و اندازه‌ای با اهمیت در تحلیل داده‌هاست. از آنجایی‌که بسیاری از داده‌های واقعی ممکن است نادقیق باشند، توسیع مفهوم همبستگی در محیط نادقیق ضروری به‌نظر می‌رسد. در این مقاله، ابتدا بر اساس تعریف کلاسیک ضریب همبستگی و اصل توسیع زاده یک معیار برای محاسبه ضریب همبستگی بین اعداد فازی را مطالعه می‌کنیم که در آن رویکرد برنامه‌ریزی ریاضی به‌منظور محاسبه میزان درجه عضویت به‌کارگرفته شده است. سپس، روشی دیگر برای تعیین و محاسبه دقیق تابع عضویت با استفاده از T-نرم دراستیک و اعمال جبری مبتنی بر آن مورد بررسی قرار گرفته است که به برنامه‌ریزی ریاضی بستگی ندارد.

۱ مقدمه

بررسی ساختار همبستگی و ارتباط میان متغیرها یکی از مسایل مورد توجه در آمار است. در بیشتر تحلیل‌های آماری یافتن و تعیین نوع رابطه بین متغیرهای تصادفی و مشاهدات حاصل از آن‌ها همواره مورد

Mathematics Subject Classification (2010): 62H25; 03E72, **Email:** rezazarei.r@gmail.com.

عبارات و کلمات کلیدی: اصل توسیع، برنامه‌ریزی ریاضی، ضریب همبستگی، عدد فازی، T-نرم دراستیک.

توجه محققین بوده است. تاکنون اندازه‌های متنوعی تحت عنوان ضرایب همبستگی بدین منظور معرفی شده و روش‌های مختلفی برای بررسی این ارتباط وجود دارد که بسته به ویژگی داده‌های مورد بررسی و هدف تحقیق، می‌توان از هر کدام از آن‌ها استفاده نمود. بر حسب این‌که متغیرها کمی یا کیفی باشند، ضریب همبستگی شاخصی است که میزان رابطه بین متغیرها را نشان می‌دهد. از مهم‌ترین ضرایب همبستگی که تاکنون معرفی شده‌اند می‌توان به ضریب همبستگی پیرسن، ضریب همبستگی رتبه ای اسپیرمن، C ضریب همبستگی توافق پیرسون یا ضریب توافق، ضریب همبستگی کرامر، ضریب همبستگی گاما، ضریب همبستگی فی اشاره کرد. یك ملاك مناسب براي تعيين همبستگي دو متغیر کمی ضریب همبستگی پیرسن می‌باشد که توسط پیرسون معرفی شد که از آن زمان تا کنون به منظور تعیین میزان رابطه، نوع و جهت رابطه‌ی بین دو متغیر فاصله‌ای یا نسبی و یا یک متغیر فاصله‌ای و یک متغیر نسبی به کار برده می‌شود.
با وجود کاربرد فراوان ضرایب همبستگی اشاره شده در بسیاری از مسایل واقعی به سبب شرایط حاکم بر مسئله خطای ماشین و یا خطای انسانی امکان اندازه‌گیری دقیق مشاهدات در مسئله تحت بررسی وجود ندارد. در این شرایط داده‌ها به صورت نادقیق گردآوری و ثبت شده و از این‌رو استفاده از روش‌های دقیق برای تجزیه و تحلیل این گونه مسائل با خطاهای جبران‌ناپذیری همراه خواهد بود. بنابراین در چنین شرایطی می‌بایست روش‌های جایگزین به‌منظور تجزیه و تحلیل همبستگی بین دو مجموعه از داده‌ها یا دو متغیر تصادفی در شرایطی که داده‌های گردآوری شده، نادقیق هستند ارائه دهیم.

در این مقاله با استفاده از ابزارهای مفیدی که نظریه مجموعه‌های فازی برای صورت‌بندی مفاهیم نادقیق در اختیار ما قرار داده است، به بررسی ضریب همبستگی پیرسون برای مجموعه داده‌های نادقیق خواهیم پرداخت.

۲ ضریب همبستگی بین اعداد فازی

با فرض این‌که $(X_۱, Y_۱), (X_۲, Y_۲), ..., (X_n, Y_n)$ یک نمونه تصادفی از متغیرهای دو جامعه باشند، ضریب همبستگی پیرسن برای این مجموعه مشاهدات به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\rho_{X,Y} = \frac{\sum\limits_{i=۱}^{n}(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=۱}^{n}(X_i - \bar{X})^۲ \sum\limits_{i=۱}^{n}(Y_i - \bar{Y})^۲}}.$$

علاوه بر آن درصورتی‌که مقادیر مشاهده شده این نمونه تصادفی را با $(x_۱, y_۱), (x_۲, y_۲), ..., (x_n, y_n)$ نشان دهیم، برآورد ضریب همبستگی آن را با $r_{X,Y}$ نشان می‌دهیم که به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$r_{X,Y} = \hat{\rho}_{X,Y} = \frac{\sum_{i=۱}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=۱}^{n}(x_i - \bar{x})^۲ \sum_{i=۱}^{n}(y_i - \bar{y})^۲}}. \qquad (۱)$$

با توجه به رابطه (۱)، به راحتی می‌توان نشان داد که $-۱ \leq r_{X,Y} \leq +۱$.

۱.۲ حالت خاص

در این زیربخش هدف محاسبه ضریب همبستگی بین زوج مشاهدات بر اساس یک نمونه تصادفی n تایی است که در بین آن‌ها یکی از داده‌ها دارای ابهام است و به‌صورت نادقیق مشاهده و ثبت شده است. به منظور سهولت در محاسبات فرض می‌کنیم که نمونه از چهار زوج مشاهده گردآوری و به‌صورت زیر ثبت شده‌اند (شکل ۱ را ببینید)

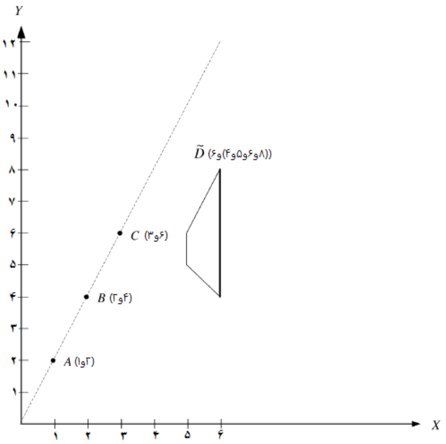
$$A = (۱, ۲), \quad B = (۲, ۴), \quad C = (۳, ۶), D = (۶, \tilde{Y}_D),$$

که در آن $\tilde{Y}_D = (۴, ۵, ۶, ۸)$ یک عدد فازی ذوزنقه‌ای با تابع عضویت زیر می‌باشد

$$\mu_{\tilde{Y}_D}(y) = \begin{cases} y - ۴ & ۴ \leqslant y \leqslant ۵, \\ ۱ & ۵ \leqslant y \leqslant ۶, \\ \frac{۸-y}{۲} & ۶ \leqslant y \leqslant ۸. \end{cases}$$

برای تعیین مقدار ضریب همبستگی این مشاهدات نیازمند محاسبه میانگین مشاهدات در دو نمونه تصادفی هستیم. واضح است که مقدار $\bar{X} = ۳$ عددی دقیق است، اما با توجه به این‌که یکی از مشاهدات مربوط به Y_iها نادقیق است، میانگین مشاهدات ثبت شده مربوط به Y_iها به‌صورت زیر می‌باشد

$$\bar{\tilde{Y}}_D = ۳ + \frac{\tilde{Y}_D}{۴}.$$



شکل ۱: *نمودار زوج مشاهدات* A, B, C, D

حال با استفاده از رابطه (۱) ضریب همبستگی به‌صورت زیر محاسبه می‌شود

$$\tilde{r}_{X,Y} = \frac{\sum\limits_{i=A,B,C,D} (X_i - ۳)(Y_i - ۳ - \frac{\tilde{Y}_D}{۴})}{\sqrt{\sum\limits_{i=A,B,C,D} (X_i - ۳)^۲ \sum\limits_{i=A,B,C,D} (Y_i - ۳ - \frac{\tilde{Y}_D}{۴})^۲}}. \qquad (۲)$$

علی‌رغم این‌که عبارت به‌دست آمده در رابطه (۲) یک کمیت فازی است، لزومی ندارد که شکل تابع عضویت آن با تابع $\tilde{Y}_D$ (به عنوان تنها مشاهده‌ای که ابهام ایجاد کرده است) یکسان باشد، چرا که این رابطه یک ترکیب غیر خطی از $\tilde{Y}_D$ است.

برای به‌دست آوردن تابع عضویت $\tilde{r}_{X,Y}$ از عملگرهای محاسباتی که بر اساس α-برش اعداد فازی پایه‌گذاری شده‌اند، استفاده می‌کنیم. به این منظور ابتدا α-برش عدد فازی ذوزنقه‌ای $\tilde{Y}_D$ و $\tilde{r}_{X,Y}$ را

به‌ترتیب به صورت زیر محاسبه می‌کنیم

$$\begin{aligned}(\tilde{Y}_D)_\alpha &= \left[(\tilde{Y}_D)^L_\alpha, (\tilde{Y}_D)^U_\alpha\right]\\ &= \left[\min_y\left\{y\in[۴,۸]|\mu_{\tilde{Y}_D(y)}\geqslant\alpha\right\}, \max_y\left\{y\in[۴,۸]|\mu_{\tilde{Y}_D(y)}\geqslant\alpha\right\}\right],\\ (\tilde{r}_{X,Y})_\alpha &= \left[(\tilde{r}_{X,Y})^L_\alpha, (\tilde{r}_{X,Y})^U_\alpha\right]\\ &= \left[\min_r\left\{r\in[-۱,۱]|\mu_{\tilde{r}_{X,Y}(r)}\geqslant\alpha\right\}, \max_r\left\{r\in[-۱,۱]|\mu_{\tilde{r}_{X,Y}(r)}\geqslant\alpha\right\}\right].\end{aligned}$$

حال برای هر مقدار دلخواه $۰\leqslant\alpha\leqslant۱$ می‌توانیم α-برش های $(\tilde{Y_D})^L_\alpha$ و $(\tilde{Y_D})^U_\alpha$ را که مقادیری دقیق هستند محاسبه کرد و با جایگذاری آن‌ها در رابطه (۲)، α-برش های $(\tilde{r}_{X,Y})^L_\alpha$ و $(\tilde{r}_{X,Y})^U_\alpha$ را تعیین کرد.

برای تعیین تابع عضویت ضریب همبستگی $\tilde{r}$، ابتدا α-برش های عدد فازی ذوزنقه‌ای $\tilde{Y_D}$ را به صورت زیر تعیین می‌کنیم

$$(\tilde{Y_D})_\alpha = [۴+\alpha, ۸-۲\alpha],$$

با قرار دادن این مقادیر در رابطه (۲)، α-های برش $\tilde{r}_{X,Y}$ به صورت زیر به‌دست خواهد آمد

$$(\tilde{r}_{X,Y})^L_\alpha = \frac{(۴+۳\alpha)}{\sqrt{۱۰/۵\alpha^۲+۱۱۲}}, \qquad (\tilde{r}_{X,Y})^U_\alpha = \frac{(۱۶-۶\alpha)}{\sqrt{۴۲\alpha^۲-۱۶۸\alpha+۲۸۰}}.$$

حال برای تعیین تابع عضویت $\tilde{r}_{X,Y}$ از دو رابطه به‌دست آمده α-برش‌های آن استفاده می‌کنیم. با اندکی محاسبات جبری تابع عضویت $\tilde{r}_{X,Y}$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید

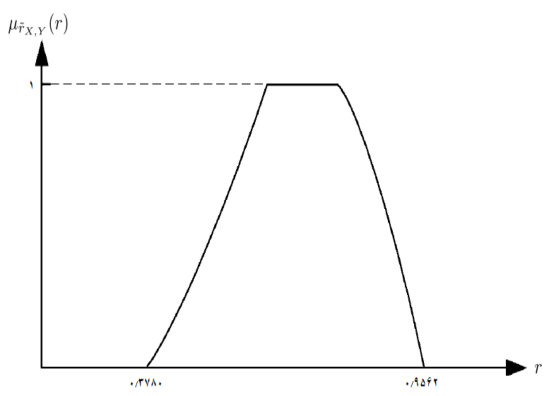
$$\mu_{\tilde{r}_{X,Y}}(r) = \begin{cases} \frac{-۲۴+۲۸\sqrt{۶r^۲-۶r^۴}}{۱۸-۲۱r^۲} & \frac{۱}{\sqrt{۷}}\leqslant r\leqslant\sqrt{\frac{۲}{۵}}\,,\\ ۱ & \sqrt{\frac{۲}{۵}}\leqslant r\leqslant\frac{۱۰}{\sqrt{۱۵۴}}\,,\\ \frac{۴۸-۴۲r^۲-۱۴\sqrt{۶r^۲-۶r^۴}}{۱۸-۲۱r^۲} & \frac{۱۰}{\sqrt{۱۵۴}}\leqslant r\leqslant\frac{۸}{\sqrt{۷۰}}. \end{cases} \tag{۳}$$

توجه داشته باشید با توجه به‌این‌که $\tilde{Y}_D$ (تنها مشاهده دارای ابهام در مجموعه مشاهدات) از نوع ذوزنقه‌ای بوده، برای تعیین مقادیر ابتدایی، وسط و انتهایی به‌صورت زیر عمل می‌کنیم. دامنه سمت چپ و

راست عدد فازی ذوزنقه‌ای به‌ترتیب عبارتند از

$$\left[(\tilde{r}_{X,Y})^L_{\alpha=0}, (\tilde{r}_{X,Y})^L_{\alpha=1}\right] = \left[\frac{1}{\sqrt{7}}, \sqrt{\frac{2}{5}}\right],$$
$$\left[(\tilde{r}_{X,Y})^U_{\alpha=0}, (\tilde{r}_{X,Y})^U_{\alpha=1}\right] = \left[\frac{10}{\sqrt{154}}, \frac{8}{\sqrt{70}}\right].$$

همان‌طور که انتظار می‌رفت بر اساس این رابطه کمترین مقدار ضریب همبستگی برابر با ۰/۳۷۸۰ و بیشترین مقدار ضریب همبستگی ۰/۹۵۶۲ است که دقیقاً با مقادیر به‌دست آمده از رابطه (۳) مطابقت دارد. با این وجود باید توجه نمود که هر چند تنها مشاهده نادقیق در مجموعه مشاهدات یک عدد فازی ذوزنقه‌ای است، اما نمودار تابع عضویت ضریب همبستگی فازی به‌دست آمده (شکل (۲)راببینید) منطبق بر نمودار یک عدد فازی ذوزنقه‌ای نیست.



شکل ۲: *نمودار تابع عضویت ضریب همبستگی بین مشاهدات* A, B, C, D

۲.۲ حالت کلی

فرض کنید $(\tilde{X}_1, \tilde{Y}_1), (\tilde{X}_2, \tilde{Y}_2), \ldots, (\tilde{X}_n, \tilde{Y}_n)$ نمونه‌ای از مشاهدات نادقیق جمع‌آوری شده دو متغیر تحت بررسی باشند که هدف محاسبه و تحلیل ضریب همبستگی بین آن‌ها است. مشابه با رابطه (۱)،

ضریب همبستگی این مشاهدات نادقیق به‌صورت زیر قابل بازنویسی است

$$\tilde{r}_{X,Y}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(\tilde{X}_i-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\tilde{X}_i}{n})(\tilde{Y}_i-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\tilde{Y}_i}{n})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(\tilde{X}_i-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\tilde{X}_i}{n})^2\sum\limits_{i=1}^{n}(\tilde{Y}_i-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\tilde{Y}_i}{n})^2}}. \qquad (۴)$$

برخلاف زیربخش قبل که تنها یک داده نادقیق وجود داشت، رابطه (۴) تابعی از اعداد فازی مختلف است که محاسبه مقدار آن نیازمند انجام محاسبات جبری فراوان و پیچیده روی این اعداد است که به سادگی نتیجه‌بخش نخواهد بود. در چنین شرایطی استفاده از اصل گسترش کار را بسیار ساده‌تر خواهد کرد. بر اساس این اصل، تابع عضویت ضریب همبستگی این مشاهدات به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\mu_{\tilde{r}_{X,Y}}(r)=\sup_{X,Y} min\Big\{\mu_{\tilde{X}_i}(x_i),\mu_{\tilde{Y}_i}(y_i),\forall i\mid r=r_{X,Y}\Big\}, \qquad (۵)$$

که در آن $r_{X,Y}$ در رابطه (۱) تعریف شده است.

در ادامه از به‌کارگیری اصل گسترش برای α-برش‌های $\tilde{r}_{X,Y}$ استفاده خواهیم کرد که در نهایت منجر به تعیین تابع عضویت خواهد شد. فرض کنید α-برش‌های $\tilde{X}_i$ و $\tilde{Y}_i$ (برای $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$، $i=1,2,...,n$) به‌صورت زیر تعریف شده باشند

$$\begin{aligned}(\tilde{X}_i)_\alpha &= \Big[(\tilde{X}_i)^L_\alpha,(\tilde{X}_i)^U_\alpha\Big]=\Big[\min_x\Big\{x_i\in X\mid \mu_{\tilde{X}_i(x_i)}\geqslant\alpha\Big\},\max_x\Big\{x_i\in X\mid \mu_{\tilde{X}_i(x_i)}\geqslant\alpha\Big\}\Big]\\(\tilde{Y}_i)_\alpha &= \Big[(\tilde{Y}_i)^L_\alpha,(\tilde{Y}_i)^U_\alpha\Big]=\Big[\min_y\Big\{y_i\in Y\mid \mu_{\tilde{Y}_i(y_i)}\geqslant\alpha\Big\},\max_y\Big\{y_i\in Y\mid \mu_{\tilde{Y}_i(y_i)}\geqslant\alpha\Big\}\Big],\end{aligned}$$

که در این روابط X و Y مجموعه‌های مرجعی هستند که $\tilde{X}_i$ و $\tilde{Y}_i$ بر روی آن‌ها تعریف شده‌اند. بر اساس رابطه (۵)، مقدار $\mu_{r_X\tilde{,}r_Y}$ مینیمم مقادیر $\mu_{\tilde{X}_i}(x_i)$ و $\mu_{\tilde{Y}_i}(y_i)$ به ازای تمام مقادیر i است. بنابراین برای این‌که $\mu_{\tilde{r}_{X,Y}}(r)=\alpha$ بایستی به ازای تمام مقادیر i داشته باشیم که

$$\mu_{\tilde{X}_i}(x_i)\geq\alpha, \qquad \mu_{\tilde{Y}_i}(y_i)\geq\alpha,$$

و حداقل یکی از مقادیر $\mu_{\tilde{X}_i}(x_i)$ یا $\mu_{\tilde{Y}_i}(y_i)$ مساوی با α باشند به‌طوریکه $r=r_{X,Y}$. حال با توجه

به این نکته که تمام α-برش‌ها تودرتو می‌باشند، می‌توان برای تمام $0 < \alpha_2 < \alpha_1 \leq 1$ نوشت

$$[(X_i)^L_{\alpha_1}, (X_i)^U_{\alpha_1}] \subseteq [(X_i)^L_{\alpha_2}, (X_i)^U_{\alpha_2}],$$
$$[(Y_i)^L_{\alpha_1}, (Y_i)^U_{\alpha_1}] \subseteq [(Y_i)^L_{\alpha_2}, (Y_i)^U_{\alpha_2}].$$

بنابراین $\mu_{\tilde{X}_i}(x_i) \geq \alpha$، $\mu_{\tilde{X}_i}(x_i) = \alpha$، $\mu_{\tilde{Y}_i}(y_i) \geq \alpha$، و $\mu_{\tilde{Y}_i}(y_i) = \alpha$ دارای دامنه یکسان می‌باشند. بنابراین برای محاسبه تابع عضویت ضریب همبستگی فازی $\tilde{r}_{X,Y}$ کافیست کران‌های پایین و بالای $\alpha-$برش این کمیت فازی را محاسبه کنیم که با توجه به توضیحات ارائه شده می‌توان این دو کران را در قالب دو برنامه‌ریزی غیرخطی به صورت زیر مدل بندی کرد

$$(\tilde{r}_{X,Y})^L_\alpha = \min \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}}, \tag{6}$$
$$s.t. \quad (\tilde{X}_i)^L_\alpha \leqslant x_i \leqslant (\tilde{X}_i)^U_\alpha, \quad \forall i, \qquad (\tilde{Y}_i)^L_\alpha \leqslant y_i \leqslant (\tilde{Y}_i)^U_\alpha, \quad \forall i,$$

$$(\tilde{r}_{X,Y})^U_\alpha = \max \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}}. \tag{7}$$
$$s.t. \quad (\tilde{X}_i)^L_\alpha \leqslant x_i \leqslant (\tilde{X}_i)^U_\alpha, \quad \forall i, \qquad (\tilde{Y}_i)^L_\alpha \leqslant y_i \leqslant (\tilde{Y}_i)^U_\alpha, \quad \forall i.$$

برای حل این برنامه‌ریزی‌های غیرخطی از روش گرادیان و نرم‌افزار متلب استفاده خواهیم کرد. برای دو مقدار α_1 و α_2 دلخواه که $0 < \alpha_2 < \alpha_1 \leqslant 1$ هستند، ناحیه جواب‌های شدنی تعریف شده توسط α_1 در برنامه‌های ارائه شده روابط (۶) و (۷) کوچک‌تر از ناحیه تعریف شده توسط α_2 خواهد بود. در نتیجه α-برش‌های $\tilde{r}_{X,Y}$ در سطح α_1 در α-برش‌های ایجاد شده در سطح α_2 قرار خواهد گرفت و به این دلیل تابع عضویت ضریب همبستگی $\tilde{r}_{X,Y}$ محدب خواهد شد. حال با داشتن شرط تحدب مورد بحث می‌توانیم پهنه‌های چپ و راست تابع عضویت $\tilde{r}_{X,Y}$ را با استفاده از α-برش‌های به‌دست آمده محاسبه کنیم و در نهایت به فرم تابع عضویت خواهیم رسید.

نکته قابل ذکر این است که با توجه به تابع عضویت در نظر گرفته‌شده برای داده‌های نادقیق اولیه، ممکن است فرم پهنه‌های چپ و راست تابع عضویت، آنقدر پیچیده به‌دست آیند که امکان پیدا کردن خود تابع

عضویت وجود نداشته باشد. در این شرایط از روش‌های عددی برای محاسبه میزان عضویت استفاده خواهیم کرد. با در نظر گرفتن $L(r)$ و $R(r)$ به عنوان پهناهای چپ و راست تابع عضویت، می‌توان فرم نهایی تابع عضویت را از رابطه زیر به‌دست آورد

$$\mu_{\tilde{r}_{X,Y}}(r) = \begin{cases} L(r) & (\tilde{r}_{X,Y})^L_{\alpha=۰} \leqslant r \leqslant (\tilde{r}_{X,Y})^L_{\alpha=۱}\,, \\ \\ ۱ & (\tilde{r}_{X,Y})^L_{\alpha=۱} \leqslant r \leqslant (\tilde{r}_{X,Y})^U_{\alpha=۱}\,, \\ \\ R(r) & (\tilde{r}_{X,Y})^U_{\alpha=۱} \leqslant r \leqslant (\tilde{r}_{X,Y})^U_{\alpha=۰}\,. \end{cases} \qquad (۸)$$

در ادامه با ذکر یک مثال عددی به تشریح روش ارائه شده می‌پردازیم.

مثال ۱.۲. رابطه بین شاخص‌های تکنولوژی و مدیریت همواره موضوعی مهم بوده و اندازه‌گیری آن مورد توجه محققین بسیاری قرار گرفته است. [۴] با استفاده از اطلاعات موجود راجع به این دو متغیر که معمولا در قالب متغیرهای زبانی بیان می‌شوند، آن‌ها را به‌صورت اعداد فازی مدل‌بندی و ارائه نموده‌اند. بر این اساس، جداول ۱ و ۲ به‌ترتیب α–برش–های مربوط به سطوح مختلف تکنولوژی $(\tilde{T}_i)$ و مدیریت $(\tilde{M}_i)$ در یک نمونه ۱۵تایی از شرکت‌های صنعتی کشور تایوان را نشان می‌دهد که با دقت ۰/۱ گزارش شده‌اند.

بر اساس روش مورد مطالعه در این زیربخش و با استفاده از α–برش‌های موجود برای هر یک از سطوح مختلف برش، می‌توان یک برنامه‌ریزی غیرخطی تشکیل داد و با استفاده از نرم‌افزار متلب آن را حل کرد و جواب نهایی که همان α–برش مقدار ضریب همبستگی می‌باشد را به‌دست آورد. در پایان نتایج مربوط به هریک از سطوح مختلف α در جدول (۳) ارائه شده است. بر اساس مقادیر α– برش بالایی و پایینی $\tilde{r}_{\tilde{T},\tilde{M}}$ در سطوح مختلف، نمودار تقریبی ضریب همبستگی فازی بین مدیریت و تکنولوژی با استفاده از نرم افزار متلب در شکل (۳) رسم شده است.

برای تحلیل همبستگی بین این دو متغیر بر اساس شاخص ضریب همبستگی معرفی شده، ابتدا به نکات زیر که می‌توان از نتایج حاصل استخراج کرد توجه می‌کنیم

الف) تکیه‌گاه $\tilde{r}_{\tilde{T},\tilde{M}}$ بسیار گسترده است و دامنه آن از ۰/۸۲۸۱– تا ۰/۹۸۶۲ می‌باشد. بر اساس این بازه به‌دست آمده می‌توان چنین نتیجه‌گیری کرد که اگر چه ضریب همبستگی در این شرایط کمیتی نادقیق است، اما نمی‌تواند کمتر از ۰/۸۲۸۱– و بیشتر از ۰/۹۸۶۲ باشد.

جدول ۱: *مقادیرα- برش شاخص‌های متغیر تکنولوژی فازی شرکت‌های منتخب در مثال (۱.۲)*

شرکت		$\alpha =$ ۰	$\alpha =$ /۱	$\alpha =$ ۰/۲	$\alpha =$ ۰/۳	$\alpha =$ ۰/۴	$\alpha =$ ۰/۵	$\alpha =$ ۰/۶	$\alpha =$ ۰/۷	$\alpha =$ ۰/۸	$\alpha =$ ۰/۹	$\alpha =$ ۱
۱	L	۰/۰۷۹۰	۰/۰۹۶۳	۰/۱۱۲۷	۰/۱۲۸۲	۰/۱۴۲۸	۰/۱۵۶۵	۰/۱۶۹۴	۰/۱۸۱۳	۰/۱۹۱۷	۰/۲۰۱۸	۰/۲۱۲۰
	U	۰/۳۵۲۷	۰/۳۳۴۶	۰/۳۱۷۴	۰/۳۰۱۲	۰/۲۸۵۸	۰/۲۷۱۲	۰/۲۵۷۶	۰/۲۴۴۹	۰/۲۳۳۰	۰/۲۲۲۲	۰/۲۱۲۰
۲	L	۰/۶۳۴۸	۰/۶۵۴۹	۰/۶۷۴۱	۰/۶۹۲۳	۰/۷۰۹۷	۰/۷۲۶۲	۰/۷۴۱۸	۰/۷۵۶۵	۰/۷۷۰۳	۰/۷۸۳۲	۰/۷۹۵۳
	U	۰/۹۰۶۹	۰/۸۹۲۴	۰/۷۸۸۹	۰/۸۶۶۱	۰/۸۵۴۸	۰/۸۴۴۴	۰/۸۳۴۳	۰/۸۲۴۶	۰/۸۱۵۶	۰/۸۰۵۸	۰/۷۹۵۳
۳	L	۰/۴۴۲۴	۰/۴۶۰۴	۰/۴۷۸۶	۰/۴۹۶۹	۰/۵۱۵۳	۰/۵۳۳۹	۰/۵۵۲۶	۰/۵۱۷۴	۰/۵۹۰۴	۰/۶۰۹۴	۰/۶۲۸۷
	U	۰/۷۴۲۰	۰/۷۳۲۳	۰/۷۲۲۳	۰/۷۱۱۹	۰/۷۰۱۱	۰/۶۸۹۹	۰/۶۷۸۴	۰/۶۶۶۵	۰/۶۵۴۳	۰/۶۴۱۶	۰/۶۲۸۷
۴	L	۰/۱۶۹۲	۰/۱۸۹۸	۰/۲۱۰۳	۰/۲۳۰۵	۰/۲۵۰۶	۰/۲۷۰۶	۰/۲۹۰۴	۰/۳۱۰۰	۰/۳۲۹۴	۰/۳۴۸۶	۰/۳۶۷۷
	U	۰/۵۵۸۵	۰/۵۳۹۸	۰/۵۲۱۰	۰/۵۰۲۲	۰/۴۸۳۲	۰/۴۶۴۱	۰/۴۴۵۰	۰/۴۲۵۸	۰/۴۰۶۵	۰/۳۸۷۲	۰/۳۶۷۷
۵	L	۰/۴۶۷۴	۰/۴۸۳۰	۰/۴۹۸۰	۰/۵۱۲۵	۰/۵۲۶۵	۰/۵۴۰۲	۰/۵۵۳۴	۰/۵۶۶۳	۰/۵۵۷۸	۰/۵۹۰۸	۰/۶۰۲۹
	U	۰/۷۵۹۸	۰/۷۴۰۰	۰/۷۲۱۳	۰/۷۰۳۶	۰/۶۸۶۹	۰/۶۷۱۰	۰/۶۵۶۰	۰/۶۴۱۷	۰/۶۲۸۶	۰/۶۱۵۷	۰/۶۰۲۹
۶	L	۰/۶۴۶۹	۰/۶۷۰۳	۰/۶۹۲۷	۰/۷۱۴۴	۰/۷۳۵۲	۰/۷۵۵۴	۰/۷۷۴۹	۰/۷۹۳۸	۰/۸۱۲۱	۰/۸۲۹۹	۰/۸۴۷۲
	U	۰/۹۳۲۲	۰/۹۲۵۳	۰/۹۱۸۱	۰/۹۱۰۶	۰/۹۰۲۶	۰/۸۹۴۳	۰/۸۸۵۶	۰/۸۷۶۶	۰/۸۶۷۱	۰/۸۵۷۳	۰/۸۴۷۲
۷	L	۰/۱۸۳۵	۰/۱۹۹۹	۰/۲۱۵۵	۰/۲۲۹۰	۰/۲۴۱۸	۰/۲۵۴۶	۰/۲۶۷۴	۰/۲۸۰۱	۰/۲۹۲۷	۰/۳۰۵۳	۰/۳۱۷۹
	U	۰/۴۶۰۵	۰/۴۴۳۱	۰/۴۲۶۵	۰/۴۱۰۸	۰/۳۹۵۷	۰/۳۸۱۳	۰/۳۶۸۵	۰/۳۵۵۸	۰/۳۴۳۲	۰/۳۳۰۵	۰/۳۱۷۹
۸	L	۰/۳۶۳۶	۰/۳۸۲۴	۰/۴۰۱۰	۰/۴۲۰۵	۰/۴۳۹۷	۰/۴۵۹۱	۰/۴۷۸۵	۰/۴۹۸۱	۰/۵۱۷۸	۰/۵۳۷۷	۰/۵۵۷۷
	U	۰/۶۷۴۰	۰/۶۶۳۵	۰/۶۵۲۸	۰/۶۴۱۸	۰/۶۳۰۵	۰/۶۱۹۰	۰/۶۰۷۳	۰/۵۹۵۲	۰/۵۸۳۰	۰/۵۷۰۴	۰/۵۵۷۷
۹	L	۰/۰۶۲۸	۰/۰۷۳۱	۰/۰۸۴۱	۰/۰۹۵۹	۰/۱۰۸۵	۰/۱۲۱۸	۰/۱۳۵۸	۰/۱۵۰۶	۰/۱۶۶۰	۰/۱۸۲۲	۰/۱۹۹۲
	U	۰/۴۰۳۷	۰/۳۸۰۰	۰/۳۵۷۰	۰/۳۳۴۷	۰/۳۱۳۲	۰/۲۹۲۳	۰/۲۷۲۳	۰/۲۵۲۹	۰/۲۳۴۳	۰/۲۱۶۳	۰/۱۹۹۲
۱۰	L	۰/۱۵۵۴	۰/۱۷۴۲	۰/۱۹۲۸	۰/۲۱۱۲	۰/۲۲۹۴	۰/۲۴۷۴	۰/۲۶۵۱	۰/۲۸۲۷	۰/۲۹۹۹	۰/۳۱۶۹	۰/۳۳۳۷
	U	۰/۴۹۳۴	۰/۴۷۶۶	۰/۴۶۱۳	۰/۴۴۶۴	۰/۴۳۱۰	۰/۴۱۵۴	۰/۳۹۹۶	۰/۳۸۳۴	۰/۳۶۷۱	۰/۳۵۰۵	۰/۳۳۳۷
۱۱	L	۰/۰۰۸۵	۰/۰۱۶۶	۰/۰۲۳۸	۰/۰۳۱۹	۰/۰۴۰۸	۰/۰۵۰۶	۰/۰۶۱۳	۰/۰۷۲۸	۰/۸۰۵۱	۰/۰۹۸۳	۰/۱۱۲۳
	U	۰/۳۰۳۰	۰/۲۷۹۹	۰/۲۵۷۷	۰/۲۳۶۴	۰/۲۱۵۹	۰/۱۹۶۴	۰/۱۷۷۸	۰/۱۶۰۱	۰/۱۴۳۲	۰/۱۲۷۳	۰/۱۱۲۳
۱۲	L	۰/۲۹۲۷	۰/۳۰۴۶	۰/۳۱۵۹	۰/۳۲۶۸	۰/۳۳۸۲	۰/۳۵۰۰	۰/۳۶۲۳	۰/۳۷۵۱	۰/۳۸۸۵	۰/۴۰۲۴	۰/۴۱۷۰
	U	۰/۶۰۹۶	۰/۵۸۵۶	۰/۵۶۲۸	۰/۵۴۱۳	۰/۵۲۰۸	۰/۵۰۱۳	۰/۴۸۲۷	۰/۴۶۵۱	۰/۴۴۸۳	۰/۴۳۲۲	۰/۴۱۷۰
۱۳	L	۰/۳۱۱۲	۰/۳۳۰۵	۰/۳۴۹۹	۰/۳۶۹۵	۰/۳۸۹۲	۰/۴۰۹۰	۰/۴۲۸۹	۰/۴۴۸۹	۰/۴۶۹۱	۰/۴۸۹۴	۰/۵۰۹۸
	U	۰/۶۳۹۹	۰/۶۲۷۵	۰/۶۱۵۰	۰/۶۰۲۳	۰/۵۸۹۶	۰/۵۷۶۶	۰/۵۶۳۶	۰/۵۵۰۴	۰/۵۳۷۲	۰/۵۲۳۶	۰/۵۰۹۸
۱۴	L	۰/۲۷۵۷	۰/۲۹۶۳	۰/۳۱۷۲	۰/۳۳۸۲	۰/۳۵۹۴	۰/۳۸۰۸	۰/۴۰۲۴	۰/۴۲۴۱	۰/۴۴۶۰	۰/۴۶۸۰	۰/۴۹۰۳
	U	۰/۶۳۴۸	۰/۶۲۱۷	۰/۶۰۸۲	۰/۵۹۴۵	۰/۵۸۰۵	۰/۵۶۶۲	۰/۵۵۱۶	۰/۵۳۶۷	۰/۵۲۱۵	۰/۵۰۶۰	۰/۴۹۰۳
۱۵	L	۰/۳۳۹۴	۰/۳۵۴۷	۰/۳۷۰۲	۰/۳۸۵۹	۰/۴۰۱۶	۰/۴۱۶۴	۰/۴۳۱۸	۰/۴۴۸۰	۰/۴۶۴۹	۰/۴۸۲۶	۰/۵۰۱۱
	U	۰/۶۴۱۱	۰/۶۲۵۳	۰/۶۰۹۸	۰/۵۹۴۸	۰/۵۸۰۲	۰/۵۶۶۰	۰/۵۵۲۳	۰/۵۳۹۳	۰/۵۲۶۴	۰/۵۱۳۷	۰/۵۰۱۱

ب) با فرض این‌که تمام داده‌های گزارش شده در این مثال اعدادی دقیق باشند ($\alpha =$ ۱) مقدار ضریب همبستگی بین دو متغیر تحت بررسی برابر با ۰/۲۹۵۰ خواهد بود. از طرفی به‌سادگی می‌توان دید که میزان عضویت $r =$ ۰/۲۹۵۰ در مجموعه فازی به دست آمده برابر با ۱ است. علاوه بر آن می‌توانیم جهت استنباط دقیق‌تر میزان عضویت $r =$ ۰ که مبنی بر ناهمبسته بودن دو متغیر است را نیز بررسی کنیم. بر این اساس میزان عضویت $r =$ ۰ در مجموعه فازی به دست آمده برابر ۰/۷۸ است که مقداری قابل توجه است.

پ) با توجه به نمودار به‌دست آمده برای تابع عضویت $\tilde{r}_{\tilde{T},\tilde{M}}$ و با اندکی محاسبات، مساحت قرارگرفته

جدول ۲: مقادیرα- برش شاخص‌های متغیر مدیریت فازی شرکت‌های منتخب در مثال (۱.۲)

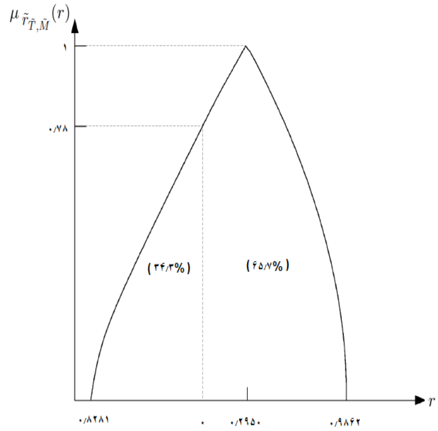
شرکت		$\alpha=۰$	$\alpha=۰/۱$	$\alpha=۰/۲$	$\alpha=۰/۳$	$\alpha=۰/۴$	$\alpha=۰/۵$	$\alpha=۰/۶$	$\alpha=۰/۷$	$\alpha=۰/۸$	$\alpha=۰/۹$	$\alpha=۱$
۱	L	۰/۲۴۸۶	۰/۲۶۸۲	۰/۲۸۷۹	۰/۳۰۷۷	۰/۳۲۷۶	۰/۳۴۷۶	۰/۳۶۷۸	۰/۳۸۸۰	۰/۴۰۸۳	۰/۴۲۸۸	۰/۴۴۹۳
	U	۰/۶۶۱۶	۰/۶۳۹۷	۰/۶۱۷۸	۰/۵۹۶۲	۰/۵۷۴۷	۰/۵۵۳۴	۰/۵۳۲۳	۰/۵۱۱۳	۰/۴۹۰۵	۰/۴۶۹۸	۰/۴۴۹۳
۲	L	۰/۴۹۰۲	۰/۵۱۳۲	۰/۵۳۶۱	۰/۵۵۸۹	۰/۵۸۱۶	۰/۶۰۴۳	۰/۶۲۶۹	۰/۶۴۹۵	۰/۶۲۷۰	۰/۶۹۴۵	۰/۷۱۷۰
	U	۰/۹۱۳۸	۰/۸۹۴۳	۰/۸۷۴۸	۰/۸۵۵۲	۰/۸۳۵۶	۰/۸۱۶۰	۰/۷۹۶۳	۰/۷۶۵	۰/۷۵۶۷	۰/۷۳۹۶۷	۰/۷۱۷۰
۳	L	۰/۲۶۲۴	۰/۲۷۷۶	۰/۲۹۳۱	۰/۳۰۸۸	۰/۳۲۴۷	۰/۳۴۰۸	۰/۳۵۷۱	۰/۳۷۳۶	۰/۳۹۰۲	۰/۴۰۷۱	۰/۴۲۴۳
	U	۰/۵۷۵۲	۰/۵۵۸۹	۰/۵۴۲۸	۰/۵۲۷۱	۰/۵۱۱۶	۰/۴۹۶۴	۰/۴۸۱۴	۰/۴۶۶۸	۰/۴۵۲۴	۰/۴۳۸۲	۰/۴۲۴۳
۴	L	۰/۶۲۵۸	۰/۶۴۸۵	۰/۶۷۱۱	۰/۶۹۳۷	۰/۷۱۶۲	۰/۷۳۸۷	۰/۷۶۱۲	۰/۷۸۳۶	۰/۸۰۶۰	۰/۸۲۸۴	۰/۸۵۰۷
	U	۰/۹۶۸۰	۰/۹۵۶۹	۰/۹۴۵۶	۰/۹۳۴۲	۰/۹۲۲۸	۰/۹۱۱۴	۰/۹۰۰۰	۰/۸۸۷۹	۰/۸۷۵۸	۰/۸۶۳۴	۰/۸۵۰۷
۵	L	۰/۲۳۳۱	۰/۲۵۲۳	۰/۲۷۱۶	۰/۲۹۰۹	۰/۳۱۰۳	۰/۳۲۹۸	۰/۳۴۹۴	۰/۳۶۹۱	۰/۳۸۹۰	۰/۴۰۸۹	۰/۴۲۹۰
	U	۰/۶۲۳۳	۰/۶۰۳۲	۰/۵۸۳۳	۰/۵۶۳۵	۰/۵۴۳۸	۰/۵۲۴۳	۰/۵۰۵۰	۰/۴۸۵۸	۰/۴۶۶۷	۰/۴۴۷۸	۰/۴۲۹۰
۶	L	۰/۱۳۹۵	۰/۱۵۶۳	۰/۱۷۳۳	۰/۱۹۰۴	۰/۲۰۷۶	۰/۲۲۵۰	۰/۲۴۲۵	۰/۲۶۰۲	۰/۲۷۸۰	۰/۲۹۵۹	۰/۳۱۳۹
	U	۰/۵۰۴۲	۰/۴۸۴۱	۰/۴۶۴۲	۰/۴۴۴۶	۰/۴۲۵۳	۰/۴۰۶۲	۰/۳۸۷۳	۰/۳۶۸۶	۰/۳۵۰۲	۰/۳۳۱۹	۰/۳۱۳۹
۷	L	۰/۰۷۰۷	۰/۰۸۶۰	۰/۱۰۱۵	۰/۱۱۷۱	۰/۱۳۲۸	۰/۱۴۸۶	۰/۱۶۴۴	۰/۱۸۰۴	۰/۱۹۶۵	۰/۲۱۲۷	۰/۲۲۹۰
	U	۰/۴۰۰۳	۰/۳۸۲۴	۰/۳۶۴۷	۰/۳۴۷۱	۰/۳۲۹۷	۰/۳۱۲۵	۰/۲۹۵۵	۰/۲۷۸۶	۰/۲۶۱۹	۰/۲۴۵۴	۰/۲۲۹۰
۸	L	۰/۱۰۷۶	۰/۱۲۵۲	۰/۱۴۲۹	۰/۱۶۰۸	۰/۱۷۸۸	۰/۱۹۶۹	۰/۲۱۵۲	۰/۲۳۳۶	۰/۲۵۲۱	۰/۲۷۰۷	۰/۲۸۹۴
	U	۰/۴۸۶۶	۰/۴۶۶۰	۰/۴۴۵۷	۰/۴۲۵۶	۰/۴۰۵۶	۰/۳۸۵۸	۰/۳۶۶۲	۰/۳۴۶۷	۰/۳۲۷۵	۰/۳۰۴۸	۰/۲۸۹۴
۹	L	۰/۱۴۶۹	۰/۱۶۳۴	۰/۱۸۰۰	۰/۱۹۶۷	۰/۲۱۳۶	۰/۲۳۰۶	۰/۲۴۷۸	۰/۲۶۵۰	۰/۲۸۲۴	۰/۲۹۹۹	۰/۳۱۷۵
	U	۰/۵۰۵۶	۰/۴۸۵۸	۰/۴۶۶۲	۰/۴۴۶۸	۰/۴۲۷۷	۰/۴۰۸۸	۰/۳۹۰۱	۰/۳۷۱۶	۰/۳۵۳۴	۰/۳۳۵۴	۰/۳۱۷۵
۱۰	L	۰/۲۵۵۵	۰/۲۷۲۱	۰/۲۸۸۹	۰/۳۰۵۹	۰/۳۲۳۱	۰/۳۴۰۵	۰/۳۵۸۱	۰/۳۷۵۹	۰/۳۹۳۸	۰/۴۱۲۰	۰/۴۳۰۳
	U	۰/۶۲۱۸	۰/۶۰۱۳	۰/۵۸۱۱	۰/۵۶۱۲	۰/۵۴۱۶	۰/۵۲۲۴	۰/۵۰۳۴	۰/۴۸۴۷	۰/۴۶۶۳	۰/۴۴۸۲	۰/۴۳۰۳
۱۱	L	۰/۰۴۴۸	۰/۰۵۱۹	۰/۰۵۹۰	۰/۰۶۶۴	۰/۰۷۳۷	۰/۰۸۱۲	۰/۰۸۸۹	۰/۰۹۶۷	۰/۱۰۴۷	۰/۱۱۳۰	۰/۱۲۱۴
	U	۰/۲۱۸۸	۰/۲۰۷۸	۰/۱۹۷۲	۰/۱۸۶۸	۰/۱۷۶۶	۰/۱۶۶۸	۰/۱۵۷۲	۰/۱۴۷۹	۰/۱۳۸۸	۰/۱۳۰۰	۰/۱۲۱۴
۱۲	L	۰/۳۳۷۱	۰/۳۵۷۷	۰/۳۷۸۳	۰/۳۹۹۰	۰/۴۱۹۷	۰/۴۴۰۴	۰/۴۶۱۱	۰/۴۸۱۹	۰/۵۰۲۶	۰/۵۲۳۴	۰/۵۴۴۲
	U	۰/۷۵۴۰	۰/۷۳۲۸	۰/۷۱۱۶	۰/۶۹۰۵	۰/۶۶۹۴	۰/۶۴۸۴	۰/۶۲۷۵	۰/۶۰۶۶	۰/۵۸۵۷	۰/۵۶۴۹	۰/۵۴۴۲
۱۳	L	۰/۵۲۴۹	۰/۵۴۷۲	۰/۵۶۹۵	۰/۵۹۱۷	۰/۶۱۳۸	۰/۶۳۵۹	۰/۶۵۸۰	۰/۶۸۰۰	۰/۷۰۲۰	۰/۷۲۳۹	۰/۷۴۵۸
	U	۰/۹۴۹۵	۰/۹۲۹۲	۰/۹۰۸۹	۰/۸۸۸۶	۰/۸۶۸۳	۰/۸۴۸۰	۰/۸۲۷۶	۰/۸۰۷۲	۰/۷۸۶۸	۰/۷۶۶۵	۰/۷۴۵۸
۱۴	L	۰/۴۹۵۷	۰/۵۱۷۹	۰/۵۴۰۱	۰/۵۶۲۴	۰/۵۸۴۷	۰/۶۰۷۱	۰/۶۲۹۴	۰/۶۵۱۸	۰/۶۷۴۳	۰/۶۹۶۷	۰/۷۱۹۲
	U	۰/۸۳۱۰	۰/۸۲۰۲	۰/۸۰۹۴	۰/۷۹۸۴	۰/۷۸۷۴	۰/۷۷۶۲	۰/۷۶۵۰	۰/۷۵۳۷	۰/۷۴۲۳	۰/۷۳۰۸	۰/۷۱۹۲
۱۵	L	۰/۳۸۶۳	۰/۴۰۹۱	۰/۴۳۱۶	۰/۴۵۴۰	۰/۴۷۶۵	۰/۴۹۹۰	۰/۵۲۱۵	۰/۵۴۳۹	۰/۵۶۶۴	۰/۵۸۸۹	۰/۶۱۱۵
	U	۰/۷۷۱۵	۰/۷۵۵۷	۰/۷۳۹۹	۰/۷۲۴۰	۰/۷۰۸۰	۰/۶۲۹۱	۰/۶۷۶۰	۰/۶۶۰۰	۰/۶۴۳۹	۰/۶۲۷۷	۰/۶۱۱۵

جدول ۳: مقادیرα- برش ضریب همبستگی فازی بین تکنولوژی و مدیریت شرکت‌های منتخب درنمونه تصادفی مثال(۱.۲)

کران		$\alpha=۰$	$\alpha=/۱$	$\alpha=۰/۲$	$\alpha=۰/۳$	$\alpha=۰/۴$	$\alpha=۰/۵$	$\alpha=۰/۶$	$\alpha=۰/۷$	$\alpha=۰/۸$	$\alpha=۰/۹$	$\alpha=۱$
	L	-۰/۸۲۸۱	-۰/۷۷۴۸	-۰/۶۹۳۳	-۰/۵۹۴۷	-۰/۴۸۶۱	-۰/۳۶۹۶	-۰/۲۴۲۶	-۰/۱۰۹۱	۰/۰۲۶۷	۰/۱۶۴۹	۰/۲۹۵۰
	U	۰/۹۸۶۲	۰/۹۷۰۴	۰/۹۴۷۵	۰/۹۱۶۳	۰/۸۷۴۳	۰/۸۱۶۷	۰/۷۴۰۹	۰/۶۵۳۷	۰/۵۴۲۵	۰/۴۲۳۳	۰/۲۹۵۰

در سمت چپ صفر برابر با ۳۴/۳ درصد و در سمت راست آن ۶۵/۷ درصد بوده است.

بر اساس سه مورد ذکر شده می‌توان در مجموع چنین نتیجه‌گیری کرد که ارتباط بین مدیریت و تکنولوژی در ۱۵ شرکت مورد بررسی نسبتاً ضعیف بوده است.



شکل ۳: *نمودار تقریبی تابع عضویت ضریب همبستگی فازی بین تکنولوژیِ و مدیریت در مثال (۱.۲)*

۳ ضریب همبستگی بین اعداد فازی تحت T- نرم دراستیک

همان‌طور که در بخش قبل گفته شد، نخستین رویکرد برای تعریف ضریب همبستگی بین اعداد فازی بر پایه استفاده از α-برش‌های اعداد فازی بود که منجر به حل یک برنامه‌ریزی ریاضی می‌شود. در این بخش با رویکردی متفاوت که بر پایه استفاده از T نرم‌ها بنا نهاده شده است، به بررسی رویکردی جدید برای ضریب همبستگی بین اعداد فازی می‌پردازیم.

۱.۳ عملیات جبری روی اعداد فازی بر اساس T-نرم دراستیک

در این زیربخش عملیات جبری چهارگانه شامل جمع، تفریق، ضرب، تقسیم بین اعداد فازی LR را بر اساس T-نرم دراستیک را به کوتاهی مورد مطالعه قرار می‌دهیم [۱].

تعریف ۱.۳. فرض کنید $I = [0, 1]$. یک تابع دو متغیره به صورت $T : I \times I \to I$ را یک T- نرم گوییم اگر در خواص زیر صدق کند

الف) $T(x, 1) = x$.

ب) یکنوایی: $x_1 \leqslant x_2, y_1 \leqslant y_2 \Longrightarrow T(x_1, y_1) \leqslant T(x_2, y_2)$.

پ) جابه‌جایی: $T(x, y) = T(y, x)$.

ت) شرکت‌پذیری: $T[x,T(y,z)] = T[T(x,y),z]$.

T-نرم‌ها و T- هم‌نرم ها (یا S-نرم‌ها) را نرم‌های مثلثی و هم‌نرم‌های مثلثی نیز گویند. این دو رده از اندازه‌ها به خاطر نقشی که در نامساوی‌های مثلثی دارند به این نام خوانده می‌شوند و به دلیل ویژگی‌های بسیار جالب اخیراً بیشتر مورد توجه واقع شده‌اند. در بین عملگرهای T- نرم عملگر دراستیک خواص جالبی دارد و مورد توجه قرار گرفته است و به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$T_W(x,y) = \begin{cases} x & y = ۱\ , \\ y & x = ۱\ , \\ ۰ & x,y \neq ۱\ . \end{cases}$$

فرض کنید $T = T_W$ ضعیف‌ترین T-نرم باشد و $\tilde{A} = (a,\alpha_A,\beta_A)_{LR}$ و $\tilde{B} = (b,\alpha_B,\beta_B)_{LR}$ دو عدد فازی LR باشند. دراین‌صورت جمع بین این دو عدد فازی تحت T-نرم دراستیک عبارتست از

$$\tilde{A}\oplus\tilde{B} = (a,\alpha_A,\beta_A)_{LR}\oplus(b,\alpha_B,\beta_B)_{LR} = (a+b, max\{\alpha_A,\alpha_B\}, max\{\beta_A,\beta_B\})_{LR}. \quad (۹)$$

درصورتی‌که $L = R$ باشد، تفاضل این دو عدد فازی تحت T-نرم دراستیک یک عدد فازی LR به‌صورت زیر است

$$\begin{aligned} \tilde{A}\ominus\tilde{B} &= (a,\alpha_A,\beta_A)_{LR}\ominus(b,\alpha_B,\beta_B)_{LR} \\ &= (a,\alpha_A,\beta_A)_{LR}\oplus(-b,\beta_B,\alpha_B)_{LR} = (a-b, max\{\alpha_A,\beta_B\}, max\{\beta_A,\alpha_B\})_{LR}. \end{aligned} \quad (۱۰)$$

برای بررسی ضرب دو عدد فازی LR تحت T-نرم دراستیک بایستی حالت‌های مختلفی را برای مراکز دو عدد فازی تحت بررسی مورد مطالعه قرار دهیم که در ادامه به آن پرداخته شده‌است.

حالت اول: فرض کنید $a,b > ۰$. دراین‌صورت برای مقادیر $z \leqslant ab$ داریم

$$\begin{aligned} (\tilde{A}\otimes\tilde{B})(z) &= \sup_{x.y=z} T_W(\tilde{A}(x),\tilde{B}(y)) \\ &= max\left\{\tilde{A}(\frac{z}{b}),\tilde{B}(\frac{z}{a})\right\} = max\left\{L(\frac{a-\frac{z}{b}}{\alpha_A}),L(\frac{b-\frac{z}{a}}{\alpha_B})\right\} \\ &= max\left\{L(\frac{ab-z}{\alpha_A b}),L(\frac{ab-z}{\alpha_B a})\right\}. \end{aligned} \quad (۱۱)$$

بنابراین می‌توان نوشت

$$(\tilde{A} \otimes \tilde{B})(z) = \begin{cases} L\left[\frac{(ab-z)}{max\{\alpha_A b, \alpha_B a\}}\right] & z \geqslant ab - max\{\alpha_A b, \alpha_B a\}\ , \\ \\ \circ & \text{در غیر این صورت.} \end{cases} \qquad (۱۲)$$

به‌طور مشابه

$$(\tilde{A} \otimes \tilde{B})(z) = \begin{cases} R\left[\frac{(z-ab)}{max\{\beta_A b, \beta_B a\}}\right] & z \leqslant ab - max\{\beta_A b, \beta_B a\}\ , \\ \\ \circ & \text{در غیر این صورت.} \end{cases} \qquad (۱۳)$$

با جمع‌بندی دو عبارت به‌دست آمده در روابط (۱۲) و (۱۳) می‌توان ضرب دو عدد فازی LR را در حالت $a, b > \circ$ به صورت یک عدد فازی LR با تعریف زیر ارائه نمود

$$\tilde{A} \otimes \tilde{B} = (ab, max\{\alpha_A b, \alpha_B a\}, max\{\beta_A b, \beta_B a\})_{LR}. \qquad (۱۴)$$

به روش مشابه با آن‌چه که در حالت اول مورد بررسی قرار گرفت، حالت‌های ممکن دیگر برای a, b به عنوان مراکز دو عدد فازی تحت بررسی در ادامه آورده شده است.

حالت دوم: اگر $a, b < \circ$ آن‌گاه ضرب دو عدد فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ یک عدد فازی LR با تعریف زیر می‌باشد

$$\tilde{A} \otimes \tilde{B} = (ab, max\{\beta_A b, \beta_B a\}, max\{\alpha_A b, \alpha_B a\})_{RL}.$$

حالت سوم: فرض کنید $a = \circ, b > \circ$ دراین‌صورت حاصل ضرب دو عدد فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ عدد فازی LR با تعریف زیر است

$$\tilde{A} \otimes \tilde{B} = (\circ, \alpha_A b, \beta_A b)_{LR}.$$

حالت چهارم: برای حالتی که $a = \circ, b < \circ$ باشد، حاصل ضرب یک عدد فازی LR به‌صورت زیر است

$$\tilde{A} \otimes \tilde{B} = (\circ, -\beta_A b, -\alpha_A b)_{RL}.$$

حالت پنجم: درصورتی‌که $a=0, b=0$ باشند آن‌گاه

$$\tilde{A}\otimes\tilde{B}=(0,0,0)_{LR}=I_{\{0\}}(x).$$

که در آن

$$I_{\{0\}}(x)=\begin{cases}1 & x=0\\ 0 & \text{در غیر این صورت}\end{cases}.$$

حالت ششم: در این حالت فرض می‌کنیم $a<0, b>0$ و علاوه بر آن $L=R$ باشد. دراین‌صورت

$$\tilde{A}\otimes\tilde{B}=(ab, max\{\alpha_A b, -\beta_B a\}, max\{\beta_A b, -\alpha_B a\})_{RR}.$$

درصورتی‌که $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ اعداد فازی متقارن باشند آن‌گاه حاصل ضرب این دو عدد فازی متقارن یک عدد فازی LR با تعریف زیر می‌باشد

$$(\tilde{A}\otimes\tilde{B})(z)=(ab, max\{\alpha_A \mid b\mid, \alpha_B\mid a\mid\}, max\{\alpha_A\mid b\mid, \alpha_B\mid a\mid\})_{LL}.$$

برای به‌دست آوردن تابع عضویت ضریب همبستگی فازی $\tilde{r}_{X,Y}$ نیازمند محاسبه تابع عضویت آماره‌های میانگین و انحراف معیار می‌باشیم. در ادامه بدون کاستن از کلیت مسئله فرض می‌کنیم که $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ دو عدد فازی مثلثی متقارن باشند. در این بخش فرض می‌کنیم که $\tilde{A}+...+\tilde{A}=n\odot\tilde{A}$ باشد. در این‌صورت اگر $\tilde{A}=(a,\alpha)$ باشد آن‌گاه $n\odot\tilde{A}=\tilde{A}+...+\tilde{A}=(na,\alpha)$. بنابراین برای هر مقدار غیر صفر مانند t داریم $t\odot\tilde{A}=(ta,\alpha)$.

اکنون فرض کنید که n مشاهده فازی از متغیرهای $\tilde{X}$ و $\tilde{Y}$ در اختیار داشته باشیم و هدف محاسبه ضریب همبستگی این زوج مشاهدات نادقیق باشد. در چنین شرایطی رابطه (۱) را بر حسب نمادگذاری‌های جدید انجام شده، به‌صورت زیر بازنویسی می‌کنیم [۳]

$$\tilde{r}_{X,Y}=\frac{\sum_{j=1}^{n}(\tilde{X}_j-\frac{1}{n}\odot\sum_{j=1}^{n}\tilde{X}_j)(\tilde{Y}_j-\frac{1}{n}\odot\sum_{j=1}^{n}\tilde{Y}_j)}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n}(\tilde{X}_j-\frac{1}{n}\odot\sum_{j=1}^{n}\tilde{X}_j)^2\sum_{j=1}^{n}(\tilde{Y}_j-\frac{1}{n}\odot\sum_{j=1}^{n}\tilde{Y}_j)^2}}. \qquad (۱۵)$$

فرض کنید $\tilde{X}_j=(x_j,r_j)_L$ و $\tilde{Y}_j=(y_j,\delta_j)_L$ نمونه‌های تصادفی از جوامع تحت بررسی باشند که به‌صورت اعداد فازی متقارن در نظر گرفته شده‌اند $(j=1,...,n)$. با توجه به عملگرهای جبری تعریف

شده بر اساس T- نرم دراستیک و نمادگذاری‌های انجام شده می‌توان نوشت

$$\tilde{\tilde{X}} = \frac{1}{n} \odot \sum_{j=1}^{n} \tilde{X}_j = (\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j, \max_{1\leqslant j\leqslant n} r_j)_L, \qquad \tilde{\tilde{Y}} = \frac{1}{n} \odot \sum_{j=1}^{n} \tilde{Y}_j = (\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} y_j, \max_{1\leqslant j\leqslant n} \delta_j)_L$$

دراین‌صورت با استفاده از رابطه (۱۴) خواهیم داشت

$$\begin{aligned}(\tilde{X}_j - \tilde{\tilde{X}})(\tilde{Y}_j - \tilde{\tilde{Y}}) \quad &= \quad \Big((x_j - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j)(y_j - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} y_j) \\ &, \quad \max(| x_j - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j | \max_{1\leqslant j\leqslant n} \delta_j, | y_j - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} y_j | \max_{1\leqslant j\leqslant n} r_j)\Big)_L .\end{aligned}$$

با استفاده رابطه (۹) داریم

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}(\tilde{X}_j - \frac{1}{n} \odot \sum_{j=1}^{n} \tilde{X}_j)(\tilde{Y}_j - \frac{1}{n} \odot \sum_{j=1}^{n} \tilde{Y}_j) \quad &= \quad \Big(\sum_{j=1}^{n}(x_j - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k)(y_j - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k) \\ &, \quad \max_{1\leqslant j\leqslant n}(| x_j - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k | \max_{1\leqslant k\leqslant n} \delta_k, | y_j - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\end{aligned}$$

از طرفی به‌طور مشابه می‌توان نوشت

$$\sum_{j=1}^{n}(\tilde{X}_j - \frac{1}{n} \odot \sum_{j=1}^{n} \tilde{X}_j)^2 = \Big(\sum_{j=1}^{n}(x_j - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k)^2, \max_{1\leqslant j\leqslant n} | x_j - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k | \max_{1\leqslant k\leqslant n} r_k\Big)_L$$

بنابراین

$$\sqrt{\sum_{j=1}^{n}(\tilde{X}_j - \frac{1}{n}\odot\sum_{k=1}^{n}\tilde{X}_k)^2\sum_{j=1}^{n}(\tilde{Y}_j - \frac{1}{n}\odot\sum_{k=1}^{n}\tilde{Y}_k)^2} \tag{18}$$

$$= \Bigg(\sqrt{\sum_{j=1}^{n}(x_j - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k)^2\sum_{j=1}^{n}(y_j - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}y_k)^2}$$

$$, \frac{1}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n}(x_j - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k)^2\sum_{j=1}^{n}(y_j - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}y_k)^2}}$$

$$\times \max\Bigg\{\sum_{j=1}^{n}(x_j - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k)^2 \max_{1\leqslant j\leqslant n} \mid y_j - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}y_k \mid \max_{1\leqslant k\leqslant n}\delta_k,$$

$$\sum_{j=1}^{n}(y_j - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}y_k)^2 \max_{1\leqslant j\leqslant n} \mid x_j - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k \mid \max_{1\leqslant k\leqslant n} r_k\Bigg\}\Bigg)_L.$$

در نهایت می‌توان تابع عضویت ضریب همبستگی فازی $\tilde{r}$ را با استفاده از روابط به‌دست آمده برای تقسیم اعداد فازی تحت T− نرم دراستیک محاسبه نمود.

مثال ۲.۳. یک مجموعه داده شامل یک ۸ زوج مشاهده از اعداد فازی مثلثی متقارن که در جدول (۲.۳) آورده شده‌اند را در نظر بگیرید [۲]

برای محاسبه ضریب همبستگی ابتدا محاسبات زیر را با توجه به روابط به‌دست آمده در این بخش انجام می‌دهیم

$$\sum_{j=1}^{n}(\tilde{X}_j - \tilde{\bar{X}})(\tilde{Y}_j - \tilde{\bar{Y}}) = (5/7500, 5/5625)$$

بنابراین

$$\sqrt{\sum_{j=1}^{n}(\tilde{X}_j - \tilde{\bar{X}})^2\sum_{j=1}^{n}(\tilde{Y}_j - \tilde{\bar{Y}})^2} = (55/4810, 6/1646)$$

دراین‌صورت ضریب همبستگی اعداد فازی برابر است

جدول ۴: *مجموعه داده شامل ۸ جفت از اعداد فازی مثلثی متقارن درمثال (۲.۳)*

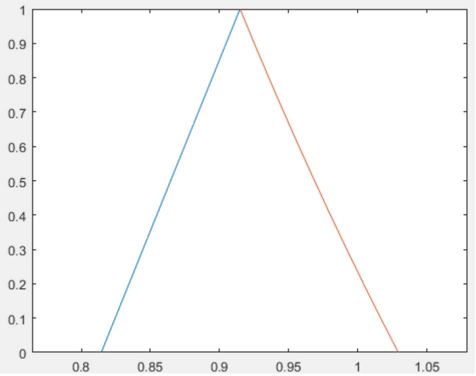
i	$\tilde{X}_i$	$\tilde{Y}_i$
۱	(۲/۰،۰/۵)	(۴/۰،۰/۵)
۲	(۳/۵،۰/۵)	(۵/۵،۰/۵)
۳	(۵/۵،۱/۰)	(۷/۵،۱/۰)
۴	(۷/۰،۰/۵)	(۶/۵،۰/۵)
۵	(۸/۵،۰/۵)	(۸/۵،۵/۰)
۶	(۱۰/۵،۱/۰)	(۸/۰،۱/۰)
۷	(۱۱/۰،۰/۵)	(۱۰/۵،۰/۵)
۸	(۱۲/۵،۰/۵)	(۹/۵،۰/۵)

$$\tilde{r}_{X,Y}=\frac{(۵/۷۵۰۰,۵/۵۶۲۵)}{(۵۵/۴۸۱۰,۶/۱۶۴۶)}=\begin{cases} ۱-\dfrac{۰/۹۱۴۷-z}{۰/۰۱۸۰\times max\left\{۵/۵۶۲۵,۶/۱۶۴۶\times z\right\}} & ۰/۸۱۴۵\leqslant z\leqslant ۰/۹۱ \\ ۱-\dfrac{z-۰/۹۱۴۷}{۰/۰۱۸۰\times max\left\{۵/۵۶۲۵,۶/۱۶۴۶\times z\right\}} & ۰/۹۱۴۷\leqslant z\leqslant ۱/۰ \\ ۰ & \text{در غیر این صورت.} \end{cases} \quad (۱۹)$$

$$=\begin{cases} ۱-\frac{۰/۹۱۴۷-z}{۰/۱۰۰} & ۰/۸۱۴۵\leqslant z\leqslant ۰/۹۰۲۳\,, \\ ۱-\frac{۰/۹۱۴۷-z}{۰/۱۱۱\times z} & ۰/۹۰۲۳\leqslant z\leqslant ۰/۹۱۴۷\,, \\ ۱-\frac{z-۰/۹۱۴۷}{۰/۱۱۱\times z} & ۰/۹۱۴۷\leqslant z\leqslant ۱/۰۲۹۱\,, \\ ۰ & \text{در غیر این صورت.} \end{cases} \quad (۲۰)$$

نمودار مربوط به تابع عضویت ضریب همبستگی فازی مثلثی متقارن در شکل زیر نمایش داده شده است.

اگرچه رویکرد مبتنی بر T–نرم دراستیک محاسبات را به‌طرز قابل توجهی ساده‌تر می‌کند، اما همان‌طور که در شکل ۴ می‌توان دید حدود به‌دست آمده برای ضریب همبستگی در این مثال از ۱ بیشتر شده است که



شکل ۴: *نمودار تقریبی تابع عضویت ضریب همبستگی فازی مثلثی متقارن در مثال (۲.۳)*

با تعریف آن در شرایطی که داده‌ها دقیق باشند مطابقت ندارد.

مراجع

[۱] طاهری، م (۱۳۷۵)، *آشنایی با نظریه‌ی مجموعه‌های فازی*، انتشارات جهاد دانشگاهی مشهد.

[2] Chachi, J., Taheri, S.M., (2016), Multiple Fuzzy Regression Model for Fuzzy Input Output Data, Iranian Journal of Fuzzy Systems, Vol 13,pp 63-78.

[3] Hong D. H.,(2006), "Fuzzy measures for a correlation coefficient of fuzzy numbers under T_W (the weakest $t-$norm)-based fuzzy arithmetic operations", Information Sciences, Vol 176, pp 150-160.

[4] Liu, S. T., Kao, C.,(2002), "Fuzzy measures for correlation coeffcient of fuzzy numbers", Fuzzy Sets and Systems, Vol 128, pp 267–275.