سیستم های فازی و کاربردها
سال اول، شماره اول (پاییز۱۳۹۷) صص: ۱تا۲۲
DOR: 20.1001.1.27174409.1397.1.1.1.2

نظریه مجموعه‌های فازی و تعمیم‌های آن

اسفندیار اسلامی

دانشگاه شهید باهنر کرمان، دانشکده ریاضی و کامپیوتر، گروه ریاضی

چکیده

زاده نظریه مجموعه‌های فازی را به‌عنوان تعمیمی از مجموعه‌های معمولی (دقیق) معرفی نمود. این مجموعه‌ها برای مدل‌سازی مفاهیم مبهم که به وفور در مسایل واقعی وجود دارند بکار برده می‌شوند. این نظریه راه را برای ایجاد نظریه‌های دیگری که کم وبیش همین ادعا را دارند گشود. هریک از این نظریه‌ها را می‌توان تعمیمی از نظریه مجموعه‌های فازی دانست. بعضی از مهمترین آن‌ها شامل مجموعه‌های بازه‌ای مقدار، مجموعه‌های فازی شهودی، مجموعه‌های فازی نوع ۲، مجموعه‌های فازی چندگانه، مجموعه‌های فازی مردد و مجموعه‌های نوتروسوفیک می‌شود.

۱ مقدمه

زیر مجموعه‌های فازی توسط لطفی عسکر زاده در سال ۱۹۶۵ با چاپ مقاله‌ای [۱۳] معرفی شد. او عضویت در این زیر مجموعه‌ها را نادقیق توصیف کرد و معتقد بود که بسیادی از مجموعه‌هایی که در واقعیت با آن‌ها سروکار داریم ازاین نوعند. این مقاله فصل تازه‌ای برای تحقیقات جدید در مورد مجموعه‌ها وکاربردهایش نظیر تصمیم گیری در فضاهای مبهم، تجزیه وتحلیل سیستم‌های نادقیق واستدلال تقریبی گشود. زاده عضویت

Mathematics Subject Classification (2010): 03B52 ; 03E72 , **Email:** Esfandiar.Eslami@uk.ac.ir.

عبارات و کلمات کلیدی: مجموعه‌های فازی، مجموعه‌های فازی شهودی، مجموعه‌های فازی فاصله‌ای مقدار، مجموعه‌های فازی مردد، مجموعه‌های نوتروسوفیک

در این مجموعه‌ها را از نوع درجه بندی شده با اعداد در بازه $[0,1]$ می‌دانست. براساس این تعریف هر زیرمجموعه دقیق نیز یک زیر مجموعه فازی است.

ساختارهای ریاضی چندی شبیه مجموعه‌های فازی یا عمومی تر از آن‌ها وجود دارند. از زمان ابداع نظریه مجموعه‌های فازی در سال ۱۹۶۵ ساختارهای ریاضی و نظریه‌های جدیدی برای رفتار با عدم دقت، عدم قطعیت، ابهام و عدم اطمینان بوجود آمده اند. بعضی از این ساختارها تعمیمی از نظریه مجموعه‌های فازی هستند و بعضی سعی دارند ریاضی‌وار عدم دقت و عدم اطمینان را مدل‌سازی کنند.

(آ) در سال ۱۹۶۶ مور [1] جبر بازه‌ها را معرفی نمود که بعداً در ارتباط با سطوح آلفای مجموعه‌های فازی به عنوان حساب بازه‌ها مورد استفاده قرار گرفت[۹].

(ب) در سال ۱۹۶۷ گوگن [2] تعمیمی از مجموعه‌های فازی که درجات عضویت از یک مشبکه L هستند به نام مجموعه‌های L - فازی معرفی نمود [۶].

(پ) در سال ۱۹۶۸ جنتیل هوم [3] مجموعه‌های مات را مطرح کرد [۵]. بعد از آن در سال ۱۹۷۱ براون [4] مجموعه‌های با مقادیر بولی را معرفی نمود [۴].

(ت) زاده تعمیم‌هایی از مجموعه‌های فازی را به عنوان مجموعه‌های فازی از نوع ۲ و عمومی تر از نوع n تعریف وکاربردهایی از آن‌ها را مورد بررسی قرار داد [۱۴]

(ث) در سال‌های ۱۹۷۴ و۱۹۷۵ زاده و محققان مختلفی ([۱۱], [۸], [۷]) تعمیم‌های دیگری مانند مجموعه‌های مجموعه‌ای مقدار، مجموعه‌های فازی فاصله‌ای مقدار را معرفی نمودند.

(ج) از آن پس بطور پیوسته تعمیم‌هایی از مجموعه‌های فازی یا مجموعه‌هایی با عناوین مختلف برای مدل‌سازی مفاهیم مبهم داده شده اند از آن جمله می‌توان به موارد زیر توجه کرد: مجموعه‌های نامعین (ناریانی [5] ۱۹۸۰)–مجموعه‌های خشن (پاولاک [6] ۱۹۸۲)– مجموعه‌های فازی شهودی (آتاناسوف

[1] Moor
[2] Gougen
[3] Gentilhomme
[4] Brown
[5] Nariyani
[6] Pawlak

۱۹۸۳[۷])- مجموعه‌های چندگانه فازی(یاگر[۸] ۱۹۸۶) - مجموعه‌های L- فازی شهودی - مجموعه‌های چندگانه خشن - مجموعه‌های خشن فازی -مجموعه‌های فازی حقیقی مقدار - مجموعه‌های مبهم (ون - لانگ [۹] ۱۹۹۳)- مجموعه‌های نرم و ترکیبات مختلفی از آن با مجموعه‌های خشن، فازی و فازی شهودی - مجموعه‌های فازی دوقطبی و مجموعه‌های فازی چندگانه.

(چ) درسال ۱۹۹۸ سامارانداج [۱۰] مفهوم مجموعه‌های نوتروسوفیک [۱۱] را از دیگاه فلسفی مطرح کرد. او معتقد است که این نوع مجموعه‌ها نه تنها درجه عضویت و درجه عدم عضویت را دارند بلکه درجه عدم تعیین وعدم سازگاری را نیز مورد توجه قرار میدهند. این نوع مجموعه‌ها به خاطر تنوع نظریات وکاربردها مورد توجه محققان قرارگرفته مقالات زیادی تا سال ۲۰۱۷ در این مورد به چاپ رسیده است.

(ح) در ادامه تعمیم درجات عضویت، در سال ۲۰۱۰ تورا [۱۲] [۱۲] نوع جدیدی از عمومیت مجموعه‌های فازی به نام مجموعه‌های فازی مردد پیشنهاد نمود که تصویر جدیدی برای تحقیق بیشتر در مورد تصمیم گیری تحت شرایط مردد نمایان ساخت. البته تعمیم‌هایی از مجموعه‌های فازی مردد مانند مجموعه‌های فازی مردد بازه‌ای مقدار نیز معرفی شدند. ارتباط بین مجموعه‌های فازی مردد و مجموعه‌های فازی شهودی مورد مطالعه قرار گرفته است.

در این مقاله ما به تشریح مهمترین تعمیم‌ها از دید نظری و کاربردی می‌پردازیم. در قسمت بعدی ابتدا مجموعه‌های دقیق (معمولی) و مجموعه‌های فازی را به عنوان تعمیمی از آن مورد بحث قرار میدهیم. در بخش ۳ به ترتیب مجموعه‌های فازی شهودی، فازی مردد ونوتروسوفیک را بررسی مینمائیم.

[7] Atanassov
[8] Yager
[9] Wen - Lung
[10] Samarandache
[11] Neutrosophic
[12] Torra

۲ مجموعه‌های دقیق وفازی

در این بخش ابتدا به مبانی مجمو عه‌های دقیق (معمولی) که پایه واساس ریاضیات است می‌پردازیم. زیر مجموعه‌های فازی را به عنوان تعمیمی از این مجموعه‌ها در نظر گرفته مبانی ریاضیاتی آن را تشریح مینمائیم.

۱.۲ زیرمجموعه‌های دقیق

فرض کنید U یک مجموعه باشد به این معنی که عناصر آن مشخص ومتمایز باشند. U را به عنوان مجموعه مرجع یا مجموعه جهانی در نظر می‌گیریم. مجموعه تمام زیر مجموعه‌های U را با $\mathcal{P}(\mathcal{U})$ نمایش میدهیم. ریاضی وار این که

$$A \in \mathcal{P}(\mathcal{U}) \iff \mathcal{A} \subseteq \mathcal{U}$$

هر زیر مجموعه A از U یا به عبارتی هر عنصر $A \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$ با تابع مشخصه خودش χ_A در تناظر یک به یک است. این تابع از U به $\{۰, ۱\}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\chi_A(u) = \begin{cases} ۱ & u \in A \\ ۰ & u \notin A \end{cases}$$

و در نتیجه $\mathcal{P}(\mathcal{U})$ با ۲^U یعنی توابع از U به $۲ = \{۰, ۱\}$ همتوان است ومی نویسیم :

$$\mathcal{P}(\mathcal{U}) \sim \in^{\mathcal{U}}.$$

توجه می‌کنیم که در تابع مشخصه χ_A اگر $u \in A$ مقدار ۱ به u نسبت داده می‌شود، یعنی ارزش درستی گزاره $u \in A$ یک است ودر غیر این صورت صفر است. غیر این دو حالت هم وجود ندارد یعنی هر $u \in U$ یا به A تعلق دارد، یا به A تعلق ندارد واین ترجمه همان اصل طرد شق ثالث در منطق ریاضی (کلاسیک) به صورت $p \vee \sim p$ است.

روی مجموعه $\mathcal{P}(\mathcal{U})$ که حداقل دوعضو ϕ و U را دارد عمل‌های $\cup$(اجتماع)، $\cap$ (اشتراک) و $'$(متمم گیری) را به صورت زیر تعریف می‌کنیم: برای هر$A, B \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$

$$\cup(A, B) = A \cup B = \{u \in U : u \in A \vee u \in B\}$$

$$\cap(A, B) = A \cap B = \{u \in U : u \in A \wedge u \in B\}$$

$$'(A) = A' = \{u \in U :\sim (u \in A)\}$$

که در آن $\vee, \wedge$ و $\sim$ رابط‌های منطقی "یا"، "و" و " این چنین نیست که" هستند. با توجه به خواص کاملاً شناخته شده این عملگرها شامل شرکت پذیری $\cup$ و$\cap$، جابجایی $\cup$ و$\cap$، پخشپذیری $\cup$ و $\cap$ نسبت به یکدیگر، خنثی بودن ϕ تحت عمل $\cup$، خنثی بودن U تحت عمل $\cap$، خواص متمم ($A \cup A' = U$ و $A \cap A' = \phi$) و خواص جذب $A \cap (A \cup B) = A$) ، ($A \cup (A \cap B) = A$) دستگاه $P(U) = (\mathcal{P}(\mathcal{U}), \cup, \cap, ', \phi, \mathcal{U})$ یک جبر بولی است.

بنا به آنچه در مورد توابع مشخصه و تناظر یک به یک بین آن‌ها گفته شد، دستگاه

$$\mathbf{۲}^U = (۲^U, max, min, -, ۰, ۱)$$

که در آن $(-f)(x) = ۱ - f(x)$، $۰(x) = ۰$ و $۱(x) = ۱$ برای هر $f \in ۲^U$ و هر $x \in U$ می‌باشد، نیز یک جبر بولی است. یاد آوری می‌کنیم که یک جبر دستگاهی متشکل از یک مجموعه ناتهی وهرتعداد از توابع روی آن است. درواقع دو جبر فوق الذکر از نظری جبری یکریخت هستند.

۲.۲ زیر مجموعه‌های فازی

در این مقاله فرض میکنیم که U مجموعه مرجع (جهانی) است.

یک زیر مجموعه فازی از U مرز مشخصی ندارد، عناصر آن مشخص نیستند و وجه تشخیصی برای آن متصور نیست. مثلاً اگر U مجموعه دانشجویان دانشگاه کرمان باشد که کاملاً مشخص ومتمایز هستند، آنگاه "مجموعه دانشجویان **قد بلند** دانشگاه کرمان " را نمی توان کاملاً مشخص کرد زیرا که **قد بلند** به طور صریح تعریف نشده ومعیار برای آن از شخصی به شخص دیگر متفاوت است. البته اگر تعریف کنیم "

هر دانشجویی که طول قدش از ۱۸۰ سانتی متر بیشتر است قد بلند است" آنگاه ابهامی در مفهوم قد بلند وجود ندارد ومجموعه " دانشجویان قد بلند دانشگاه کرمان" بنا به تعاریف بخش قبل، یک مجموعه دقیق (معمولی) است.

لطفی عسکر زاده بنیان گزار نظریه مجموعه‌های فازی، نوعی از زیر مجموعه‌های U را که بتوان ابهام ونادقیق بودن آن‌ها را نسبت به رابطه تعلق درجه بندی کرد زیر مجموعه فازی می‌نامد. او معتقد است که یک "زیر مجموعه" از U مانند A که در آن عضویت هر عضو $u \in U$ درجه بندی شود وبه بیان خودش

"It's membership is a matter of degree"

یک "زیر مجموعه فازی" U یا یک "مجموعه فازی در U " نامیده می‌شود. او اولین درجه بندی اعضای $u \in U$ به Aرابا اعداد در بازه $[۰, ۱]$ معین میکند. این درجه بندی را می‌توان به صورت تابع $f_A : U \longrightarrow [۰, ۱]$ نمایش داد که منظور از $f_A(u) \in [۰, ۱]$ میزان یا درجه تعلق u به A می‌باشد. اگر $f_A(u) = ۰$ یعنی u در A نیست یا این که به زبان منطق، گزاره $u \in A$ دروغ است. اگر $f_A(u) = ۱$ یعنی u در A هست وگزاره $u \in A$ راست است. هرچه مقدار f_A برای عضوی از U به ۱ نزدیک تر باشد، درجه تعلق آن به A بیشتر و ارزش گزاره $u \in A$ "درست تر" است و هرچه مقدار f_A برای عضوی از U به صفر نزدیک تر باشد، درجه تعلق آن به A کمتر وارزش گزاره $u \in A$ "نادرست تر " است. همان طور که دیده می‌شود درجه تعلق u به A می‌تواند هر عضوی از مجموعه $[۰, ۱]$ باشد وبه طبع آن ارزش درستی گزاره‌ها بعلاوه صفر و یک هر مقداری بین آن‌ها را بخود می‌گیرد. در واقع با محدود کردن برد تابع f_A به مجموعه دوعضوی $\{۰, ۱\}$ همان تابع مشخصه A یعنی χ_A بدست میاید. حال می‌توان با توجه به آن چه گفته شد، یک زیر مجموعه فازی A از U را با تابع $f_A : U \longrightarrow [۰, ۱]$ نمایش داد که تعمیمی از تابع مشخصه A است. اگر تمام این چنین زیر مجموعه‌هایی از U را با $\mathcal{F}(\mathcal{U})$ نمایش دهیم، داریم:

$$\mathbf{۲}^U \sim \mathcal{P}(\mathcal{U}) \subset \mathcal{F}(\mathcal{U}) \sim [۰, \infty]^{\mathcal{U}}$$

همان طور که ملاحظه می‌شود رابطه شمول بالا اکید است یعنی مجموعه‌های فازی در U وجود دارند که دقیق نیستند.

عمل‌های اجتماع، اشتراک ومتمم گیری در $\mathcal{F}(\mathcal{U})$ به صورت اولیه زیر تعریف می‌شوند. اگر A و B دو مجموعه فازی در U باشند و μ_A و μ_B به ترتیب توابع عضویت A و B در $\mathcal{F}(\mathcal{U})$ باشند، آنگاه برای هر $u \in U$:

$$(A \cup B)(u) = max(\mu_A(u), \mu_B(u))$$

$$(A \cap B)(u) = min(\mu_A(u), \mu_B(u))$$

$$A^c(u) = ۱ - \mu_A(u)$$

به سادگی دیده می‌شود که در حالت کلی $U \neq A \cup A^c$ و $\phi \neq A \cap A^c$ که در آن $U(u) = ۱$ و $\phi(u) = ۰$ برای هر $u \in U$. بنا براین

$$\mathbf{F}(U) = (\mathcal{F}(\mathcal{U}), \cup, \cap, ^{\rfloor}, \phi, \mathcal{U})$$

تشکیل یک جبر بولی نمی دهد.

۳.۲ نرم‌ها وهم - نرم‌های مثلثی

دربخش قبل برای تعیین تابع عضویت اشتراک دو مجموعه فازی به پیروی از زاده، از تابع مینیمم (min) استفاده کردیم. تحدید این تابع به مجموعه دو عضوی $\{۰, ۱\}$ همان جدول درستی $\wedge$ (عطف) در منطف کلاسیک است. تابع ماکسیمم (max) نیز تعمیم تابع $\vee$ (فصل) در منطق کلاسیک می‌باشد.

در این بخش توابعی را معرفی میکنیم که همان خواص بالا را دارند و میتوان برحسب لزوم از آنها برای توابع عضویت استفاده نمود[۱].

تعریف ۱.۲. تابع $T : [۰, ۱] \times [۰, ۱] \longrightarrow [۰, ۱]$ را یک نرم مثلثی می‌نامیم هرگاه در شرایط زیر برای هر $a, b.c \in [۰, ۱]$ صدق کند:

(۱) $\quad T(a, b) = T(b, a) \quad (T۱)$

(۲) $\quad T(a, b) \leq T(c, d)$ اگر $a \leq c$ و $b \leq d$ $\quad (T۲)$

(۳) $\quad T(a, T(b, c)) = T(T(a, b), c) \quad (T۳)$

(۴) $\quad T(a, ۱) = a \quad (T۴)$

شرایط $(T۱), (T۲), (T۳)$ و $(T۴)$ به ترتیب خواص جابجایی، هم نوایی، شرکت پذیری و مرزی هستند. به آسانی از آن‌ها نتیجه می‌شود که $T(۱, ۱) = ۱$ و $T(۰, ۰) = T(۰, ۱) = T(۱, ۰) = ۰$.

خواص مرزی فوق این معنی را نمایان می‌سازند که هرنرم مثلثی T می‌تواند تعمیم مناسبی برای تابع درستی عطف ودر نتیجه مدلی برای درجه عضویت اشتراک دو مجموعه فازی باشد. پس اگر A و B دو مجموعه فازی باشند می‌توان نوشت: برای هر $u \in U$

$$(A \cap B)(u) = T(A(u), B(u))$$

نرم‌های مثلثی زیادی توسط محققان برای کاربردهای متفاوت معرفی شده است. مهمترین نرم‌های مثلثی که بیشترین کاربرد را دارند عبارتند از: برای هر $a, b \in [۰, ۱]$

(۵) نرم مثلثی مینیمم $$T(a,b) = min(a,b)$$

(۶) *نرم مثلثی حاصل ضرب* $$T(a,b) = ab$$

(۷) *نرم مثلثی لوکاسیویچ* $$T(a,b) = max(۰, a+b-۱)$$

می توان نشان داد که نرم مثلثی مینیمم از همه نرم‌های مثلثی بزرگتر است، به این معنی که برای هر نرم مثلثی T و هر $a, b \in [۰, ۱]$ داریم: $T(a,b) \leq min(a,b)$.

برای مدل‌سازی توابع عضویت اجتماع نیز می‌توان از توابعی استفاده کرد که هم - نرم مثلثی نامیده می‌شوند ودر تعریف زیر می‌آوریم.

تعریف ۲.۲. تابع $S : [۰, ۱] \times [۰, ۱] \longrightarrow [۰, ۱]$ را یک هم - نرم مثلثی می‌نامیم هرگاه در شرایط زیر برای هر $a, b.c \in [۰, ۱]$ صدق کند:

(۸) $$S(a,b) = S(b,a) \qquad (S۱)$$

(۹) اگر $a \leq c$ و $b \leq d$ $$S(a,b) \leq S(c,d) \qquad (S۲)$$

(۱۰) $$S(a, S(b,c)) = S(S(a,b), c) \qquad (S۳)$$

(۱۱) $$S(a, ۰) = a \qquad (S۴)$$

شرایط $(S۱), (S۲), (S۳)$ و $(S۴)$ به ترتیب خواص جابجایی، هم نوایی، شرکت پذیری و مرزی هستند. به آسانی از آن‌ها نتیجه می‌شود که $S(۰, ۰) = ۱$ و $S(۰, ۰) = S(۰, ۱) = S(۱, ۰) = ۱$.

خواص مرزی فوق این معنی را نمایان می‌سازند که هر هم - نرم مثلثی S می‌تواند تعمیم مناسبی برای تابع درستی فصل ودر نتیجه مدلی برای درجه عضویت اجتماع دو مجموعه فازی باشد. پس اگر A و B دو مجموعه فازی باشند می‌توان نوشت: برای هر $u \in U$

$$(A \cup B)(u) = S(A(u), B(u))$$

مانند نرم‌های مثلثی، هم - نرم‌های زیادی معرفی شده اند. اما همیشه به خاطر دوگان بودن این دو مفهوم میتوان از یک نرم مثلثی داده شده T یک هم - نرم مثلثی S ساخت وبرعکس. رابطه آن‌ها به صورت زیر است: برای هر $a, b \in [۰, ۱]$

$$S(a, b) = ۱ - T(۱ - a, ۱ - b)$$

نظیر نرم‌های داده شده، هم - نرم‌های زیر را بدست می‌آوریم: برای هر $a, b \in [۰, ۱]$

(۱۲) هم - نرم مثلثی ماکسیمم $\quad S(a, b) = max(a, b)$

(۱۳) *نرم مثلثی حاصل جمع جبری* $\quad S(a, b) = a + b - ab$

(۱۴) هم -*نرم مثلثی لوکاسیویچ* $\quad S(a, b) = min(۱, a + b)$

توابع مهم دیگری که وجود دارند وبرای مدل‌سازی تابع عضویت متمم مجموعه فازی استفاده می‌شوند، نقیض یا نفی نام دارند وچنین تعریف می‌شوند:

تعریف ۳.۲. تابع یکتایی $N : [۰, ۱] \longrightarrow [۰, ۱]$ را تابع نقیض می‌گوئیم هرگاه در شرایط زیر صدق کند: برای هر $a, b \in [۰, ۱]$

(۱۵) اگر $a \leq b$ آن گاه $\quad N(b) \leq N(a) \quad (N۱)$

(۱۶) $N(۱) = ۰, N(۰) = ۱ \quad (N۲)$

(۱۷) به علاوه اگر

(۱۸) $N(N(a)) = a \quad (N۳)$

به آن نقیض قوی می‌گوئیم.

بدیهی است که تابع $N_1(x) = 1 - x$ برای هر $x \in [0, 1]$ یک تابع نقیض قوی است. رابطه دوگان منطقی را در حالت کلی می‌توان به صورت زیر نوشت: برای هر $a, b \in [0, 1]$

$$S(a, b) = N(T(N(a), N(b)))$$

بنابراین با دانستن تابع نقیض N می‌توان از یک نرم مثلثی T هم - نرم مثلثی S را بدست آورد وبرعکس.

۳ مجموعه‌های فازی شهودی

هر چند نظریه مجموعه‌های فازی از عهده عدم اطمینان‌های ناشی از ابهام یا تعلقات جزئی به یک مجموعه بطور موفق عمل کرده است، ولی نمی تواند همه حالات عدم اطمینان که غالباً در مسائل زندگی واقعی ومختلف وجود دارد مخصوصاً مسائلی که با اطلاعات ناکافی سروکار دارند را مدل‌سازی کند. آتاناسوف [۲] تعمیمی از مجموعه‌های فازی را به نام مجموعه‌های فازی شهودی معرفی نمود که می‌تواند بعد دیگری از تابع عضویت را نمایان سازد.

تعریف ۱.۳. یک زیر مجموعه فازی شهودی از U یا یک مجموعه فازی شهودی در U، مجموعه‌ای مانند A است که برای هر عضو $u \in U$ دو درجه یکی "درجه عضویت" ودیگری "درجه عدم عضویت" نسبت داده می‌شود. یعنی مجموعه A را با تابع $f_A : U \longrightarrow [0, 1] \times [0, 1]$ بطوری که $f_A(u) = (\mu_A(u), \nu_A(u))$ و $0 \leq \mu_A(u) + \nu_A(u) \leq 1$ برای هر $u \in U$ نظیر میکنیم.

با توجه به محدودیت فوق می‌توان مقادیر عضویت در مجموعه‌های فازی شهودی را مجموعه $L = \{(x, y) \in [0, 1]^2 : 0 \leq x + y \leq 1\}$ درنظر گرفت. در تعریف بالا تابع عضویت μ_A و تابع عدم عضویت ν_A هر دو مجموعه‌های فازی هستند. از این رو مجموعه‌های فازی شهودی را مجموعه‌های فازی دو بعدی نیز می‌گویند. مقدار $\pi_A(u) = 1 - \mu_A(u) - \nu_A(u)$ درجه شک وتردید عضویت $u \in U$ در A نامیده می‌شود.

در نظریه مجموعه‌های فازی شهودی عمل‌های اجتماع، اشتراک ومتمم به صورت اولیه زیر تعریف

می‌شوند: اگر A و B دو مجموعه فازی شهودی باشند، برای هر $u \in U$

$$(A \cup B)(u) = (max(\mu_A(u), \mu_B(u)), min(\nu_A(u), \nu_B(u)) \quad (۱۹)$$

$$(A \cap B)(u) = (min(\mu_A(u), \mu_B(u)), max(\nu_A(u), \nu_B(u)) \quad (۲۰)$$

$$A^c(u) = (\nu_A(u), \mu_A(u)) \quad (۲۱)$$

البته عمل‌های زیادی روی مجموعه‌های فازی شهودی تعریف شده است که بجز چند مورد خاص زیر بقیه چندان مورد کاربردی ندارند [۳]:

$$(A + B)(u) = (\mu_A(u) + \mu_B(u) - \mu_A(u)\mu_B(u), \nu_A(u)\nu_B(u)) \quad (۲۲)$$

$$(A.B)(u) = (\mu_A(u)\mu_B(u), (\nu_A(u) + \nu_B(u) - \nu_A(u)\nu_B(u)) \quad (۲۳)$$

$$(A@B)(u) = (\frac{\mu_A(u) + \mu_B(u)}{۲}, \frac{\nu_A(u) + \nu_B(u)}{۲}) \quad (۲۴)$$

رابطه شمول برای زیرمجموعه‌های فازی شهودی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A \subseteq B \iff (\forall u \in U)(\mu_A(u) \leq \mu_B(u) \text{و} \nu_B(u) \leq \nu_A(u))$$

بدیهی است که این تعمیمی از شمول مجموعه‌های فازی است که به صورت زیر می‌باشد. اگر A و B دو مجموعه فازی باشند آنگاه

$$A \subseteq B \iff (\forall u \in U)(\mu_A(u) \leq \mu_B(u))$$

طبیعی است که در هر دو مورد داشته باشیم:

$$A = B \iff A \subseteq B \text{ و } B \subseteq A$$

۴ مجموعه‌های L - فازی

در این بخش به تعمیمی از زیر مجموعه‌های فازی می‌پردازیم که اولین بار گوگن [۶]در سال ۱۹۶۷ آن را معرفی نمود. در این اصطلاح منظور ازL لاتیس یا مشبکه است. ابتدا تعریفی از مشبکه ارائه میدهیم:

تعریف ۱.۴. یک مشبکه جبری است مانند $\mathcal{L} = (\mathcal{L}, \vee, \wedge)$ از نوع (۲و۲) که عمل‌های $\vee$و $\wedge$ در شرایط زیر صدق میکنند: برای هر $x, y, z \in L$

$$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z \text{ و } x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z \quad (L1) \qquad (۲۵)$$

$$x \vee y = y \vee x \text{ و } x \wedge y = y \wedge x \quad (L2) \qquad (۲۶)$$

$$x \vee (x \wedge y) = x \text{ و } x \wedge (x \vee y) = x \quad (L3) \qquad (۲۷)$$

شرط $(L1)$ خواص شرکت پذیری $\vee$ و $\wedge$ ، شرط $(L2)$ خواص جابجایی عملگرها و شرط $(L3)$ خواص جذب هستند.

رابطه $\leq$ را روی L تعریف میکنیم: برای هر $x, y \in L$

$$x \leq y \Longleftrightarrow x \vee y = y \Longleftrightarrow x \wedge y = x$$

با این رابطه، مشبکه $(L, \vee, \wedge)$ تبدیل به یک مجموعه جزئاً مرتب می‌شود. هرگاه مشبکه دارای کوچکترین عضو ۰ وبزرگترین عضو۱ باشد آن را کران دار می‌نامیم. مشبکه را تام یا کامل می‌نامیم هرگاه هر زیر مجموعه آن دارای کوچکترین کران بالا و بزرگترین کران پائین باشد.

تعریف ۲.۴. فرض کنیم L یک مشبکه باشد. یک زیر مجموعه L - فازی از U را با تابع $f_A : U \longrightarrow L$ نظیر می‌کنیم. به این معنی که درجه عضویت هر $u \in U$ در مشبکه L قرار میگیرد.

بدیهی است که بازه $[۰, ۱]$ همراه با عمل‌های min و max یک مشبکه تام است. از این رو مجموعه‌های L - فازی تعمیی از مجموعه‌های فازی هستند. همین طور اگر مشبکه $L = \{(x, y) \in [۰, ۱]^۲ : x + y \leq ۱\}$ را در نظر بگیریم، زیر مجموعه‌های شهودی نیز L - فازی هستند. البته می‌توان درجات عضویت وعدم عضویت مجموعه‌های فازی شهودی را در مشبکه‌ای مانند L در نظر گرفت . در این صورت آن‌ها را مجموعه‌های L - فازی شهودی می‌نامیم.

با برگشت به مجموعه‌های L - فازی تاکید می‌کنیم که عضویت مجموعه‌های اجتماع واشتراک در L به ترتیب با $\vee$ و$\wedge$ مدل‌سازی می‌شوند یعنی: برای هر $u \in U$

$$(A \cup B)(u) = A(u) \vee B(u) \qquad (۲۸)$$

$$(A \cap B)(u) = A(u) \wedge B(u) \qquad (۲۹)$$

مجموعه تمام زیر مجموعه‌های L - فازی U را با L^U نمایش می‌دهیم. به سادگی نشان داده می‌شود که خواص مشبکه L به مجموعه L^U منتقل می‌شود. مثلاً اگر $(L, \vee, \wedge)$ مشبکه‌ای توزیع پذیر و متمم دار یعنی بولی باشد، $(L^U, \cap, \cup, ')$ نیز یک جبر بولی خواهد بود.

۵ مجموعه‌های فازی فاصله‌ای مقدار

مجموعه‌های فازی فاصله‌ای مقدار مستقلاً توسط زاده [۱۴]، گراتان [۷]، جان [۸] وسامبوچ [۱۱] در دهه هفتاد میلادی معرفی شدند. یک مجموعه فازی فاصله‌ای مقدار با یک تابع عضویت فاصله‌ای مقدار تعریف می‌شود. مجموعه‌های فازی فاصله‌ای مقدار حالت خاصی از مجموعه‌های L - فازی هستند و در نتیجه از دیدگاه ریاضی مورد توجه خاصی قرار نمی گیرند.

تعریف ۱.۵. یک مجموعه فازی فاصله‌ای مقدار A از U با یک نگاشت $A : U \longrightarrow I([۰, ۱])$ که در آن $I([۰, ۱])$ مجموعه‌های بسته بازه $[۰, ۱]$ هستند تعریف می‌شود. برای هر $u \in U$ داریم: $A(u) = [A_*(u), A^*(u)]$ بطوری که $A_*(u), A^*(u) \in [۰, ۱]$.

عمل‌های اجتماع، اشتراک ومتمم بطور متعارف به صورت زیر تعریف می‌شوند : برای هر $u \in U$ و هر مجموعه فازی فاصله‌ای مقدار A و B

$$(A \cup B)(u) = [max(A_*(u), B_*(u)), max(A^*(u), B^*(u))] \quad (۳۰)$$

$$(A \cap B)(u) = [min(A_*(u), B_*(u)), min(A^*(u), B^*(u))] \quad (۳۱)$$

$$A^c(u) = [۱ - A^*(u), ۱ - A_*(u)] \quad (۳۲)$$

از تعریف مجموعه‌های فازی شهودی که هم عضویت $\mu_A(u)$ و هم عدم عضویت $\nu_A(u)$ را باشرط $\mu_A(u) + \nu_A(u) \leq ۱$ در نظر میگیرد، می‌توان آن را به یک مجموعه فازی فاصله‌ای مقدار به صورت زیر تبدیل نمود

$$A(u) = [\mu_A(u), ۱ - \nu_A(u)]$$

۶ مجموعه‌های فازی نوع ۲

مفهوم مجموعه‌های فازی نوع ۲ توسط زاده[۱۴] به عنوان تعمیمی از مجموعه‌های فازی اولیه (در این قسمت آن‌ها را مجموعه فازی نوع ۱ می‌نامیم) معرفی شد. این مجموعه‌های فازی مجموعه‌هایی هستند که درجات عضویت، خودشان مجموعه فازی نوع ۱ هستند. این‌ها در موارد وشرایطی بکار میروند که تعیین درجه دقیق عضویت برای یک مجموعه فازی، مشکل یا غیر ممکن باشد. بنابراین این‌ها برای مدل‌سازی مفاهیم زبانی ولغاتی که برای این نوع مفاهیم در دانش زبان شناسی بکار میرود، مورد استفاده قرار میگیرند.

اگر A یک مجموعه فازی نوع ۱ در U باشد، برای هر $u \in U$، $A(u)$ عددی در بازه $[۰, ۱]$ است . در صورتی که اگر $\tilde{A}$ مجموعه فازی نوع ۲ در U باشد، برای هر $u \in U$ ، $\tilde{A}(u)$ زیر مجموعه‌ای فازی از نوع ۱ است که دامنه آن می‌تواند زیر مجموعه‌ای از بازه $[۰, ۱]$ مانند Jباشد. ریاضی وار می‌توان نوشت: $\tilde{A} : U \longrightarrow [۰, ۱]^J$ و برای هر $u \in U$

$$\tilde{A}(u) = f_u(x)$$

که در آن f_u مجموعه‌ای فازی در $J \subseteq [۰, ۱]$ است.

عمل‌های اجتماع، اشتراک ومتمم روی مجموعه‌های فازی نوع ۲ با بکارگیری اصل توصیع به صورت زیر خواهد بود:

$$(\tilde{A} \cup \tilde{B})(u) = \bigvee \{T(f_u(x), g_u(y)) : u = x \vee y\} \quad (۳۳)$$

$$(\tilde{A} \cap \tilde{B})(u) = \bigvee \{T(f_u(x), g_u(y)) : u = x \wedge y\} \quad (۳۴)$$

$$\tilde{A}^c(u) = ۱ - f_u(x) \quad (۳۵)$$

که در آن برای هر $u \in U$، f_u و g_uمجموعه‌هایی فازی در J به ترتیب نظیر $\tilde{A}(u)$ و $\tilde{B}(u)$ هستند. عملگر T میتواند هر نرم مثلثی مناسب باشد و البته عمل های $\vee$ و $\wedge$ روی عناصر $J \subseteq [۰, ۱]$ تعریف می‌شوند و طبیعتاً می‌توانند از میان هم - نرم‌ها و نرم‌های مثلثی هم انتخاب شوند.

مناسب است که در این جا اصل گسترش را یاد آوری نمائیم. این اصل کاربردهای زیادی در تعریف اعمال حسابی روی اعداد فازی دارد که زیر مجموعه‌های فازی از اعداد حقیقی هستند. به طور کلی این اصل می‌تواند دستور العملی باشد که اعمال (توابع) معمولی را به زیر مجموعه‌های فازی تعمیم دهد.

اصل گسترش مجموعه‌های فازی: فرض کنیم A و B دو مجموعه معمولی و f تابعی از A به B باشد . فرض کنیم $\overline{A}$ زیر مجموعه‌ای فازی از A باشد، آنگاه $f(\overline{A})$ زیر مجموعه‌ای از B خواهد به نام $\overline{B}$ و چنین تعریف می‌شود: برای هر $y \in Y$

$$\overline{B}(y) = f(\overline{A})(y) = \bigvee\{\overline{A}(x) : x \in f^{-1}(y)\}$$

منظور از عملگر $\bigvee$ کوچک ترین کران بالا (سوپرمم) ی زیر مجموعه مربوطه از $[0,1]$ است که بنا به اصل تامیت اعداد حقیقی در صورت نا تهی بودن وجود دارد. اگر $f^{-1}(y) = \phi$ آنگاه $\overline{B}(y) = 0$ تعریف میکنیم.

۷ مجموعه‌های فازی مردد

علیرغم تعمیم‌های قبلی نظریه مجموعه‌های فازی که هر یک به طریقی منابع ابهام را مدیریت می‌کنند، تورا [۱۲] تعمیم جدیدی از مجموعه‌های فازی را به نام مجموعه‌های فازی مردد معرفی نمود. انگیزه او برطرف کردن مشکلی مشترک وعمومی است که اغلب وقتی درجه عضویت یک عنصر باید تعیین شود رخ می‌دهد و این مشکل نه بخاطر اشتباهات ولغزش‌های حاشیه‌ای مانند مجموعه‌های فازی شهودی ونه بخاطر اشکال در توزیع امکان مانند مجموعه‌های فازی نوع ۲ است، بلکه بخاطر این است که مقادیر ممکن ومتنوعی برای عضویت وجود دارند که درستی هر کدام مورد شک وتردید قرار میگیرد. این موقعیت، در تصمیم گیری وقتی که یک متخصص درجات مختلفی از عضویت برای یک عنصر مانند x در مجموعه A در نظر میگیرد، بطور معمول ظاهر می‌شود.

مجموعه‌های فازی مردد توجه بسیاری از محققان را در مدتی کوتاه بخاطر وجود حالت‌های مشکوک ومردد که در بسیاری از مسائل دنیای واقعی وجود دارد جلب کرده است. این دیدگاه جدید، عدم قطعیت ناشی از تردید را مدیریت می‌نماید. نگاهی عمیقتر به کارهای تخصصی انجام شده نشان میدهد که رشد سریع نظریه وکاربردهای آن از نقطه نظرهای مختلف کمی وکیفی قابل توجه است. در واقع تردید میتواند ناشی از مدل‌سازی در هر دو مورد باشد. بعلاوه بساری از عملگرها روی این مجموعه‌ها وگسترش آن‌ها طوری تعریف وتعبیر شده اند که کاربردهای مختلفی را در تصمیم گیری رقم میزنند.

تعریف ۱.۷. یک مجموعه فازی مردد A در U را با تابعی مانند h_A نظیر می‌کنیم بطوری که:

$$h_A : U \longrightarrow \mathcal{P}([\text{۰}, \infty]) \tag{۳۶}$$

یعنی برای هر $u \in U$، $h_A(u)$ زیر مجموعه‌ای از بازه $[\text{۰}, \text{۱}]$ است.

در این جا هم مانند گذشته میتوان توجه داشت که h_A تابع عضویت است و با آن درجه عضویت هر عنصر به مجموعه فازی مردد A که میتواند یک زیر مجموعه دلخواه از $[\text{۰}, \text{۱}]$ باشد را مشخص نمود. البته در صورت عدم ابهام می‌توان آن را با خود A هم نشان داد.

چند زیر مجموعه مردد خاص در U عبارتند از:

زیر مجموعه مردد تهی که تابع عضویت آن $h_\phi(u) = \{\text{۰}\}$ برای هر $u \in U$ است
زیر مجموعه مردد پر که تابع عضویت آن $h_F(u) = \{\text{۱}\}$ برای هر $u \in U$ است
زیر مجموعه مردد غفلت (ندانستن) کامل که هر مقداری امکان پذیر است . درنتیجه تابع عضویت آن $h_I(u) = [\text{۰}, \text{۱}]$ برای هر $u \in U$ می‌باشد
زیر مجموعه مردد بی معنی که تابع عضویت آن $h_N(u) = \phi$ برای هر $u \in U$ می‌باشد.

برای این که عمل‌های اصلی را روی مجموعه‌های فازی مردد تعریف کنیم، ابتدا علائم زیر را معرفی می‌کنیم:
اگر A یک مجموعه فازی مردد در U باشد، تابع کران پائین وتابع کران بالا برای هر $u \in U$ را به ترتیب با $h_A^-(u) = min h_A(u)$ و با $h_A^+(u) = max h_A(u)$ نشان می‌دهیم. واضح است که اگر A یک مجموعه فازی مردد باشد، آنگاه زوج توابع h_A^- و $\text{۱} - h_A^+$ تشکیل یک مجموعه فازی شهودی می‌دهند. در ادامه برای راحتی کار دو علامت دیگر معرفی می‌کنیم. برای هر α در فاصله $[\text{۰}, \text{۱}]$

$$h^+_{A_\alpha}(u) = \{h \in h_A(u) : h \geq \alpha\} \tag{۳۷}$$

$$h^-_{A_\alpha}(u) = \{h \in h_A(u) : h \leq \alpha\} \tag{۳۸}$$

که اولی α – کران بالا ودومی α – کران پائین نامیده می‌شوند.

حال مفاهیم اجتماع، اشتراک و متمم را تعریف می‌کنیم:

تعریف ۲.۷. فرض کنیم A و B دو مجموعه فازی مردد در U باشند. تابع عضویت مجموعه فازی مردد $A \cup B$ را با $h_{A\cup B} = h_A \cup h_B$ نمایش داده وتعریف می‌کنیم:

$$(h_A \cup h_B)(u) = \{h \in h_A(u) \cup h_B(u) : h \geq max(h_A^-(u), h_B^-(u))\}$$

یا معادل با آن

$$(h_A \cup h_B)(u) = (h_A(u) \cup h_B(u))_\alpha^+,\ \alpha = max(h_A^-(u), h_B^-(u))$$

متشابهاً تابع عضویت اشتراک آن‌ها به صورت زیر تعریف می‌شود:

تعریف ۳.۷.

$$(h_A \cap h_B)(u) = \{h \in h_A(u) \cup h_B(u) : h \leq min(h_A^+(u), h_B^+(u))\}$$

یا معادل با آن

$$(h_A \cap h_B)(u) = (h_A(u) \cup h_B(u))_\alpha^-,\ \alpha = min(h_A^+(u), h_B^+(u))$$

متمم یک مجموعه فازی مردد A در U با تابع عضویت h_A را تعریف می‌کنیم:

تعریف ۴.۷. $h_A^c(u) = h_{A^c}(u) = \bigcup_{\gamma\in h_A(u)}\{۱ - \gamma\}$

اگر A یک مجموعه فازی شهودی باشد که با $A = \{(\mu_A(u), \nu_A(u)) : u \in U\}$ نمایش داده شده باشد، مجموعه فازی مردد B وابسته به آن چنین تعریف می‌شود:

$$h_B(u) = [\mu_A(u), ۱ - \nu_A(u)]$$

با این شرط که $\mu_A(u) \neq ۱ - \nu_A(u)$.

برعکس آن یعنی ساختن یک مجموعه فازی شهودی از یک مجموعه فازی مردد به آسانی روش فوق نیست. در این ارتباط ابتدا تعریف زیر را ارائه میدهیم:

تعریف ۵.۷. فرض کنیم h_A یک مجموعه فازی مردد در U باشد. مجموعه فازی شهودی B را به عنوان پوش h_A تعریف می‌کنیم. این مجموعه با علامت $h_{A_{env}}$ نشان داده می‌شود و عبارت است از

$$B = h_{A_{env}} = \{(\mu_{A_{env}}(u), \nu_{A_{env}}(u)) : u \in U\}$$

که در آن

$$\mu_{A_{env}}(u) = h_A^-(u) \text{ و } \nu_{A_{env}}(u) = ۱ - h_A^+(u)$$

ارتبا ط بین اجتماع، اشتراک ومتمم مجموعه‌های فازی مردد با پوش آن‌ها را می‌توان به راحتی در صورت نیاز بدست آورد.

در این جا بهمین مختصر اکتفا کرده و به یکی از جدیدترین تعمیم‌های مجموعه‌های فازی می‌پردازیم.

۸ مجموعه‌های نوتروسوفیک

ساماراندج درجه عضویت نامعینی را به عنوان یک مولفه مستقل درمقاله سال ۱۹۹۵ خود که در سال ۱۹۹۸ چاپ شد مطرح نمود[۱۰].

او درفلسفه با مسئله تشخیص بین درستی مطلق ودرستی نسبی، نادرستی مطلق ونادرستی نسبی در منطق وعضویت مطلق وعضویت نسبی یا عدم عضویت مطلق وعدم عضویت نسبی در نظریه مجموعه‌ها مواجه شده بود. سپس با الهام از مسابقات ورزشی (برنده، بازنده، مساوی)، رای گیری (موافق، مخالف، ممتنع)، جواب دادن (بلی، خیر، نمیدانم)، تصمیم گیری وکنترل (تصمیم، عدم تصمیم، مشکوک) و پذیرش (قبول، مردود، تعلیق) وبا توجه به این که قانون رد شق ثالث را در منطق‌های جدید نمی توان بکار برد، او آنالیز غیر استاندارد را با منطق سه ارزشی، نظریه مجموعه‌ها، نظریه احتمال و فلسفه ترکیب نمود. هر چند از دیدن پارادکس‌ها در علوم و هنر و همین طور از فراسازگاری و عدم تامیت در دانش‌های مختلف هیجان زده می‌شد، ولی این سوال برایش مطرح بود که چگونه با آن‌ها مواجه شود وآیا راهی برای اتحاد آن‌ها وجود دارد؟

ساماراناداج اصطلاح نوتروسوفیک را پیشنهاد نمود چرا که از ریشه نوتروسوفی ترکیبی از neutre فرانسوی یا لاتین آن neutral به معنی خنثی و sophia یونانی به معنی عقل ومهارت است . در نتیجه نوتروسوفی به معنی " دانش تفکر خنثی" خواهد بود. با توجه به این معنی و بکار گیری اصطلاح خنثی در کنار مولفه‌های درستی (عضویت) و نادرستی (عدم عضویت) ،تفاوت آن با فازی وفازی شهودی مشخص می‌گردد.

در این جا مناسب است که توضیح مختصری در مورد آنالیز غیر استاندارد داده شود. در سالهای ۱۹۶۰ آبراهام رابینسون [۱۳] آنالیز غیر استاندارد را به عنوان صورتی از آنالیز و شاخه‌ای از منطق که در آن بینهایت کوچک‌ها دقیقاً تعریف می‌شوند، بوجود آورد. بطور غیر رسمی یک بینهایت کوچک عددی بینهایت کوچک است. وبه طور رسمی a بینهایت کوچک نامیده می‌شود اگر وتنها اگر برای تمام اعداد صحیح ومثبت n داشته باشیم $|x| \leq \frac{۱}{n}$. فرض کنیم $\varepsilon > ۰$ یک این چنین عدد بینهایت کوچکی باشد. مجموعه اعداد حقیقی توسعه یافته، گسترشی از مجموعه اعدادحقیقی است که شامل رده اعداد بینهایت و رده اعداد بینهایت کوچک است. اگر اعداد متناهی غیر استاندارد $۱^+ = ۱ + \varepsilon$ را در نظر بگیریم که ۱ قسمت استاندارد و ε قسمت عیر استاندارد باشد و همین طور $۰^- = ۰ - \varepsilon$ به طوری که ۰ قسمت استاندارد و ε قسمت غیر استاندار باشد، آنگاه

$]^-۰, ۱^+[$ را بازه واحد غیر استاندارد می‌نامیم. واضح است که ۰ و۱ و همین طور اعداد غیر استاندارد بینهایت کوچک کمتر از ۰ و اعدادبیهایت کوچک ولی بیشتر از ۱ به این بازه واحد غیر استاندارد تعلق دارند.

حال به تعریف مجموعه‌های نوتروسوفیک می‌پردازیم:

تعریف ۱.۸. یک مجموعه نوتروسوفیک A در U با سه تابع I_A, T_A و F_A به ترتیب با نام‌های تابع درستی عضویت، نامعینی عضویت و نادرستی عضویت مشخص می‌شود. برای هر $u \in U$ مقادیر $I_A(u), T_A(u)$ و $F_A(u)$ زیر مجموعه‌هایی از اعداد حقیقی استاندارد یا غیر استاندارد $]^-۰, ۱^+[$ هستند یعنی:

$$T_A : U \longrightarrow]^-۰, ۱^+[$$
$$I_A : U \longrightarrow]^-۰, ۱^+[$$
$$I_A : U \longrightarrow]^-۰, ۱^+[$$

هیچ محدودیتی روی حاصل جمع $I_A(u), T_A(u)$ و $F_A(u)$ وجود ندارد و در نتیجه:

$$^-۰ \leq supT_A(u) + supI_A(u) + F_A(u) \leq ۳^+$$

روی مجموعه‌های نوتروسوفیک نیز می‌توان اعمال وروابط اصلی را تعریف نمود.

تعریف ۲.۸. فرض کنیم A یک مجموعه نوتروسوفیک در U باشد. متمم آن A^c یک مجموعه نوتروسوفیک در U با مولفه‌های زیر است: برای هر $u \in U$

[13] Abraham Robinson

$$T_{A^c}(u) = \{۱^+\} - T_A(u)$$
$$I_{A^c}(u) = \{۱^+\} - I_A(u)$$
$$F_{A^c}(u) = \{۱^+\} - F_A(u)$$

که در آن منظور از $\{۱^+\} - S = \{x : x = ۱^+ - s, s \in S\}$ برای هر زیر مجموعه استاندارد یا غیر استاندارد S.

تعریف ۳.۸. مجموعه‌های نوتروسوفیکA و B مفروضند. A زیر مجموعه B است و می‌نویسیم $A \subseteq B$ اگر وتنها اگر برای هر $u \in U$

$$infT_A(u) \le infT_B(u), supT_A(u) \le supT_B(u)$$
$$infF_A(u) \ge infF_B(u), supF_B(u) \ge supF_B(u)$$

تعریف ۴.۸. اجتماع دو مجموعه نوتروسوفیک A و B مجموعه نوتروسوفیک C است که با $C = A \cup B$ نمایش می‌دهیم ومولفه‌های آن به شرح زیر است: برای هر $u \in U$

$$T_C(u) = T_A(u) + T_B(u) - T_A(u) \cdot T_B(u)$$
$$I_C(u) = I_A(u) + I_B(u) - I_A(u) \cdot I_B(u)$$
$$F_C(u) = F_A(u) + F_B(u) - F_A(u) \cdot I_B(u)$$

تعریف ۵.۸. اشتراک دو مجموعه نوتروسوفیک A و B مجموعه نوتروسوفیک Dاست که با $D = A \cup B$ نمایش می‌دهیم ومولفه‌های آن به شرح زیر است: برای هر $u \in U$

$$T_D(u) = T_A(u) \cdot T_B(u)$$
$$I_D(u) = I_A(u) \cdot I_B(u)$$
$$F_D(u) = F_A(u) \cdot F_B(u)$$

جمع وضرب در تعریف‌های فوق همان جمع وضرب در مجمحوعه‌های استاندارد یا غیر استاندارد هستند مانند:

$$S_۱ + S_۲ = \{s_۱ + s_۲ : s_۱ \in S_۱, s_۲ \in S_۲\}$$
$$S_۱ - S_۲ = \{s_۱ - s_۲ : s_۱ \in S_۱, s_۲ \in S_۲\}$$
$$S_۱ \cdot S_۲ = \{s_۱ \cdot s_۲ : s_۱ \in S_۱, s_۲ \in S_۲\}$$

همچنان که ملاحظه می‌شود در تعریف اجتماع و اشتراک اعمالی کاملاً شبیه نرم وهم – نرم مثلثی حاصل ضرب بکار برده شده است. بنابر این تعمیم عملگرهای نرم وهم – نرم به مجموعه واحد غیر استاندارد $]^{-}\circ, \text{۱}^{+}[$ را می‌توان مورد مطالعه قرار داد.

در پایان مجموعه نوتروسوفیک تک عضوی که بیشتر مورد نظرعلاقمندان نظریه علوم کامپیوتر، نظریه تصمیم گیری بوده واز نظر کاربردی به مراتب واضح تر وآسان تر است را تعریف می‌نمائیم:

تعریف ۶.۸. یک مجموعه نوتروسوفیک تک عضوی مانند A در U مجموعه نوتروسوفیکی است که تمام مولفه‌ای آن در بازه استاندارد $[\circ, \text{۱}]$ قرار بگیرند یعنی: برای هر $u \in U$

$$T_A(u), I_A(u), F_A(u) \in [\circ, \text{۱}]$$

۹ نتیجه گیری

همان طور که ملاحظه می‌شود مرور مختصری بر نظریه مجموعه‌ها و اعمال اصلی حاکم بر آن‌ها انجام شد. تاکید، بیشتر بر تعمیم‌های مختلف مجموعه‌های فازی است. تعدادی از مهمترین آن‌ها مانند مجموعه‌های فازی شهودی، فازی فاصله‌ای مقدار، فازی مردد ونوتروسوفیک را مرور کردیم. بطور نه چندان مفصل رابطه آن‌ها واین که کدام تعمیم دیگری است را بیان کردیم . هرکدام از این‌ها عنوان مقالات وکتاب‌های زیادی هستند که فقط قطره‌ای از دریای آن به عنوان مرجع آورده شده است. تعمیم‌های مهم دیگری مانند مجموعه‌های مبهم، مات، فازی خشن، فازی نرم، نرم فازی و خشن فازی وجود دارند که باید در فرصت‌های دیگر به آنها پرداخته شود. هر کدام از این نظریه‌ها منطق خاص خودشان را ایجاد می‌کنند که می‌تواند تعمیمی از دیگری باشد. این منطق‌ها کاربردهای فراوانی در علوم مختلف از علوم مهندسی گرفته تا علوم انسانی دارند. شاید بیشترین و مهمترین کاربردها در زمینه مسائل تصمیم گیری در فضاهای مبهم، نامطمئن و پیچیده است. برای اطلاع بیشتر از اعمال روی مجموعه‌های فازی، فازی و چند کاربرد آن می‌توان به کتاب فارسی [۱] مراجعه نمود.

در این مقاله در مورد کاربردها به علت فوق العاده طولانی شدن بحث نشده است. امید است که همکاران دانشمند زحمت انجام این مهم و تفصیل موضوعات گفته شده را عهده‌دار شوند.

مراجع

[۱] اسلامی، اسفندیار (۱۳۹۱) *منطق فازی وکاربردهای آن*، انتشارات دانشگاه شهید باهنر کرمان

[2] Atanassov, K.T. (1986), Intuitionistic Fuzzy Sets, *Fuzzy Sets and Systems*,**20**, 87-96.

[3] Atanassov, K.T. (2012), *On Intuitionistic Fuzzy Sets Theory*, Springer-Verlag Heidelberg.

[4] Brown, J.G. (1971), A note on fuzzy sets, Information and Control, 18 (1) 32-39.

[5] Gentilhomme, Y (1968), Les ensembles flous en linguistique. Cahiers Linguistiqutique Theoretique Appliqee 5,pp.47-63.

[6] Goguen, J. (1967) L-fuzzy Sets. J Math Analysis and Applications 18(1), 145–174.

[7] I. Grattan-Guiness, Fuzzy membership mapped onto interval and many-valued quantities. Z. Math. Logik. Grundladen Math. 22 (1975), 149-160.

[8] K. U. Jahn, Intervall-wertige Mengen, Math.Nach. 68, 1975, 115-132.

[9] Moore, Ramon E (1966), Interval Analysis, Prentice - Hall, Englewood. Cliffs, N.J.

[10] Samarandche, F. Neutrosophy, Neutosophic Probability, Sets and Logic, Amer. Res. Press, Rehoboth, 2006.

[11] R. Sambuc, Fonctions ϕ-floues. Application l'aide au diagnostic en pathologie thyroidienne, Ph. D. Thesis, Univ. Marseille, France, 1975.

[12] Torra V., (2010) Hesitant fuzzy sets. *Int J Intell Syst*;25(6):529–539.

[13] Zadeh, L.A. (1965) Fuzzy sets, *Information and Control*8,**3**,338-353

[14] Zadeh, L.A., The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning- I, *Inform. Sci.* 8(1975), 199–249.