

معیارهای فاصله و شباهت برای مجموعه‌های فازی و برخی از توسعه‌های آن

کامران رضایی و حسن رضایی

دانشگاه سیستان و بلوچستان، دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر، گروه علوم کامپیوتر

چکیده

پس از معرفی مجموعه‌های فازی توسط زاده، این مجموعه‌ها مورد توجه بسیاری از محققان قرار گرفت و توسعه‌های متعددی از آنها معرفی شد. به عنوان نمونه، می‌توان به مجموعه‌های فازی نوع ۲، مجموعه‌های فازی بازه مقدار، مجموعه‌های فازی شهودی و مجموعه‌های فازی مردد اشاره کرد. با توجه به کاربردهای متعدد این مجموعه‌ها در زمینه‌های مختلف و همچنین با توجه به اهمیت معیارهای فاصله و شباهت در زمینه‌هایی همچون تصمیم‌گیری، تشخیص الگو، داده‌کاوی و غیره، بررسی این معیارها برای مجموعه‌های فازی و توسعه‌های آن، امری حائز اهمیت است. از اینرو، در این مقاله به بررسی برخی از معیارهای فاصله و شباهت معرفی شده برای این مجموعه‌ها پرداخته شده است.

۱ سرآغاز

بسیاری از ابزارهای سنتی برای مدل‌سازی، استدلال و محاسبات، قطعی و دقیق هستند. به عنوان مثال، در منطق دودویی، یک عبارت می‌تواند درست یا نادرست باشد. در نظریه مجموعه‌ها، یک عنصر می‌تواند به یک مجموعه تعلق داشته یا نداشته باشد. اما، در در دنیای واقعی، بسیاری از عبارات و کلمات کلیدی: مجموعه فازی، مجموعه فازی نوع ۲، مجموعه فازی بازه مقدار، مجموعه فازی شهودی، مجموعه فازی مردد

مسائل شامل عدم قطعیت و ابهام بوده به گونه‌ای که نظریه مجموعه‌های کلاسیک قادر به برخورد با آنها نیست. از اینرو، لطفی عسکر زاده^۱ در سال ۱۹۶۵، مفهوم مجموعه‌های فازی (FSS)^۲ را معرفی کرد [۲۸]. در واقع، در یک مجموعه فازی، هر عضو با یک درجه عضویت که مقداری از بازه $[0, 1]$ می‌باشد، به مجموعه تعلق دارد.

پس از معرفی مجموعه‌های فازی، این مجموعه‌ها مورد توجه بسیاری از محققان قرار گرفت و توسعه‌های متنوعی از آنها ارائه شد. به عنوان مثال، زاده در [۲۹] مفهوم مجموعه فازی نوع ۲ (T2FS)^۳ را به عنوان توسعه‌ای از مجموعه‌های فازی معمولی (مجموعه‌های فازی نوع ۱) معرفی کرد. در حقیقت، یک مجموعه فازی نوع ۲، یک مجموعه فازی است که درجه‌های عضویت آن مجموعه‌های فازی نوع ۱ بر بازه $[0, 1]$ می‌باشند. در [۲۹]، همچنین مفهوم مجموعه‌های فازی بازه مقدار (IVFSS)^۴ نیز معرفی شد. در یک مجموعه فازی بازه مقدار، هر عضو مجموعه، می‌تواند با یک درجه عضویت بازه‌ای که در واقع زیربازه‌ای از $[0, 1]$ است به مجموعه تعلق داشته باشد. در سال ۱۹۸۶، آتاناسوف^۵، توسعه‌ای دیگر از مجموعه‌های فازی را تحت عنوان مجموعه‌های فازی شهودی (IFSs)^۶ معرفی کرد [۱]. در یک مجموعه فازی شهودی، هر عضو مجموعه می‌تواند با یک درجه عضویت و یک درجه عدم عضویت که مقادیری از بازه $[0, 1]$ هستند به مجموعه تعلق داشته باشد. تورا^۷، و ناروکاوا^۸، در سال ۲۰۰۹ و تورا در سال ۲۰۱۰، با توجه به این نکته که ممکن است مجموعه‌ای از مقادیر به عنوان درجه عضویت یک عضو در یک مجموعه وجود داشته باشد، مفهوم مجموعه‌های فازی مردد (HFSS)^۹ را معرفی کردند [۱۹، ۲۰]. همان‌طور که بیان شد، در یک مجموعه فازی مردد، هر عضو مجموعه می‌تواند با در نظر گرفتن مجموعه‌ای از درجه‌های عضویت که مقادیری از بازه $[0, 1]$ می‌باشند، متعلق به مجموعه باشد.

¹L. A. ZADEH

²Fuzzy Sets

³Type-2 Fuzzy Set

⁴Interval-Valued Fuzzy Sets

⁵Atanassov

⁶Intuitionistic Fuzzy Sets

⁷Torra

⁸Narukawa

⁹Hesitant Fuzzy Sets

فاصله و شباهت، مفاهیمی حیاتی در بسیاری از کاربردهای علمی هستند. معیارهای اندازه‌گیری فاصله و شباهت، در زمینه‌های مختلف همچون تصمیم‌گیری، تشخیص الگو، یادگیری ماشین و پیش‌بینی بازار، به شدت مورد نیاز هستند. با توجه به اهمیت این معیارها، تحقیقات متعددی به بررسی و معرفی معیارهای فاصله و شباهت برای مجموعه‌های فازی و توسعه‌های آنها پرداخته‌اند. به عنوان مثال، در [۵]، دو روش برای تعریف فاصله بین مجموعه‌های فازی ارائه شده است که یکی از آنها در [۱۴] بهبود یافته است. در [۲۷]، تعاریف اصلی معیارهای فاصله و شباهت برای مجموعه‌های فازی ارائه شده و همچنین روابط بین این معیارها مورد بررسی قرار گرفته است. در [۱۲] چندین معیار شباهت برای مجموعه‌های فازی ارائه شده است. در [۳]، یک فاصله هاسدورف بهبود یافته برای مجموعه‌های فازی ارائه شده است. در [۸]، معیار فاصله و شباهت جدیدی برای مجموعه‌های فازی نوع ۲ ارائه شده. در [۱۶]، با در نظر گرفتن تابع حاشیه واریانس برای مجموعه‌های فازی نوع ۲، معیارهای فاصله جدیدی برای این مجموعه‌ها معرفی شده است. در [۱۸]، با ارائه یک نمایش هندسی برای مجموعه‌های فازی شهودی، معیارهایی برای اندازه‌گیری فاصله بین این مجموعه‌ها تعریف شده‌اند. در [۲۲]، معیارهای فاصله و شباهت بهبود یافته‌ای برای مجموعه‌های فازی شهودی ارائه شده است. در [۱۳] چند معیار شباهت جدید برای مجموعه‌های فازی شهودی ارائه شده است. در [۲۵]، مروری جامع از معیارهای فاصله و شباهت برای مجموعه‌های فازی شهودی ارائه شده و همچنین، براساس معیارهای فاصله همینگ وزن‌دار، اقلیدسی وزن‌دار و هاسدورف وزن‌دار، برخی از معیارهای فاصله و شباهت پیوسته برای این مجموعه‌ها معرفی شده است. در [۲۶]، معیارهای فاصله متنوعی برای مجموعه‌های فازی مردد ارائه شده است. در [۳۱]، با تعریف یک اندیس تردید جدید برای مجموعه‌های فازی مردد، روش‌های جدید برای اندازه‌گیری فاصله و شباهت برای این مجموعه‌ها معرفی شده است.

با توجه به مطالب فوق، واضح است که معیارهای فاصله و شباهت اهمیت فراوانی برای محققین دارند. از اینرو، در این مقاله، تعاریف پایه‌ای مجموعه‌های فازی، فازی بازه مقدار، فازی نوع ۲، فازی شهودی و فازی مردد و همچنین برخی از معیارهای فاصله و شباهت معرفی شده برای این مجموعه‌ها مورد بررسی قرار گرفته است.

سازمان‌دهی این مقاله به شرح زیر است:

در بخش ۲، تعاریف مورد نیاز از مجموعه‌های فازی و برخی از توسعه‌های آنها بررسی شده است. در بخش ۳، برخی از معیارهای فاصله و شباهت برای این مجموعه‌ها مورد بررسی قرار گرفته است. سرانجام، بخش ۴ به نتیجه‌گیری اختصاص یافته است.

۲ مجموعه‌های فازی و برخی از توسعه‌های آنها

در این بخش، تعاریف پایه‌ای از مجموعه‌های فازی و برخی از توسعه‌های آنها ارائه می‌شوند.

۱.۲ مجموعه‌های فازی

با استفاده از مجموعه‌های فازی، می‌توان مفاهیم مبهمی همچون “دمای زیاد”، “مرد جوان” و “ارتفاع زیاد” را به صورت رسمی تعریف نمود. با فرض اینکه X یک مجموعه شامل عناصر (اشیاء) تحت عنوان مجموعه مرجع باشد، یک مجموعه فازی همچون A در X به صورت زیر تعریف می‌شود:

تعریف ۱.۲. [۲۸] مجموعه فازی A در X به شکل زیر نمایش داده می‌شود:

$$A = \{ \langle x, \mu_A(x) \rangle \mid x \in X \} \quad (1)$$

که $\mu_A : X \rightarrow [0, 1]$ تابع عضویت مجموعه فازی A نامیده شده و به هر عضو $x \in X$ درجه عضویت آن را در مجموعه A نسبت می‌دهد.

می‌توان سه حالت زیر را برای درجه عضویت $x \in X$ در مجموعه A در نظر گرفت [۱۵]:

۱. $\mu_A(x) = 1$: به معنای عضویت کامل x در مجموعه فازی A می‌باشد.

۲. $\mu_A(x) = 0$: به معنای عدم عضویت x در مجموعه فازی A می‌باشد.

۳. $0 < \mu_A(x) < 1$: به معنای عضویت جزئی x در مجموعه فازی A می‌باشد.

مثال ۲.۲. [۱۵] با فرض اینکه $X = \mathbb{N}$ مجموعه اعداد طبیعی باشد، می‌توان مجموعه اعداد طبیعی "نزدیک به عدد ۷" را با تعریف مجموعه فازی $A \subseteq X$ به صورت زیر نشان داد:

$$A = \frac{0.2}{4} + \frac{0.5}{5} + \frac{0.8}{6} + \frac{1}{7} + \frac{0.8}{8} + \frac{0.5}{9} + \frac{0.2}{10} \quad (2)$$

مثال ۳.۲. [۱۵] با فرض اینکه $X = \mathbb{R}$ مجموعه اعداد حقیقی باشد، می‌توان با در نظر گرفتن یک تابع عضویت به شکل $\mu_A(x) = \frac{1}{1+(x-7)^2}$ ، مجموعه اعداد حقیقی "نزدیک به عدد ۷" را به صورت مجموعه فازی تعریف شده در معادله ۵ نشان داد.

$$A = \int_X \frac{[1 + (x - 7)^2]^{-1}}{x} \quad (3)$$

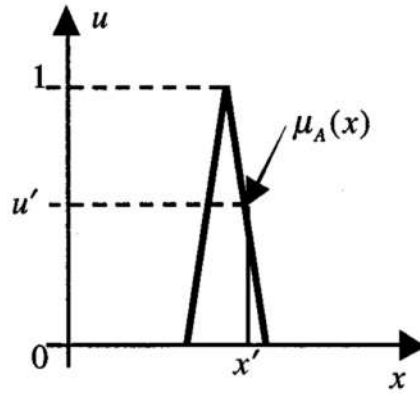
۲.۲ مجموعه‌های فازی نوع ۲

پس از معرفی مجموعه‌های فازی، توسعه‌ای از آنها تحت عنوان مجموعه‌های فازی نوع ۲ توسط زاده معرفی شد. در حقیقت، مجموعه فازی نوع ۲، یک مجموعه فازی است که درجه‌های عضویت آن مجموعه‌های فازی نوع ۱ بر بازه $[0, 1]$ می‌باشند.

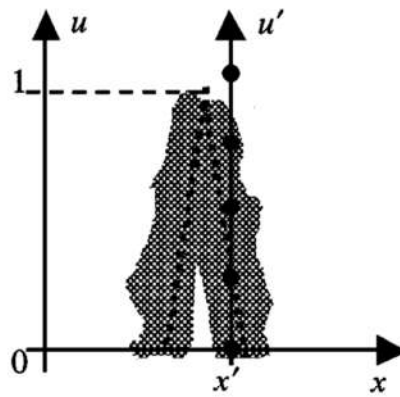
با توجه به تعاریف ارائه شده در [۱۰] می‌توان مجموعه‌های فازی نوع ۲ را به صورت زیر توصیف کرد:

شکل ۱ (الف) یک تابع عضویت نوع ۱ را نشان می‌دهد. با تغییر مکان نقاط قرار گرفته روی مثلث به سمت راست یا چپ، تابع عضویت نوع ۱ تیره شده، همچون شکل ۱ (ب) تشکیل می‌شود. حال، به ازای یک مقدار خاص از x همچون x' ، تابع عضویت می‌تواند هر مقداری از خط عمود را که در ناحیه تیره شده قرار گرفته است، اختیار کند. با انجام این عمل برای هر $x \in X$ ، یک تابع عضویت درجه ۲ ساخته خواهد شد که یک مجموعه فازی نوع ۲ را مشخص می‌کند.

تعریف ۴.۲. [۱۰] یک مجموعه فازی نوع ۲ همچون \tilde{A} ، با یک تابع عضویت نوع ۲، مانند $\mu_{\tilde{A}}(x, u)$ که $x \in X$ و $u \in J_x \subseteq [0, 1]$ می‌باشند مشخص می‌شود. بنابراین، می‌توان \tilde{A} را



(الف)



(ب)

شکل ۱: (الف) تابع عضویت نوع ۱ و (ب) تابع عضویت نوع ۱ تیره شده، شامل گسسته‌سازی به ازای $x = x'$

به صورت زیر نمایش داد:

$$\tilde{A} = \{((x, u), \mu_{\tilde{A}}(x, u)) | \forall x \in X, \forall u \in J_x \subseteq [0, 1]\} \quad (۴)$$

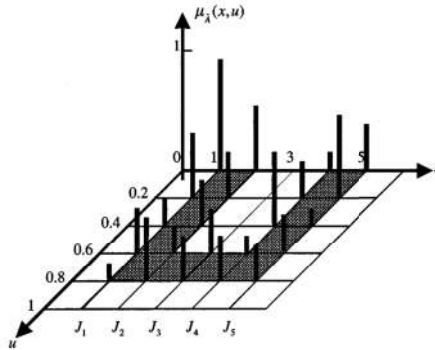
که $0 \leq \mu_{\tilde{A}}(x, u) \leq 1$ می‌باشد. این مجموعه فازی نوع ۲ را به شکل زیر نیز می‌توان نمایش

داد:

$$\tilde{A} = \int_{x \in X} \int_{u \in J_x} \mu_{\tilde{A}}(x, u) / (x, u), \quad J_x \subseteq [0, 1] \quad (5)$$

که $\int \int$ نشان دهنده اجتماع بر تمامی x و u -های قابل قبول می‌باشد. در صورتی که مجموعه مرجع یک مجموعه گسسته باشد، نماد \int با نماد \sum جایگزین می‌شود.

مثال ۵.۲. با فرض اینکه $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ و $U = \{0, 0/2, 0/4, 0/6, 0/8\}$ باشد، شکل ۲، $\mu_{\tilde{A}}(x, u)$ را برای x و u گسسته نشان می‌دهد.



شکل ۲: مثالی از یک تابع عضویت درجه ۲

تعریف ۶.۲. [۱۰] برای هر مقدار از x (همچون $x = x'$), صفحه‌ای ۲-بعدی که محورهای آن u و $\mu_{\tilde{A}}(x', u)$ هستند، یک برش عمودی از $\mu_{\tilde{A}}(x, u)$ نامیده می‌شود. یک تابع عضویت ثانویه، یک برش عمودی از $\mu_{\tilde{A}}(x, u)$ است. بنابراین، یک تابع عضویت ثانویه، عبارت است از $\mu_{\tilde{A}}(x = x', u)$ برای $x \in X$ و $J_{x'} \subseteq [0, 1]$ که به صورت معادله ۶ نشان داده می‌شود:

$$\mu_{\tilde{A}}(x = x', u) \equiv \mu_{\tilde{A}}(x') = \int_{u \in J_{x'}} f_{x'}(u)/u, \quad J_{x'} \subseteq [0, 1] \quad (6)$$

که $0 \leq f_{x'}(u) \leq 1$. از آنجایی که این تعریف به ازای هر $x' \in X$ ارائه شده، تابع $\mu_{\tilde{A}}(x)$ عضویت ثانویه در نظر گرفته می‌شود. در حقیقت، تابع عضویت ثانویه، یک مجموعه فازی نوع ۱ است و تحت عنوان یک مجموعه ثانویه نیز به آن اشاره می‌شود.

براساس مفهوم مجموعه ثانویه، یک مجموعه فازی نوع ۲ را می‌توان به صورت اجتماع تمام مجموعه‌های ثانویه نمایش داد. به عنوان مثال، به روش برش عمودی، می‌توان \tilde{A} را به صورت

معادله ۷ یا معادله ۸ نشان داد:

$$\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) | \forall x \in X\} \quad (۷)$$

$$\tilde{A} = \int_{x \in X} \mu_{\tilde{A}}(x)/x = \int_{x \in X} \left[\int_{u \in J_x} f_x(u)/u \right] / x, \quad J_x \subseteq [0, 1] \quad (۸)$$

تعریف ۷.۲. [۱۰] دامنه یک تابع عضویت ثانویه، عضویت اولیه x نامیده می‌شود. در معادله ۸، J_x عضویت اولیه x نامیده شده و برای هر $x \in X$ ، $J_x \subseteq [0, 1]$ می‌باشد.

تعریف ۸.۲. [۱۰] مقدار یک تابع عضویت ثانویه، درجه ثانویه نامیده می‌شود. در معادله ۸، $f_x(u)$ یک درجه ثانویه و در معادله ۴، $\mu_{\tilde{A}}(x', u')$ ($x' \in X, u' \in J_{x'}$) یک درجه ثانویه است.

تعریف ۹.۲. [۱۰] عدم قطعیت موجود در عضویت اولیه مجموعه فازی نوع ۲، شامل یک ناحیه محدود است که با عنوان ردپای عدم قطعیت (FOU)^{۱۰} شناخته می‌شود. در واقع، عبارت است از اجتماع تمام عضویت‌های اولیه: $FOU(\tilde{A}) = \bigcup_{x \in X} J_x$.

تعریف ۱۰.۲. [۱۰] یک مجموعه فازی نوع ۱ نیز می‌تواند به صورت یک مجموعه فازی نوع ۲ نمایش داده شود. نمایش نوع ۲ یک مجموعه فازی نوع ۱، به صورت $(1/\mu_F(x))/x$ یا $1/\mu_F(x)$ برای هر $x \in X$ می‌باشد. نماد $1/\mu_F(x)$ به معنای این است که تابع عضویت ثانویه تنها یک مقدار دامنه خود دارد، یعنی درجه عضویت اولیه $\mu_F(x)$ که درجه ثانویه برابر با ۱ می‌باشد.

مثال ۱۱.۲. [۱۵] به عنوان مثال، با در نظر گرفتن $X = \{1, 2, 3\}$ ، $J_{x_1} = \{0.2, 0.5, 0.7\}$ ، $J_{x_2} = \{0.5, 1\}$ و $J_{x_3} = \{0.1, 0.3, 0.5\}$ و با نسبت دادن درجه ثانویه مناسب به اعضای مجموعه‌های J_{x_1} ، J_{x_2} و J_{x_3} می‌توان یک مجموعه فازی نوع ۲ به شکل زیر تعریف کرد:

$$\tilde{A} = \frac{\frac{0.5}{0.2} + \frac{1}{0.5} + \frac{0.5}{0.7}}{1} + \frac{\frac{0.5}{0.5} + \frac{1}{1}}{2} + \frac{\frac{0.5}{0.1} + \frac{1}{0.3} + \frac{0.5}{0.5}}{3} \quad (۹)$$

¹⁰Footprint Of Uncertainty

۳.۲ مجموعه‌های فازی بازه مقدار

در بسیاری از کاربردهای دنیای واقعی، اختصاص یک مقدار از بازه $[0, 1]$ به عنوان درجه عضویت برای یک عضو، امری مشکل بوده و در نظر گرفتن یک بازه به عنوان درجه عضویت مطلوب‌تر به نظر می‌رسد. از اینرو، زاده مفهوم مجموعه‌های فازی بازه مقدار را به عنوان توسعه‌ای از مجموعه‌های فازی نوع ۱ معرفی کرد. با توجه به تعریفی که در [۶] ارائه شده است، می‌توان مجموعه فازی بازه مقدار را به صورت زیر توصیف کرد:

تعریف ۱۲.۲. [۶] یک مجموعه فازی بازه مقدار همچون A بر مجموعه مرجع X ، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A \triangleq \{(x, [\mu_A^L(x), \mu_A^U(x)])\}, \quad x \in X \quad (10)$$

$$\mu_A^L, \mu_A^U : X \rightarrow [0, 1]; \quad \forall x \in X, \mu_A^L(x) \leq \mu_A^U(x) \quad (11)$$

با تعریف $\bar{\mu}_A(x)$ به صورت $[\mu_A^L(x), \mu_A^U(x)]$ ، و همچنین با فرض اینکه $D[0, 1]$ خانواده تمام بازه‌های بسته در بازه $[0, 1]$ باشد، برای هر $x \in X$ ، $\bar{\mu}_A(x) \in D[0, 1]$ خواهد بود. بنابراین، عبارت ۱۰ به شکل زیر تبدیل خواهد شد:

$$A \triangleq \{(x, \bar{\mu}_A(x))\}, \quad \bar{\mu}_A : X \rightarrow D[0, 1], \quad x \in X \quad (12)$$

بنابراین، بازه $[\mu_A^L(x), \mu_A^U(x)]$ به عنوان درجه عضویت به عضو $x \in X$ اختصاص می‌یابد. همان‌طور که از تعریف فوق پیداست، یک مجموعه فازی بازه مقدار، توسط محدودیت‌های پایین و بالای μ_A^L و μ_A^U از تابع عضویت آن نمایش داده می‌شود.

مثال ۱۳.۲. به عنوان مثال، با در نظر گرفتن $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ و اختصاص یک زیر بازه از بازه $[0, 1]$ به هریک از اعضای مجموعه X به عنوان درجه عضویت آنها، می‌توان یک مجموعه

فازی بازه مقدار به شکل زیر در نظر گرفت:

$$A = \{(x_1, [0.2, 0.5]), (x_2, [0.8, 1]), (x_3, [0.3, 0.5])\} \quad (13)$$

۴.۲ مجموعه‌های فازی شهودی

در اواسط دهه ۱۹۸۰، آتاناسوف مفهوم مجموعه فازی شهودی را معرفی کرد. برخلاف مجموعه‌های فازی نوع ۱، که در آنها عدم قطعیت تنها با در نظر گرفتن درجه عضویت، مدل‌سازی می‌شود، در یک مجموعه فازی شهودی، برای هر عضو، درجه عضویت و درجه عدم عضویت که هر دو اعدادی از بازه $[0, 1]$ بوده و مجموع آنها لزوماً برابر با ۱ نمی‌باشد، در نظر گرفته می‌شوند. تعریف ۱۴.۲. [۱] یک مجموعه فازی شهودی همچون A در مجموعه مرجع X به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A = \{ \langle x, \mu_A(x), \nu_A(x) \rangle \mid x \in X \} \quad (14)$$

که μ_A و ν_A به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\mu_A : X \rightarrow [0, 1]$$

$$\nu_A : X \rightarrow [0, 1]$$

$$0 \leq \mu_A(x) + \nu_A(x) \leq 1 \quad \forall x \in X$$

اعداد $\mu_A(x)$ و $\nu_A(x)$ به ترتیب درجه عضویت و درجه عدم عضویت عضو $x \in X$ در مجموعه A را نشان می‌دهند.

برای یک مجموعه فازی شهودی مانند A ، اندیس شهودی (حاشیه تردید) x در مجموعه A به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\pi_A(x) = 1 - \mu_A(x) - \nu_A(x) \quad (15)$$

در واقع، $\pi_A(x)$ فقدان دانش در مورد اینکه x به مجموعه A تعلق دارد یا خیر را نشان می‌دهد. واضح است که برای هر $x \in X$ ، $0 \leq \pi_A(x) \leq 1$ بوده و همچنین، برای یک مجموعه فازی مانند A' ، معادله زیر برقرار است:

$$\pi_{A'}(x) = 1 - \mu_{A'}(x) - [1 - \mu_{A'}(x)] = 0 \quad (۱۶)$$

استفاده از مجموعه‌های فازی شهودی به جای مجموعه‌های فازی، منجر به افزایش درجه آزادی (درجه عدم عضویت و حاشیه تردید) در توصیف مجموعه خواهد شد. چنین توسعه‌ای از مجموعه‌های فازی، امکان بیشتری برای نمایش عدم قطعیت را فراهم کرده که منجر به توصیف بسیاری از مسائل دنیای واقعی به روشی مناسب‌تر خواهد شد. لازم به ذکر است که در نظر گرفتن حاشیه تردید در بسیاری از زمینه‌های کاربردی همچون پردازش تصویر، طبقه‌بندی دسته‌های نامتوازن و هم‌پوشان، تصمیم‌گیری گروهی، مذاکرات، رای دادن و دیگر زمینه‌ها، امری حیاتی است [۱۷].

مثال ۱۵.۲. [۱۷] فرض کنید X مجموعه تمام کشورهایی با دولت‌های انتخابی باشد. با فرض اینکه $M(x)$ نشان دهنده درصد افرادی باشد که به دولت مورد نظر برای کشور $x \in X$ رای داده‌اند، و همچنین با تعریف $\mu(x) = \frac{M(x)}{100}$ ، مقدار $\nu(x) = 1 - \mu(x)$ نشان دهنده بخشی از رای دهندگان است که به دولت مورد نظر رای نداده‌اند. همان‌طور که واضح است، با استفاده از نظریه مجموعه‌های فازی نمی‌توان مقدار $\nu(x)$ را با جزییات بیشتری توصیف کرد. اما، در صورتی که $\nu(x)$ متناظر با تعداد رای‌های داده شده به احزاب یا اشخاص دیگر تعریف شود، می‌توان بخشی از افراد را که رای نداده‌اند با مقدار $1 - \mu(x) - \nu(x)$ نشان داد. بنابراین، مجموعه فازی شهودی $\{ \langle x, \mu(x), \nu(x) \rangle \mid x \in X \}$ ساخته خواهد شد.

۵.۲ مجموعه‌های فازی مردد

مجموعه‌های فازی مردد، این امکان را فراهم می‌کنند که درجه عضویت یک عضو در یک مجموعه، به صورت چندین مقدار ممکن بین ۰ و ۱ نمایش داده شود. مجموعه فازی مردد را می‌توان به صورت زیر تعریف نمود:

تعریف ۱۶.۲. [۱۹، ۲۰] با در نظر گرفتن مجموعه X به عنوان مجموعه مرجع، یک HFS بر X به صورت تابعی است که وقتی بر X اعمال می‌شود، زیرمجموعه‌ای از بازه $[0, 1]$ را باز می‌گرداند. به منظور درک ساده‌تر، در [۲۳]، نماد ریاضی زیر برای مجموعه‌های فازی مردد ارائه شده است:

$$E = \{ \langle x, h_E(x) \rangle \mid x \in X \} \quad (17)$$

که $h_E(x)$ مجموعه‌ای از مقادیر در بازه $[0, 1]$ بوده و درجه‌های عضویت ممکن برای $x \in X$ در مجموعه E را نشان می‌دهد. برای سادگی، $h_E(x)$ عنصر فازی مردد نامیده می‌شود.

به منظور مقایسه عناصر فازی مردد، در [۲۳] روش مقایسه‌ای زیر پیشنهاد شده است:

تعریف ۱۷.۲. [۲۳] برای یک عنصر فازی مردد مانند h ، $s(h) = \frac{1}{l_h} \sum_{\gamma \in h} \gamma$ امتیاز h نامیده می‌شود که l_h نشان دهنده تعداد مقادیر موجود در h می‌باشد. برای دو عنصر فازی مردد مانند h_1 و h_2 ، اگر $s(h_1) > s(h_2)$ باشد، آنگاه h_1 از h_2 برتر بوده و با $h_1 > h_2$ نشان داده می‌شود. اگر $s(h_1) = s(h_2)$ باشد، آنگاه h_1 تفاوتی با h_2 نداشته و با $h_1 \sim h_2$ نشان داده می‌شود.

همان‌طور که مشخص است، $s(h)$ مستقیماً به میانگین مقادیر موجود در h مرتبط است. بیشتر بودن مقدار میانگین، بیشتر بودن امتیاز و در نتیجه، بهتر بودن h را نتیجه می‌دهد. اما، تعریف فوق، حالتی را که دو عنصر فازی مردد امتیاز یکسان داشته اما درجه انحراف آنها متفاوت است، در نظر نمی‌گیرند [۴]. به منظور رفع این مشکل، در [۴] مفهوم درجه انحراف به صورت زیر تعریف شده است:

تعریف ۱۸.۲. [۴] برای یک عنصر فازی مردد مانند h ، درجه انحراف یعنی $\sigma(h)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\sigma(h) = \left[\frac{1}{l_h} \sum_{\gamma \in h} (\gamma - s(h))^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (18)$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود، $s(h)$ میانگین و $\sigma(h)$ انحراف معیار است که درجه انحراف

بین مقادیر موجود در h تا میانگین آنها را نشان می‌دهد. براساس امتیاز و درجه انحراف، در [۴] روش زیر را برای مقایسه و رتبه‌بندی عناصر فازی مجدد ارائه شده است:

تعریف ۱۹۰۲. [۴] با فرض اینکه h_1 و h_2 دو عنصر فازی مجدد، $s(h_1)$ و $s(h_2)$ به ترتیب امتیاز آنها، و $\sigma(h_1)$ و $\sigma(h_2)$ به ترتیب درجه انحراف آنها باشند. آنگاه می‌توان از روابط زیر برای مقایسه و رتبه‌بندی این عناصر استفاده کرد:

• اگر $s(h_1) < s(h_2)$ ، آنگاه $h_1 < h_2$

• اگر $s(h_1) = s(h_2)$ آنگاه:

۱. اگر $\sigma(h_1) = \sigma(h_2)$ آنگاه $h_1 = h_2$

۲. اگر $\sigma(h_1) < \sigma(h_2)$ آنگاه $h_1 > h_2$

۳. اگر $\sigma(h_1) > \sigma(h_2)$ آنگاه $h_1 < h_2$

مثال ۲۰۰۲. [۲۶] به عنوان مثالی از کاربرد مجموعه‌های فازی مجدد، دو تصمیم‌گیرنده را در نظر بگیرید که در مورد درجه عضویت یک عضو مانند x در یک مجموعه مانند A بحث می‌کنند، ممکن است یکی از آنها درجه عضویت $0/4$ و دیگری درجه عضویت $0/7$ را ترجیح دهد. بنابراین، مجموعه‌ای از درجه‌های عضویت برای عضو مورد نظر وجود دارد. یعنی می‌توان مجموعه $\{0/4, 0/7\}$ را به عنوان درجه عضویت x در مجموعه A در نظر گرفت.

۳ معیارهای فاصله و شباهت برای مجموعه‌های فازی و برخی از توسعه‌های آن

به دلیل کاربرد معیارهای فاصله و شباهت در بسیاری از زمینه‌ها همچون تشخیص الگو، خوشه‌بندی، استدلال تقریبی، پردازش تصویر، تشخیص پزشکی و تصمیم‌گیری، این معیارها در دهه‌های اخیر مورد توجه بسیاری از محققان قرار گرفته‌اند. همچنین، برای مجموعه‌های فازی و توسعه‌های آنها نیز معیارهای فاصله و شباهت متنوعی ارائه شده است که این بخش به بررسی برخی از آنها اختصاص یافته است.

۱.۳ معیارهای فاصله و شباهت برای مجموعه‌های فازی

در این بخش، تعاریف اصلی مرتبط با معیارهای فاصله و شباهت برای مجموعه‌های فازی و همچنین، برخی از ارتباط‌های پایه‌ای بین این معیارها نیز مورد بررسی قرار خواهد گرفت. با فرض اینکه $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$ ، X مجموعه مرجع، $\mathcal{F}(X)$ دسته تمام مجموعه‌های فازی بر X و $\mathcal{P}(X)$ دسته تمام مجموعه‌های قطعی بر X باشد، تعاریف اصلی معیارهای فاصله و شباهت برای مجموعه‌های فازی به صورت زیر ارائه خواهد شد:

تعریف ۱.۳.۱ [۲۷] یک تابع حقیقی همچون $d : \mathcal{F}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$ یک معیار فاصله بر \mathcal{F} نامیده می‌شود اگر در شرایط زیر صدق کند:

$$1. \quad d(A, B) = d(B, A) \quad \text{برای هر } A, B \in \mathcal{F}$$

$$2. \quad d(A, A) = 0 \quad \text{برای هر } A \in \mathcal{F}$$

$$3. \quad d(D, D^c) = \max_{A, B \in \mathcal{F}} d(A, B) \quad \text{برای هر } D \in \mathcal{P}(X)$$

$$4. \quad \text{برای هر } A, B, C \in \mathcal{F} \text{، اگر } A \subset B \subset C \text{ آنگاه } d(A, B) \leq d(A, C) \text{ و } d(B, C) \leq d(A, C)$$

تعریف ۲.۳ [۲۷] یک تابع حقیقی همچون $s : \mathcal{F}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$ یک معیار شباهت بر \mathcal{F} نامیده می‌شود اگر در شرایط زیر صدق کند:

$$1. \quad s(A, B) = s(B, A) \quad \text{برای هر } A, B \in \mathcal{F}$$

$$2. \quad s(D, D^c) = 0 \quad \text{برای هر } D \in \mathcal{P}(X)$$

$$3. \quad s(C, C) = \max_{A, B \in \mathcal{F}} s(A, B) \quad \text{برای هر } C \in \mathcal{P}(X)$$

$$4. \quad \text{برای هر } A, B, C \in \mathcal{F} \text{، اگر } A \subset B \subset C \text{ آنگاه } s(A, B) \geq s(A, C) \text{ و } s(B, C) \geq s(A, C)$$

تعریف ۳.۳. [۲۷] اگر معیار فاصله d بر \mathcal{F} در شرط $\max_{A,B \in \mathcal{F}} d(A, B) = 1$ صدق کند، آنگاه d یک معیار فاصله نرمال بر \mathcal{F} نامیده می‌شود.

گزاره ۴.۳. [۲۷] اگر d یک معیار فاصله بر \mathcal{F} باشد، آنگاه \hat{d} که به صورت معادله ۱۹ تعریف می‌شود، یک معیار فاصله نرمال بر \mathcal{F} می‌باشد.

$$\hat{d}(A, B) = \frac{d(A, B)}{\max_{C, D \in \mathcal{F}} d(C, D)}, \quad \forall A, B \in \mathcal{F} \quad (19)$$

تعریف ۵.۳. [۲۷] اگر معیار شباهت s بر \mathcal{F} در شرط $\max_{A,B \in \mathcal{F}} s(A, B) = 1$ صدق کند، آنگاه s یک معیار شباهت نرمال بر \mathcal{F} می‌باشد.

گزاره ۶.۳. [۲۷] اگر s یک معیار شباهت بر \mathcal{F} باشد، آنگاه \hat{s} که به صورت معادله ۲۰ تعریف می‌شود، یک معیار شباهت نرمال بر \mathcal{F} می‌باشد.

$$\hat{s}(A, B) = \frac{s(A, B)}{\max_{C, D \in \mathcal{F}} s(C, D)}, \quad \forall A, B \in \mathcal{F} \quad (20)$$

۱.۱.۳ معیارهای فاصله متداول برای مجموعه‌های فازی

با فرض اینکه $A, B \in \mathcal{F}(X)$ دو مجموعه فازی بر مجموعه مرجع $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ به ترتیب با توابع عضویت μ_A و μ_B باشند، معیارهای فاصله متداول برای آنها عبارتند از [۲]:

۱. فاصله همینگ: $d_H(A, B) = \sum_{i=1}^n |\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)|$

۲. فاصله همینگ نرمال شده: $d_{nH}(A, B) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)|$

۳. فاصله اقلیدسی: $d_E(A, B) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i))^2}$

۴. فاصله اقلیدسی نرمال شده: $d_{nE}(A, B) = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i))^2}$

۵. فاصله بیشینه: $d_\infty(A, B) = \max_{i=1}^n |\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)|$

همچنین، معیارهای فاصله و شباهت متنوع دیگری نیز برای مجموعه‌های فازی معرفی شده‌اند که در ادامه به بررسی برخی از آنها پرداخته می‌شود. به عنوان مثال، در [۳] یک معیار فاصله هاسدورف فازی برای مجموعه‌های فازی A و B ارائه شده است. پیش از بررسی فاصله مورد نظر، ابتدا تعاریف زیر که در [۳] ارائه شده‌اند مورد بررسی قرار می‌گیرند. با در نظر گرفتن مجموعه‌های فازی A و B بر تکیه‌گاه S که یک فضای متریک است، مجموعه غیر فازی A_{max} به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A_{max} \triangleq \{x | \mu_A(x) = \mu^*\} \quad (21)$$

که $\mu^* \triangleq \max\{\mu_A(x) | x \in S\}$ بیشترین درجه عضویت در A می‌باشد. حال، خانواده مجموعه‌های غیر فازی A_t که $t \in [0, 1]$ می‌باشد به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A_t \triangleq \{x | \mu_A(x) \in [t, \mu^*]\} \quad \text{if } t \leq \mu^*, \\ \triangleq A_\alpha \quad \text{if } t > \mu^* \quad (22)$$

که A_α یک مجموعه غیر فازی ناتهی بر S است به طوری که $A_\alpha \supset A_{max}$ و همچنین برای هر دو مجموعه فازی A و B ، $A_\alpha = B_\alpha$ می‌باشد اگر و تنها اگر $A_{max} = B_{max}$.

حال، با فرض اینکه مجموعه‌های فازی تنها می‌توانند یک مجموعه گسسته از مقادیر عضویت همچون t_1, t_2, \dots, t_m را اختیار کنند، و همچنین با فرض اینکه $H(A_{t_i}, B_{t_i})$ فاصله هاسدورف قطعی بین مجموعه‌های A_{t_i} و B_{t_i} باشد، فاصله هاسدورف فازی بین مجموعه‌های A و B به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$H_f(A, B) \triangleq \frac{\sum_{i=1}^m t_i H(A_{t_i}, B_{t_i})}{\sum_{i=1}^m t_i} \quad (23)$$

همچنین، معیارهای شباهت متنوعی برای مجموعه‌های فازی ارائه شده‌اند که در ادامه به مرور برخی از آنها پرداخته شده است:

در [۱۱] معیارهای شباهت زیر ارائه شده‌اند:

$$s_{FS}^1(A, B) = \frac{\sum_{i=1}^n \min(\mu_A(x_i), \mu_B(x_i))}{\sum_{i=1}^n \max(\mu_A(x_i), \mu_B(x_i))} \quad (24)$$

$$s_{FS}^2(A, B) = 1 - \max_{1 \leq i \leq n} |\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)| \quad (25)$$

$$s_{FS}^3(A, B) = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n |\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)|}{\sum_{i=1}^n (\mu_A(x_i) + \mu_B(x_i))} \quad (26)$$

در [۹] معیار شباهت زیر برای مجموعه‌های فازی ارائه شده است:

$$s_{FS}^4(A, B) = \max_{1 \leq i \leq n} \min(\mu_A(x_i), \mu_B(x_i)) \quad (27)$$

در [۲۱] دو معیار شباهت برای مجموعه‌های فازی، به شکل معادله‌های (۲۸) و (۲۹) تعریف شده‌اند:

$$s_{FS}^5(A, B) = \frac{\sum_{i=1}^n (1 - |\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)|)}{n} \quad (28)$$

$$s_{FS}^6(A, B) = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{\min(\mu_A(x_i), \mu_B(x_i))}{\max(\mu_A(x_i), \mu_B(x_i))}}{n} \quad (29)$$

در [۱۲] یک معیار شباهت برای مجموعه‌های فازی به صورت معادله ۳۰ تعریف شده است:

$$s_{FS}^7(A, B) = \frac{|A \cap B|}{\max(|A|, |B|)} \quad (30)$$

که $|A|$ اندازه مجموعه‌ی A بوده و به صورت $|A| = \sum_{x \in X} \mu_A(x)$ تعریف می‌شود. همان‌طور

که در [۱۲] بیان شده است، می‌توان معیار فوق را به شکل زیر نوشت:

$$s_{FS}^Y(A, B) = \frac{\sum_{i=1}^n \min(\mu_A(x_i), \mu_B(x_i))}{\max\left(\sum_{i=1}^n \mu_A(x_i), \sum_{i=1}^n \mu_B(x_i)\right)} \quad (31)$$

که $A \neq \emptyset$ یا $B \neq \emptyset$ و $s(\emptyset, \emptyset) = 1$ می‌باشد.

همچنین، با فرض اینکه اعضای مجموعه مرجع وزن دار باشند، به صورتی که w_i وزن x_i به ازای $1 \leq i \leq n$ و با شرط $w_i \in [0, 1]$ باشد، در [۱۲] نسخه‌های وزن دار معیارهای تعریف شده در معادله‌های (۲۴)، (۲۶)، (۲۸)، (۲۹) و (۳۱) به ترتیب به شکل معادله‌های زیر تعریف شده‌اند:

$$s_{FS}^{\wedge}(A, B) = \frac{\sum_{i=1}^n w_i \min(\mu_A(x_i), \mu_B(x_i))}{\sum_{i=1}^n w_i \max(\mu_A(x_i), \mu_B(x_i))} \quad (32)$$

$$s_{FS}^{\circ}(A, B) = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n w_i |\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)|}{\sum_{i=1}^n w_i (\mu_A(x_i) + \mu_B(x_i))} \quad (33)$$

$$s_{FS}^{\circ}(A, B) = \frac{\sum_{i=1}^n w_i (1 - |\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)|)}{\sum_{i=1}^n w_i} \quad (34)$$

$$s_{FS}^{\cup}(A, B) = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{\min(\mu_A(x_i), \mu_B(x_i))}{\max(\mu_A(x_i), \mu_B(x_i))}}{\sum_{i=1}^n w_i} \quad (35)$$

$$s_{FS}^{\cup}(A, B) = \frac{\sum_{i=1}^n w_i \min(\mu_A(x_i), \mu_B(x_i))}{\max(\sum_{i=1}^n w_i \mu_A(x_i), \sum_{i=1}^n w_i \mu_B(x_i))} \quad (36)$$

۲.۳ فاصله و شباهت برای مجموعه‌های فازی نوع ۲

(در این مقاله، به منظور سهولت در نام‌گذاری، فاصله و شباهت برای مجموعه‌های فازی نوع ۲ به ترتیب با نمادهای $d_{T\checkmark FS}$ و $s_{T\checkmark FS}$ نمایش داده شده‌اند) در [۸] معیارهای شباهت و تعاریف اصلی و خواص این معیارها برای مجموعه‌های فازی نوع ۲ بیان شده است.

با فرض اینکه A و B دو مجموعه فازی بر مجموعه مرجع X باشند، با بررسی معیارهای فاصله هاسدورف و همینگ تعریف شده برای این مجموعه‌ها، مشخص است که این دو معیار از دیدگاه‌های متفاوتی استفاده می‌کنند. فاصله هاسدورف، از میانگین وزن دار اختلاف بین مجموعه‌های A_i و

B_{t_i} استفاده کرده، در صورتی که، فاصله همینگ مجموع مبتنی بر اختلاف بین درجه‌های عضویت $\mu_B(x_i)$ و $\mu_A(x_i)$ را مورد استفاده قرار می‌دهد. در [۸]، با ترکیب این دو دیدگاه، معیار فاصله جدیدی برای مجموعه‌های فازی نوع ۲ و سپس یک معیار شباهت جدید برای آنها تعریف شده است.

با فرض اینکه X مجموعه مرجع، $\mathcal{F}_2(X)$ دسته تمام مجموعه‌های فازی نوع ۲ بر X و $\mathcal{P}(X)$ دسته تمام مجموعه‌های قطعی بر X باشد، با توجه به تعاریف اصلی فاصله و شباهت برای مجموعه‌های فازی، این تعاریف برای مجموعه‌های فازی نوع ۲ به صورت زیر بیان شده‌اند:
تعاریف اصلی معیار فاصله برای مجموعه‌های فازی نوع ۲ [۸]:

$$1. \quad \tilde{A}, \tilde{B} \in \mathcal{F}_2(X) \text{ برای هر } d_{T\forall FS}(\tilde{A}, \tilde{B}) = d_{T\forall FS}(\tilde{B}, \tilde{A})$$

$$2. \quad \tilde{A} \in \mathcal{F}_2(X) \text{ برای هر } d_{T\forall FS}(\tilde{A}, \tilde{A}) = 0$$

$$3. \quad D \in \mathcal{P}(X) \text{ برای هر } d_{T\forall FS}(D, D^c) = \max_{\tilde{A}, \tilde{B} \in \mathcal{F}_2(X)} d_{T\forall FS}(\tilde{A}, \tilde{B})$$

$$4. \quad \text{برای هر } \tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C} \in \mathcal{F}_2(X) \text{ اگر } \tilde{A} \subset \tilde{B} \subset \tilde{C} \text{ آنگاه } d_{T\forall FS}(\tilde{A}, \tilde{B}) \leq d_{T\forall FS}(\tilde{B}, \tilde{C}) \text{ و } d_{T\forall FS}(\tilde{A}, \tilde{C})$$

تعاریف اصلی معیار شباهت برای مجموعه‌های فازی نوع ۲ [۸]:

$$1. \quad \tilde{A}, \tilde{B} \in \mathcal{F}_2(X) \text{ برای هر } st_{T\forall FS}(\tilde{A}, \tilde{B}) = st_{T\forall FS}(\tilde{B}, \tilde{A})$$

$$2. \quad D \in \mathcal{P}(X) \text{ برای هر } st_{T\forall FS}(D, D^c) = 0$$

$$3. \quad \tilde{C} \in \mathcal{F}_2(X) \text{ برای هر } st_{T\forall FS}(\tilde{C}, \tilde{C}) = \max_{\tilde{A}, \tilde{B} \in \mathcal{F}_2(X)} st_{T\forall FS}(\tilde{A}, \tilde{B})$$

$$4. \quad \text{برای هر } \tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C} \in \mathcal{F}_2(X) \text{ اگر } \tilde{A} \subset \tilde{B} \subset \tilde{C} \text{ آنگاه } st_{T\forall FS}(\tilde{A}, \tilde{B}) \geq st_{T\forall FS}(\tilde{B}, \tilde{C}) \text{ و } st_{T\forall FS}(\tilde{A}, \tilde{C})$$

حال، با در نظر گرفتن دو مجموعه فازی نوع ۲، \tilde{A} و \tilde{B} بر مجموعه مرجع $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

معیار فاصله جدید بین این مجموعه به صورت زیر تعریف شده است:

$$d_{T\checkmark FS}^1(\tilde{A}, \tilde{B}) = \sum_{i=1}^n H_f(\mu_{\tilde{A}}(x_i), \mu_{\tilde{B}}(x_i)) \quad (37)$$

که $H_f(\mu_{\tilde{A}}(x_i), \mu_{\tilde{B}}(x_i))$ فاصله هاسدورف فازی بین $\mu_{\tilde{A}}(x_i)$ و $\mu_{\tilde{B}}(x_i)$ می‌باشد. از آنجایی که درجه‌های عضویت $\mu_{\tilde{A}}(x_i)$ و $\mu_{\tilde{B}}(x_i)$ مجموعه‌های فازی نوع ۱ هستند، نتیجه می‌شود که:

$$0 \leq H_f(\mu_{\tilde{A}}(x_i), \mu_{\tilde{B}}(x_i)) \leq 1, \quad \forall i \quad (38)$$

بنابراین:

$$0 \leq d_{T\checkmark FS}^1(\tilde{A}, \tilde{B}) \leq n \quad (39)$$

به منظور تعریف معیار شباهت بین مجموعه‌های فازی نوع ۲، ابتدا فاصله نرمال شده به صورت معادله ۴۰ تعریف شده، سپس، معیار شباهت برای این مجموعه‌ها به صورت معادله ۴۱ تعریف می‌شود:

$$d_{T\checkmark FS}^N(\tilde{A}, \tilde{B}) = \frac{d_{T\checkmark FS}^1(\tilde{A}, \tilde{B})}{n} \quad (40)$$

$$s_{T\checkmark FS}(\tilde{A}, \tilde{B}) = 1 - d_{T\checkmark FS}^N(\tilde{A}, \tilde{B}) \quad (41)$$

در صورتی که X یک مجموعه مرجع پیوسته همچون $X = [a, b]$ باشد، معیار فاصله بین \tilde{A} و \tilde{B} در X به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$d_{T\checkmark FS}^X(\tilde{A}, \tilde{B}) = \int_a^b H_f(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)) dx \quad (42)$$

در [۱۶] معیارهای فاصله برای مجموعه‌های فازی نوع ۲ به صورت زیر تعریف شده اند:

با فرض اینکه برای هر $x \in X$ ، $f_x(u)$ نشان دهنده $\mu_{\tilde{A}}(x, u)$ ، برای هر $u \in J_x \subseteq [0, 1]$ باشد، تابع حاشیه واریانس برای یک مجموعه فازی نوع ۲ به صورت تعریف زیر ارائه شده است:

تعریف ۷.۳. [۱۶] تابع حاشیه واریانس برای یک مجموعه فازی نوع ۲، به صورت تفاوت بین تابع عضویت اولیه و تابع عضویت ثانویه تعریف شده و با نماد ξ نشان داده می‌شود. یعنی، برای یک مجموعه فازی نوع ۲ همچون \tilde{A} برای هر i داریم: $\xi_{\tilde{A}} = |u_{\tilde{A}}(x_i) - f_{x_i}(u_{\tilde{A}})|$

حال، فاصله‌های همینگ نرمال شده، همینگ وزن دار نرمال شده، اقلیدسی نرمال شده و اقلیدسی وزن دار نرمال شده برای مجموعه‌های فازی نوع ۲، به ترتیب به صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$d_{T\checkmark FS}^{\checkmark}(\tilde{A}, \tilde{B}) = \frac{1}{\checkmark n} \sum_{i=1}^n \left(|u_{\tilde{A}}(x_i) - u_{\tilde{B}}(x_i)| + |f_{x_i}(u_{\tilde{A}}) - g_{x_i}(u_{\tilde{B}})| + |\xi_{\tilde{A}}(x_i) - \xi_{\tilde{B}}(x_i)| \right) \quad (43)$$

$$d_{T\checkmark FS}^{\checkmark}(\tilde{A}, \tilde{B}) = \frac{1}{\checkmark n} \sum_{i=1}^n w_i \left(|u_{\tilde{A}}(x_i) - u_{\tilde{B}}(x_i)| + |f_{x_i}(u_{\tilde{A}}) - g_{x_i}(u_{\tilde{B}})| + |\xi_{\tilde{A}}(x_i) - \xi_{\tilde{B}}(x_i)| \right) \quad (44)$$

$$d_{T\checkmark FS}^{\diamond}(\tilde{A}, \tilde{B}) = \left[\frac{1}{\checkmark n} \sum_{i=1}^n \left((u_{\tilde{A}}(x_i) - u_{\tilde{B}}(x_i))^{\checkmark} + (f_{x_i}(u_{\tilde{A}}) - g_{x_i}(u_{\tilde{B}}))^{\checkmark} + (\xi_{\tilde{A}}(x_i) - \xi_{\tilde{B}}(x_i))^{\checkmark} \right) \right]^{\frac{1}{\checkmark}} \quad (45)$$

$$d_{T\checkmark FS}^{\checkmark}(\tilde{A}, \tilde{B}) = \left[\frac{1}{\checkmark n} \sum_{i=1}^n w_i \left((u_{\tilde{A}}(x_i) - u_{\tilde{B}}(x_i))^{\checkmark} + (f_{x_i}(u_{\tilde{A}}) - g_{x_i}(u_{\tilde{B}}))^{\checkmark} + (\xi_{\tilde{A}}(x_i) - \xi_{\tilde{B}}(x_i))^{\checkmark} \right) \right]^{\frac{1}{\checkmark}} \quad (46)$$

۳.۳ فاصله و شباهت برای مجموعه‌های فازی بازه مقدار

در این مقاله، به منظور سهولت در نام‌گذاری، فاصله و شباهت برای مجموعه‌های فازی بازه مقدار به ترتیب با نمادهای d_{IVFS} و s_{IVFS} نمایش داده شده‌اند) با در نظر گرفتن $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ به عنوان مجموعه مرجع و $IVFSs$ به عنوان مجموعه تمامی زیرمجموعه‌های فازی بازه مقدار در X ، در [۳۰]، معیارهای فاصله و شباهت برای مجموعه‌های فازی بازه مقدار معرفی شده‌اند. به عنوان مثال، فاصله‌های همینگ و اقلیدسی نرمال شده برای مجموعه‌های فازی بازه مقدار، به ترتیب به شکل معادله‌های زیر تعریف شده‌اند:

$$d_{IVFS}^1(A, B) = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n \left(|\mu_A^L(x_i) - \mu_B^L(x_i)| + |\mu_A^U(x_i) - \mu_B^U(x_i)| \right) \quad (۴۷)$$

$$d_{IVFS}^2(A, B) = \left[\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n \left((\mu_A^L(x_i) - \mu_B^L(x_i))^2 + (\mu_A^U(x_i) - \mu_B^U(x_i))^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (۴۸)$$

قضیه ۸.۳. [۳۰] اگر d_{IVFS} یک معیار فاصله نرمال شده برای مجموعه‌های فازی بازه مقدار باشد، آنگاه $s_{IVFS}(A, B) = 1 - d_{IVFS}(A, B)$ یک معیار شباهت برای مجموعه‌های فازی بازه مقدار $IVFSs$ ، $A, B \in IVFSs$ خواهد بود.

به عنوان مثال با در نظر گرفتن دو معیار فاصله فوق، معادله‌های زیر دو معیار شباهت برای مجموعه‌های فازی بازه مقدار می‌باشند:

$$s_{IVFS}^1(A, B) = 1 - \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n \left(|\mu_A^L(x_i) - \mu_B^L(x_i)| + |\mu_A^U(x_i) - \mu_B^U(x_i)| \right) \quad (۴۹)$$

$$s_{IVFS}^2(A, B) = 1 - \left[\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n \left((\mu_A^L(x_i) - \mu_B^L(x_i))^2 + (\mu_A^U(x_i) - \mu_B^U(x_i))^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (۵۰)$$

قضیه ۹.۳. [۳۰] با فرض اینکه $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ یک تابع نزولی اکیدا یکنواخت و d_{IVFS}

یک معیار فاصله نرمال شده برای مجموعه‌های فازی بازه مقدار باشد، برای هر $A, B \in IVFSs$ ، معادله زیر یک معیار شباهت برای مجموعه‌های فازی بازه مقدار A و B است.

$$s_{IVFS}(A, B) = \frac{f(d_{IVFS}(A, B)) - f(1)}{f(0) - f(1)} \quad (51)$$

اثبات. اثبات این قضیه در [۳۰] ارائه شده است. □

با توجه به قضیه فوق، مساله، یافتن تابع مفید f است. در حالت کلی، ساده ترین تابع، $f(x) = 1 - x$ است. همچنین، با توجه به کاربرد عملگر نمایی در کاربردهایی همچون رابطه شباهت و تجزیه و تحلیل خوشه در نظریه مجموعه‌های فازی، می‌توان $f(x) = e^{-x}$ را انتخاب کرد. بنابراین، معیار شباهت متناظر با این عملگر، برای مجموعه‌های فازی بازه مقدار به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$s_{IVFS}^3(A, B) = \frac{e^{-d_{IVFS}(A, B)} - e^{-1}}{1 - e^{-1}} \quad (52)$$

از طرف دیگر، با انتخاب تابع‌هایی همچون $f(x) = \frac{1}{1+x}$ و $f(x) = 1 - x^2$ نیز می‌توان به ترتیب معیارهای شباهت زیر را برای این مجموعه‌ها تعریف نمود:

$$s_{IVFS}^4(A, B) = \frac{1 - d_{IVFS}(A, B)}{1 + d_{IVFS}(A, B)} \quad (53)$$

$$s_{IVFS}^5(A, B) = 1 - d_{IVFS}^2(A, B) \quad (54)$$

همچنین، در [۳۲] معیارهای فاصله زیر برای مجموعه‌های فازی بازه مقدار معرفی شده‌اند:

$$d_{IVFS}^3(A, B) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \max\{|\mu_A^L(x_i) - \mu_B^L(x_i)|, |\mu_A^U(x_i) - \mu_B^U(x_i)|\} \quad (55)$$

$$d_{IVFS}^{\diamond}(A, B) = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \max\{(\mu_A^L(x_i) - \mu_B^L(x_i))^2, (\mu_A^U(x_i) - \mu_B^U(x_i))^2\}} \quad (56)$$

$$d_{IVFS}^{\delta}(A, B) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[\frac{|\mu_A^L(x_i) - \mu_B^L(x_i)| + |\mu_A^U(x_i) - \mu_B^U(x_i)|}{4} + \frac{\max\{|\mu_A^L(x_i) - \mu_B^L(x_i)|, |\mu_A^U(x_i) - \mu_B^U(x_i)|\}}{2} \right] \quad (57)$$

$$d_{IVFS}^{\epsilon}(A, B) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n w_i \left[\frac{|\mu_A^L(x_i) - \mu_B^L(x_i)| + |\mu_A^U(x_i) - \mu_B^U(x_i)|}{4} + \frac{\max\{|\mu_A^L(x_i) - \mu_B^L(x_i)|, |\mu_A^U(x_i) - \mu_B^U(x_i)|\}}{2} \right] / \sum_{i=1}^n w_i$$

۴.۳ معیارهای فاصله و شباهت برای مجموعه‌های فازی شهودی

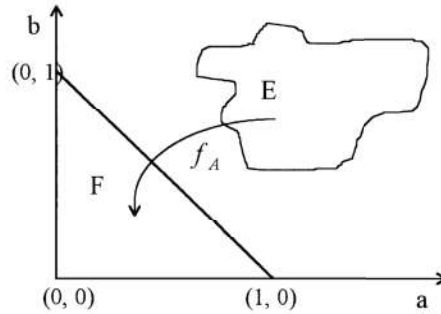
در این مقاله، به منظور سهولت در نام‌گذاری، فاصله و شباهت برای مجموعه‌های فازی شهودی به ترتیب با نمادهای d_{IFS} و s_{IFS} نمایش داده شده‌اند) در [۱۸] با در نظر گرفتن نمایش هندسی مجموعه‌های فازی شهودی، چندین معیار فاصله و شباهت برای آنها معرفی شده است. شکل ۳، تفسیر هندسی مناسبی از مجموعه‌های فازی شهودی را نشان می‌دهد. در این شکل، مرجع E و زیرمجموعه F در فضای اقلیدسی با مختصات دکارتی را در نظر گرفته شده‌اند. برای یک مجموعه فازی شهودی ثابت همچون A ، می‌توان یک تابع مانند f_A از E به F در نظر گرفت به صورتی که اگر $x \in E$ باشد آنگاه نقطه $p = f_A(x) \in F$ با مختصات $\langle a', b' \rangle$ وجود دارد به طوری که $a' \leq 0$ و $b' \leq 1$ بوده و $a' = \mu_A(x)$ و $b' = \nu_A(x)$ می‌باشد.

چنین نمایش هندسی را می‌توان به عنوان مثالی از شروع یک مذاکره بین چند کارشناس در نظر گرفت. به عنوان مثال، در شکل ۴ کارشناس i به صورت یک نقطه با مختصات $\langle \mu_i, \nu_i, \pi_i \rangle$ نشان داده شده است. کارشناس $\langle 1, 0, 0 \rangle$: A ایده مورد بحث را به طور کامل پذیرفته است. کارشناس $\langle 0, 1, 0 \rangle$: B ایده مورد نظر را به طو کامل رد کرده است و کارشناس $\langle 0, 0, 1 \rangle$: C کاملاً مردد است. در واقع، کارشناسانی که در قسمت AB قرار می‌گیرند،

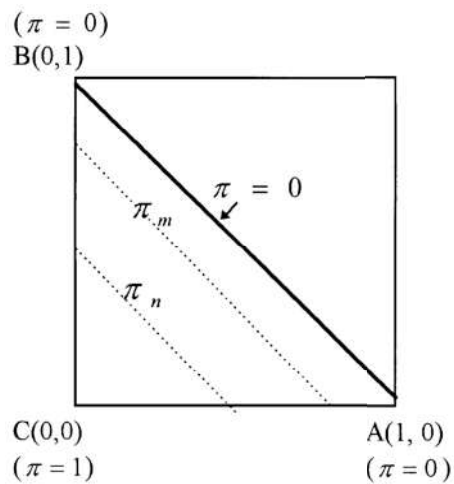
نظرات ثابتی دارند (به عبارت دیگر، حاشیه‌های تردید آنها برابر با صفر است).
 یک خط موازی با AB ، مجموعه‌ای از کارشناسان با سطح تردید یکسان را توصیف می‌کند.
 به عنوان مثال، در شکل ۴ دو مجموعه با اندیس‌های شهودی π_m و π_n نشان داده شده‌اند که
 $\pi_n > \pi_m$ می‌باشد.

به عبارت دیگر، شکل ۴ (مثلث ABC) یک تصویر عمود از وضعیت واقعی (مثلث ABD)
 نشان داده شده در شکل ۵ می‌باشد.

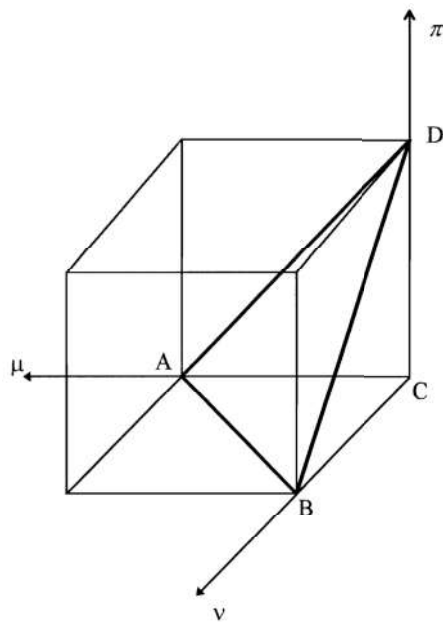
یک عضو از یک مجموعه فازی شهودی، مختصاتی به شکل $\langle \mu_i, \nu_i, \pi_i \rangle$ دارد. بنابراین
 یک نمایش طبیعی برای مجموعه فازی شهودی رسم یک مکعب (با لبه‌هایی با طول ۱) می‌باشد.
 از طرفی، با توجه به رابطه $\pi_A(x) = 1 - \mu_A(x) - \nu_A(x)$ ، مثلث ABD در شکل ۵ یک
 مجموعه فازی شهودی را نشان می‌دهد. این نمایش از مجموعه فازی شهودی، انگیزه‌ای برای در نظر
 گرفتن فاصله‌های شهودی شد.



شکل ۳: نمایش هندسی یک مجموعه فازی شهودی



شکل ۴: یک تصویر عمود از نمایش واقعی یک مجموعه فازی شهودی



شکل ۵: یک نمایش سه بعدی از یک مجموعه فازی شهودی

از آنجایی که می‌توان هر مجموعه فازی مانند A' در X را به صورت یک مجموعه فازی شهودی

همچون $A = \{ \langle x, \mu_A(x), 1 - \mu_A(x) \rangle \mid x \in X \}$ نمایش داد، با در نظر گرفتن چنین نمایشی، می توان معیارهای فاصله متداول برای مجموعه های فازی را به صورت زیر بازنویسی کرد:

به عنوان مثال، معیار فاصله همینگ به شکل زیر تبدیل خواهد شد:

$$\begin{aligned} d'_H(A, B) &= \sum_{i=1}^n (|\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)| + |\nu_A(x_i) - \nu_B(x_i)|) \\ &= \sum_{i=1}^n (|\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)| + |1 - \mu_A(x_i) - 1 + \mu_B(x_i)|) \\ &= 2 \sum_{i=1}^n |\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)| \end{aligned} \quad (59)$$

به طور مشابه، فاصله های همینگ نرمال شده، اقلیدسی و اقلیدسی نرمال شده نیز به صورت زیر بازنویسی می شوند:

$$d'_{nH}(A, B) = \frac{1}{n} d'(A, B) = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n |\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)| \quad (60)$$

$$d'_E(A, B) = \sqrt{2 \sum_{i=1}^n (\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i))^2} \quad (61)$$

$$d'_{nE}(A, B) = \sqrt{\frac{2}{n} \sum_{i=1}^n (\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i))^2} \quad (62)$$

به وضوح، روابط زیر برای معیارهای فوق برقرار هستند:

$$\circ \leq d'_H(A, B) \leq 2n \quad (63)$$

$$\circ \leq d'_{nH}(A, B) \leq 2 \quad (64)$$

$$\circ \leq d'_E(A, B) \leq \sqrt{2n} \quad (65)$$

$$\circ \leq d'_{nE}(A, B) \leq \sqrt{2} \quad (66)$$

همان‌طور که نشان داده شد، استفاده از نمایش مجموعه فازی شهودی متناظر با یک مجموعه فازی نوع ۱، به منظور بازنویسی معیارهای فاصله، تنها منجر به ضرب یک مقدار ثابت در معیار فاصله خواهد شد. اما، در ادامه نشان داده می‌شود که در نظر نگرفتن یکی از سه پارامتر ممکن است منجر به نتیجه اشتباه شود.

در واقع، برای دو مجموعه فازی شهودی همچون A و B در مجموعه مرجع $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ معیار فاصله همینگ به صورت معادله زیر تعریف می‌شود:

$$d'_{IFS}(A, B) = \sum_{i=1}^n (|\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)| + |\nu_A(x_i) - \nu_B(x_i)| + |\pi_A(x_i) - \pi_B(x_i)|) \quad (67)$$

با در نظر گرفتن رابطه‌های زیر:

$$\pi_A(x_i) = 1 - \mu_A(x_i) - \nu_A(x_i) \quad \text{و} \quad \pi_B(x_i) = 1 - \mu_B(x_i) - \nu_B(x_i) \quad (68)$$

خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} |\pi_A(x_i) - \pi_B(x_i)| &= |1 - \mu_A(x_i) - \nu_A(x_i) - 1 + \mu_B(x_i) + \nu_B(x_i)| \\ &\leq |\mu_B(x_i) - \mu_A(x_i)| + |\nu_B(x_i) - \nu_A(x_i)| \end{aligned} \quad (69)$$

نامساوی (۶۹) نشان می‌دهد که سومین پارامتر در معادله (۶۷) نمی‌تواند نادیده گرفته شود. همچنین فاصله اقلیدسی بین دو مجموعه فازی شهودی A و B در مجموعه مرجع $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ نیز به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$d_{IFS}^{\gamma}(A, B) = \left(\sum_{i=1}^n (\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i))^{\gamma} + (\nu_A(x_i) - \nu_B(x_i))^{\gamma} + (\pi_A(x_i) - \pi_B(x_i))^{\gamma} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \quad (70)$$

با در نظر گرفتن رابطه (۶۸) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} (\pi_A(x_i) - \pi_B(x_i))^{\gamma} &= (1 - \mu_A(x_i) - \nu_A(x_i) - 1 + \mu_B(x_i) + \nu_B(x_i))^{\gamma} \\ &= (\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i))^{\gamma} + (\nu_A(x_i) - \nu_B(x_i))^{\gamma} \\ &\quad + \gamma(\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i))(\nu_A(x_i) - \nu_B(x_i)) \end{aligned} \quad (71)$$

که نشان دهنده‌ی تاثیر پارامتر π بر نتیجه نهایی حاصل از محاسبه فاصله اقلیدسی می‌باشد. با در نظر داشتن معادله‌های (۶۳) تا (۶۶) و به منظور انطباق بیشتر با مفهوم نرمال‌سازی ریاضی، معیارهای فاصله زیر برای دو مجموعه فازی شهودی A و B در مجموعه مرجع $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ تعریف شده‌اند:

$$d_{IFS}^{\alpha}(A, B) = \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^n (|\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)| + |\nu_A(x_i) - \nu_B(x_i)| + |\pi_A(x_i) - \pi_B(x_i)|) \quad (72)$$

$$d_{IFS}^{\uparrow}(A, B) = \left(\frac{1}{\uparrow} \sum_{i=1}^n (\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i))^{\uparrow} + (\nu_A(x_i) - \nu_B(x_i))^{\uparrow} + (\pi_A(x_i) - \pi_B(x_i))^{\uparrow} \right)^{\frac{1}{\uparrow}} \quad (73)$$

$$d_{IFS}^{\diamond}(A, B) = \frac{1}{\uparrow n} \sum_{i=1}^n (|\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)| + |\nu_A(x_i) - \nu_B(x_i)| + |\pi_A(x_i) - \pi_B(x_i)|) \quad (74)$$

$$d_{IFS}^{\checkmark}(A, B) = \left(\frac{1}{\uparrow n} \sum_{i=1}^n (\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i))^{\checkmark} + (\nu_A(x_i) - \nu_B(x_i))^{\checkmark} + (\pi_A(x_i) - \pi_B(x_i))^{\checkmark} \right)^{\frac{1}{\checkmark}} \quad (75)$$

در [۲۴] معیارهای فاصله (۷۴) و (۷۵) به صورت زیر توسعه پیدا کرده‌اند:

$$d_{IFS}^{\Upsilon}(A, B) = \left[\frac{1}{\uparrow n} \sum_{i=1}^n (|\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)|^{\alpha} + |\nu_A(x_i) - \nu_B(x_i)|^{\alpha} + |\pi_A(x_i) - \pi_B(x_i)|^{\alpha}) \right]^{\frac{1}{\alpha}} \quad (76)$$

که $\alpha > 0$ می‌باشد.

در حالت خاص، اگر $\alpha = 1$ باشد، معادله (۷۶) به معادله (۷۴) و اگر $\alpha = 2$ باشد، به معادله (۷۵) تقلیل می‌یابد. و در صورتی که $\alpha \rightarrow +\infty$ ، به شکل زیر تقلیل می‌یابد [۲۵]:

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} d_{IFS}^{\Upsilon}(A, B) = \max_i \{ |\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)|, |\nu_A(x_i) - \nu_B(x_i)|, |\pi_A(x_i) - \pi_B(x_i)| \} \quad (77)$$

در [۲۴] یک معیار فاصله وزن دار به شکل زیر تعریف شده است:

$$d_{IFS}^{\wedge}(A, B) = \left[\frac{1}{\gamma} \sum_{i=1}^n w_i (|\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)|^{\alpha} + |\nu_A(x_i) - \nu_B(x_i)|^{\alpha} + |\pi_A(x_i) - \pi_B(x_i)|^{\alpha}) \right]^{\frac{1}{\alpha}} \quad (78)$$

که $\alpha > 0$ بوده و $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$ بردار وزن با شرایط $w_i \in [0, 1]$ و $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ می باشد.

در حالت خاص، اگر $\alpha = 1$ باشد، معیار فاصله ۷۸ به معیار فاصله همینگ وزن دار و در صورتی که $\alpha = 2$ باشد، به معیار فاصله اقلیدسی وزن دار به ترتیب به شکل معادله های (۷۹) و (۸۰) تقلیل می یابد.

$$d_{IFS}^{\wedge}(A, B) = \frac{1}{\gamma} \sum_{i=1}^n w_i (|\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)| + |\nu_A(x_i) - \nu_B(x_i)| + |\pi_A(x_i) - \pi_B(x_i)|) \quad (79)$$

$$d_{IFS}^{\circ}(A, B) = \left[\frac{1}{\gamma} \sum_{i=1}^n w_i ((\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i))^{\gamma} + (\nu_A(x_i) - \nu_B(x_i))^{\gamma} + (\pi_A(x_i) - \pi_B(x_i))^{\gamma}) \right]^{\frac{1}{\gamma}} \quad (80)$$

بر اساس معیار تعریف شده در معادله (۷۸)، معیار شباهت به صورت زیر تعریف می شود:

$$s_{IFS}^{\wedge}(A, B) = 1 - \left[\frac{1}{\gamma} \sum_{i=1}^n w_i (|\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)|^{\alpha} + |\nu_A(x_i) - \nu_B(x_i)|^{\alpha} + |\pi_A(x_i) - \pi_B(x_i)|^{\alpha}) \right]^{\frac{1}{\alpha}} \quad (81)$$

در حالت خاص، اگر اعضا اهمیت یکسانی داشته باشند، یعنی $w = (1/n, 1/n, \dots, 1/n)^T$ آنگاه معادله (۸۱) به شکل زیر تبدیل می‌شود:

$$s_{IFS}^{\lambda}(A, B) = 1 - \left[\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n (|\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)|^{\alpha} + |\nu_A(x_i) - \nu_B(x_i)|^{\alpha} + |\pi_A(x_i) - \pi_B(x_i)|^{\alpha}) \right]^{\frac{1}{\alpha}} \quad (82)$$

اگر مجموعه مرجع و وزن عناصر پیوسته باشند، به صورتی که وزن $x \in X = [a, b]$ به شکل $w(x) \in [0, 1]$ بوده که $\int_a^b w(x) dx = 1$ باشد، آنگاه بر اساس معادلات ۷۸ تا ۸۲ معیارهای فاصله و شباهت زیر تعریف می‌شوند [۲۵]:

$$d_{IFS}^{\lambda}(A, B) = \left[\frac{1}{2} \int_a^b w(x) \left(|\mu_A(x) - \mu_B(x)|^{\alpha} + |\nu_A(x) - \nu_B(x)|^{\alpha} + |\pi_A(x) - \pi_B(x)|^{\alpha} \right) dx \right]^{\frac{1}{\alpha}} \quad (83)$$

$$s_{IFS}^{\lambda}(A, B) = 1 - \left[\frac{1}{2} \int_a^b w(x) \left(|\mu_A(x) - \mu_B(x)|^{\alpha} + |\nu_A(x) - \nu_B(x)|^{\alpha} + |\pi_A(x) - \pi_B(x)|^{\alpha} \right) dx \right]^{\frac{1}{\alpha}} \quad (84)$$

اگر برای هر $x \in [a, b]$ ، $w = 1/(b-a)$ باشد، آنگاه دو معیار فوق به ترتیب به معیارهای زیر تبدیل می‌شوند:

$$d_{IFS}^{\lambda}(A, B) = \left[\frac{1}{2(b-a)} \int_a^b \left(|\mu_A(x) - \mu_B(x)|^{\alpha} + |\nu_A(x) - \nu_B(x)|^{\alpha} + |\pi_A(x) - \pi_B(x)|^{\alpha} \right) dx \right]^{\frac{1}{\alpha}} \quad (85)$$

$$s_{IFS}^{\alpha}(A, B) = 1 - \left[\frac{1}{2(b-a)} \int_a^b \left(|\mu_A(x) - \mu_B(x)|^{\alpha} + |\nu_A(x) - \nu_B(x)|^{\alpha} + |\pi_A(x) - \pi_B(x)|^{\alpha} \right) dx \right]^{\frac{1}{\alpha}} \quad (86)$$

در [۷] برخی از معیارهای فاصله مبتنی بر معیار هاسدورف، که در واقع توسعه‌هایی از فاصله‌های همینگ و اقلیدسی نرمال شده هستند، به صورت زیر تعریف شده‌اند:

۱- فاصله همینگ نرمال شده مبتنی بر متر هاسدورف:

$$d_{IFS}^{\alpha}(A, B) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \max\{|\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)|, |\nu_A(x_i) - \nu_B(x_i)|\} \quad (87)$$

۲- فاصله اقلیدسی نرمال شده مبتنی بر متر هاسدورف:

$$d_{IFS}^{\alpha}(A, B) = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \max\{(\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i))^2, (\nu_A(x_i) - \nu_B(x_i))^2\} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (88)$$

همچنین، نسخه‌های وزن دار معیارهای (۸۷) و (۸۸) نیز به صورت زیر تعریف می‌شوند:

۱- فاصله همینگ وزن دار مبتنی بر متر هاسدورف:

$$d_{IFS}^{\alpha}(A, B) = \sum_{i=1}^n w_i \max\{|\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)|, |\nu_A(x_i) - \nu_B(x_i)|\} \quad (89)$$

۲- فاصله اقلیدسی وزن دار مبتنی بر متر هاسدورف:

$$d_{IFS}^{\alpha}(A, B) = \left(\sum_{i=1}^n w_i \max\{(\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i))^2, (\nu_A(x_i) - \nu_B(x_i))^2\} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (90)$$

اگر مجموعه مرجع و وزن اعضا پیوسته باشند به صورتی که وزن $x \in X = [a, b]$ ، به شکل

$w(x)$ بوده که $w(x) \in [0, 1]$ و $\int_a^b w(x)dx = 1$ باشد، آنگاه فاصله اقلیدسی وزن دار پیوسته مبتنی بر متر هاسدورف به صورت زیر تعریف می‌شود [۲۵]:

$$d_{IFS}^{\lambda, \nu}(A, B) = \left(\int_a^b w(x) \max\{(\mu_A(x) - \mu_B(x))^{\lambda}, (\nu_A(x) - \nu_B(x))^{\nu}\} dx \right)^{\frac{1}{\lambda \vee \nu}} \quad (91)$$

نسخه توسعه یافته معیار تعریف شده در معادله‌های (۹۰) و (۹۱) نیز به ترتیب به شکل معادله‌های زیر تعریف می‌شوند:

$$d_{IFS}^{\lambda, \nu}(A, B) = \left[\sum_{i=1}^n w_i \max\{(\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i))^{\alpha}, (\nu_A(x_i) - \nu_B(x_i))^{\alpha}\} \right]^{\frac{1}{\alpha}}, \quad \alpha > 0 \quad (92)$$

$$d_{IFS}^{\lambda, \nu}(A, B) = \left[\int_a^b w(x) \max\{(\mu_A(x) - \mu_B(x))^{\alpha}, (\nu_A(x) - \nu_B(x))^{\alpha}\} dx \right]^{\frac{1}{\alpha}}, \quad \alpha > 0 \quad (93)$$

براساس دو معیار فوق، دو معیار شباهت برای مجموعه‌های A و B به صورت زیر تعریف می‌شوند [۲۵]:

$$s_{IFS}^{\lambda, \nu}(A, B) = 1 - \left[\sum_{i=1}^n w_i \max\{(\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i))^{\alpha}, (\nu_A(x_i) - \nu_B(x_i))^{\alpha}\} \right]^{\frac{1}{\alpha}}, \quad \alpha > 0 \quad (94)$$

$$s_{IFS}^{\zeta}(A, B) = 1 - \left[\int_a^b w(x) \max\{(\mu_A(x) - \mu_B(x))^\alpha, (\nu_A(x) - \nu_B(x))^\alpha\} dx \right]^{\frac{1}{\alpha}}, \quad \alpha > 0 \quad (95)$$

اگر برای هر $x \in [a, b]$ $w = (1/n, 1/n, \dots, 1/n)$ و $w(x) = 1/(b-a)$ باشد، آنگاه دو معیار شباهت فوق به ترتیب به شکل معادله‌های زیر تبدیل می‌شوند:

$$s_{IFS}^{\eta}(A, B) = 1 - \frac{1}{n^{\frac{1}{\alpha}}} \left[\sum_{i=1}^n \max\{(\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i))^\alpha, (\nu_A(x_i) - \nu_B(x_i))^\alpha\} \right]^{\frac{1}{\alpha}}, \quad \alpha > 0 \quad (96)$$

$$s_{IFS}^{\lambda}(A, B) = 1 - \frac{1}{(b-a)^{\frac{1}{\alpha}}} \left[\int_a^b \max\{(\mu_A(x) - \mu_B(x))^\alpha, (\nu_A(x) - \nu_B(x))^\alpha\} dx \right]^{\frac{1}{\alpha}}, \quad \alpha > 0 \quad (97)$$

در [۲۲] بیان شده است که معیارهای فاصله d_{IFS}^{ζ} ، d_{IFS}^{η} ، d_{IFS}^{λ} ، d_{IFS}^{χ} و d_{IFS}^{δ} ممکن است در برخی از موارد عملکرد مناسبی نداشته باشند. به منظور غلبه بر مشکل این معیارها، معیار فاصله زیر تعریف شده است:

$$d_{IFS}^{\circ}(A, B) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[\frac{|\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)| + |\nu_A(x_i) - \nu_B(x_i)|}{4} + \frac{\max\{|\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)|, |\nu_A(x_i) - \nu_B(x_i)|\}}{2} \right] \quad (98)$$

همچنین نسخه وزن دار معیار فوق نیز به صورت زیر تعریف شده است:

$$d_{IFS}^{\lambda}(A, B) = \sum_{i=1}^n w_i \left[\frac{|\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)| + |\nu_A(x_i) - \nu_B(x_i)|}{\lambda} + \frac{\max\{|\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)|, |\nu_A(x_i) - \nu_B(x_i)|\}}{\lambda} \right] / \sum_{i=1}^n w_i \quad (99)$$

اگر مجموعه مرجع و وزن عناصر پیوسته باشند، به صورتی که وزن $x \in X = [a, b]$ ، به شکل $w(x) \in [0, 1]$ و $\int_a^b w(x)dx = 1$ باشد، آنگاه نسخه پیوسته معیار d_{IFS}^{λ} به شکل زیر تعریف می شود [۲۵]:

$$d_{IFS}^{\lambda}(A, B) = \int_a^b w(x) \left[\frac{|\mu_A(x) - \mu_B(x)| + |\nu_A(x) - \nu_B(x)|}{\lambda} + \frac{\max\{|\mu_A(x) - \mu_B(x)|, |\nu_A(x) - \nu_B(x)|\}}{\lambda} \right] dx \quad (100)$$

براساس دو معیار فاصله فوق، می توان معیارهای شباهت زیر را برای مجموعه های A و B تعریف کرد:

$$s_{IFS}^{\lambda}(A, B) = 1 - \sum_{i=1}^n w_i \left[\frac{|\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)| + |\nu_A(x_i) - \nu_B(x_i)|}{\lambda} + \frac{\max\{|\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)|, |\nu_A(x_i) - \nu_B(x_i)|\}}{\lambda} \right] \quad (101)$$

$$s_{IFS}^{\lambda \circ}(A, B) = 1 - \int_a^b w(x) \left[\frac{|\mu_A(x) - \mu_B(x)| + |\nu_A(x) - \nu_B(x)|}{\lambda} + \frac{\max\{|\mu_A(x) - \mu_B(x)|, |\nu_A(x) - \nu_B(x)|\}}{\lambda} \right] dx \quad (102)$$

همچنین، نسخه های توسعه یافته دو معیار شباهت فوق، به ترتیب به شکل معادله های زیر تعریف

می‌شوند:

$$s_{IFS}^{\lambda} (A, B) = \lambda - \left[\sum_{i=1}^n w_i \left[\frac{|\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)|^{\alpha} + |\nu_A(x_i) - \nu_B(x_i)|^{\alpha}}{4} + \frac{\max\{|\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)|^{\alpha}, |\nu_A(x_i) - \nu_B(x_i)|^{\alpha}\}}{2} \right] \right]^{\frac{1}{\alpha}}, \quad \alpha > 0. \quad (1.3)$$

$$s_{IFS}^{\lambda} (A, B) = \lambda - \left[\int_a^b w(x) \left[\frac{|\mu_A(x) - \mu_B(x)|^{\alpha} + |\nu_A(x) - \nu_B(x)|^{\alpha}}{4} + \frac{\max\{|\mu_A(x) - \mu_B(x)|^{\alpha}, |\nu_A(x) - \nu_B(x)|^{\alpha}\}}{2} \right] dx \right]^{\frac{1}{\alpha}}, \quad \alpha > 0. \quad (1.4)$$

اگر برای هر $x \in [a, b]$ ، $w = (1/n, 1/n, \dots, 1/n)$ و $w(x) = 1/(b-a)$ باشد، آنگاه دو معیار شباهت فوق به ترتیب به شکل معادله‌های زیر تبدیل می‌شوند:

$$s_{IFS}^{\lambda} (A, B) = \lambda - \frac{\lambda}{n^{\frac{1}{\alpha}}} \left[\sum_{i=1}^n \left[\frac{|\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)|^{\alpha} + |\nu_A(x_i) - \nu_B(x_i)|^{\alpha}}{4} + \frac{\max\{|\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)|^{\alpha}, |\nu_A(x_i) - \nu_B(x_i)|^{\alpha}\}}{2} \right] \right]^{\frac{1}{\alpha}}, \quad \alpha > 0. \quad (1.5)$$

$$s_{IFS}^{\downarrow 4}(A, B) = 1 - \frac{1}{(b-a)^{\frac{1}{\alpha}}} \left[\int_a^b \left[\frac{|\mu_A(x) - \mu_B(x)|^\alpha + |\nu_A(x) - \nu_B(x)|^\alpha}{4} + \frac{\max\{|\mu_A(x) - \mu_B(x)|^\alpha, |\nu_A(x) - \nu_B(x)|^\alpha\}}{2} \right] dx \right]^{\frac{1}{\alpha}}, \quad \alpha > 0. \quad (106)$$

در [۱۳] نیز چندین معیار شباهت برای مجموعه‌های فازی شهودی، به شکل معادله‌های زیر تعریف شده است:

$$s_{IFS}^{\downarrow 5}(A, B) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\sqrt{1 - \frac{|\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)| - (\nu_A(x_i) - \nu_B(x_i))|}{2}} \times \sqrt{1 - \max(|\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)|, |\nu_A(x_i) - \nu_B(x_i)|)} \right) \quad (107)$$

$$s_{IFS}^{\downarrow 6}(A, B) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\sqrt{1 - \frac{|\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)| - (\nu_A(x_i) - \nu_B(x_i))|}{2}} \times \sqrt{\frac{e^{-\max(|\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)|, |\nu_A(x_i) - \nu_B(x_i)|)} - e^{-1}}{1 - e^{-1}}} \right) \quad (108)$$

$$s_{IFS}^{\downarrow 7}(A, B) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\sqrt{1 - \frac{|\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)| - (\nu_A(x_i) - \nu_B(x_i))|}{2}} \times \sqrt{\frac{1 - \max(|\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)|, |\nu_A(x_i) - \nu_B(x_i)|)}{1 + \max(|\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)|, |\nu_A(x_i) - \nu_B(x_i)|)}} \right) \quad (109)$$

مثال ۱۰.۳. [۲۲] (مثالی از تشخیص الگو) پنج نوع ماده معدنی ترکیبی، با استفاده از پنج مجموعه فازی شهودی A_1, A_2, A_3, A_4 و A_5 در فضای ویژگی $X = \{x_1, \dots, x_6\}$ مطابق با جدول

۱ در نظر گرفته شده‌اند. حال، با در نظر گرفتن ماده معدنی ترکیبی B ، باید تشخیص داده شود که این ماده معدنی ترکیبی به کدامیک از انواع فوق تعلق دارد. با استفاده از معیار فاصله d_{IFS}^ν ، نتایج زیر به دست می‌آیند:

$$d_{IFS}^\nu(A_1, B) = 0.230, d_{IFS}^\nu(A_2, B) = 0.270, d_{IFS}^\nu(A_3, B) = 0.509,$$

$$d_{IFS}^\nu(A_4, B) = 0.165, d_{IFS}^\nu(A_5, B) = 0.138$$

با مشاهده نتایج به دست آمده، واضح است که ماده معدنی ترکیبی B به نوع A_5 تعلق دارد.

جدول ۱: نمایش مواد معدنی

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
$\mu_{A_1}(x)$	0.739	0.33	0.188	0.492	0.20	0.739
$\nu_{A_1}(x)$	0.125	0.818	0.626	0.358	0.628	0.125
$\mu_{A_2}(x)$	0.124	0.30	0.48	0.136	0.19	0.393
$\nu_{A_2}(x)$	0.665	0.825	0.800	0.648	0.823	0.653
$\mu_{A_3}(x)$	0.449	0.662	1.000	1.000	1.000	1.000
$\nu_{A_3}(x)$	0.387	0.298	0.000	0.000	0.000	0.000
$\mu_{A_4}(x)$	0.280	0.521	0.470	0.295	0.188	0.735
$\nu_{A_4}(x)$	0.715	0.368	0.423	0.658	0.806	0.118
$\mu_{A_5}(x)$	0.326	1.000	0.182	0.156	0.49	0.675
$\nu_{A_5}(x)$	0.452	0.000	0.725	0.765	0.896	0.263
$\mu_B(x)$	0.629	0.524	0.210	0.218	0.69	0.658
$\nu_B(x)$	0.303	0.356	0.689	0.753	0.876	0.256

۵.۳ معیارهای فاصله و شباهت برای مجموعه‌های فازی مردد

(در این مقاله، به منظور سهولت در نام‌گذاری، فاصله و شباهت برای مجموعه‌های فازی بازه مقدار به ترتیب با نمادهای d_{HFS} و s_{HFS} نمایش داده شده‌اند) در [۲۶] معیارهای فاصله و شباهت متنوعی برای مجموعه‌های فازی مردد معرفی شده است که در این بخش به بررسی برخی از این معیارهای پرداخته شده است.

پیش از بررسی معیارهای مذکور باید توجه داشت که ممکن است تعداد مقادیر در عناصر فازی مردد مختلف، متفاوت باشد، از اینرو فرض می‌شود که $l(h_E(x))$ تعداد مقادیر در عنصر فازی

مردد $h_E(x)$ باشد. همچنین، عناصر موجود در $h_E(x)$ به صورت نزولی مرتب شده و $h_E^{\sigma(j)}(x)$ ، j -امین بزرگترین مقدار در $h_E(x)$ را نشان می‌دهد. علاوه بر این، با فرض اینکه M و N دو مجموعه فازی مردد باشند، در بسیاری از موارد، $l(h_M(x_i)) \neq l(h_N(x_i))$ می‌باشد، از اینرو برای سادگی، فرض می‌شود که برای هر x در X ، $l_{x_i} = \max\{l(h_M(x_i)), l(h_N(x_i))\}$ باشد. به منظور انجام یک مقایسه صحیح، باید عناصر فازی مردد، تعداد مقادیر برابر داشته باشند. برای این منظور، عنصر مرددی که تعداد مقادیر کمتری دارد، گسترش پیدا می‌کند. بهترین روش برای گسترش عنصر مورد نظر، اضافه کردن مقادیری یکسان به عنصر مذکور است. انتخاب این مقدار، بستگی به ریسک تصمیم‌گیرندگان دارد. ممکن است تصمیم‌گیرندگان خوش‌بین، بزرگ‌ترین مقدار و تصمیم‌گیرندگان بدبین، کوچک‌ترین مقدار را انتخاب کنند. به عنوان مثال، با فرض اینکه $h_M(x_i) = \{0.1, 0.2, 0.3\}$ و $h_N(x_i) = \{0.4, 0.5\}$ دو عنصر فازی مردد باشند، واضح است که باید $h_N(x_i)$ گسترش پیدا کند. ممکن است این گسترش، به صورت $h_N(x_i) = \{0.4, 0.5, 0.5\}$ یا $h_N(x_i) = \{0.4, 0.4, 0.5\}$ باشد. در [۲۶] فرض شده است که تصمیم‌گیرندگان بدبین هستند.

در ادامه، به بررسی برخی از معیارهای فاصله و شباهت برای این مجموعه‌ها پرداخته شده است:

بر اساس معیارهای فاصله همینگ و اقلیدسی شناخته شده، معیارهای فاصله همینگ و اقلیدسی

نرمال شده مردد به صورت معادله‌های (۱۱۰) و (۱۱۱) تعریف می‌شوند:

$$d_{HFS}^1(M, N) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{l_{x_i}} \sum_{j=1}^{l_{x_i}} |h_M^{\sigma(j)}(x_i) - h_N^{\sigma(j)}(x_i)| \right] \quad (110)$$

$$d_{HFS}^2(M, N) = \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{l_{x_i}} \sum_{j=1}^{l_{x_i}} |h_M^{\sigma(j)}(x_i) - h_N^{\sigma(j)}(x_i)|^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (111)$$

همچنین، می‌توان معیارهای معرفی در معادله‌های (۱۱۰) و (۱۱۱) را به یک معیار فاصله نرمال

شده مورد توسعه یافته، همچون معیار زیر توسعه داد:

$$d_{HFS}^{\lambda}(M, N) = \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{l_{x_i}} \sum_{j=1}^{l_{x_i}} |h_M^{\sigma(j)}(x_i) - h_N^{\sigma(j)}(x_i)|^{\lambda} \right) \right]^{\frac{1}{\lambda}}, \quad \lambda > 0 \quad (112)$$

در حالت خاص، اگر $\lambda = 1$ باشد، معیار فوق به معیار فاصله همینگ نرمال شده مورد و در صورتی که $\lambda = 2$ باشد، به معیار فاصله اقلیدسی نرمال شده مورد تقلیل می‌یابد. از طرف دیگر، با در نظر گرفتن متر هاسدورف به عنوان معیار فاصله، فاصله هاسدورف نرمال شده مورد توسعه یافته به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$d_{HFS}^{\lambda}(M, N) = \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \max_j |h_M^{\sigma(j)}(x_i) - h_N^{\sigma(j)}(x_i)|^{\lambda} \right]^{\frac{1}{\lambda}}, \quad \lambda > 0 \quad (113)$$

دو حالت خاص از فاصله هاسدورف نرمال شده توسعه یافته به صورت زیر بیان می‌شوند:

۱- اگر $\lambda = 1$ باشد، آنگاه معادله ۱۱۳ به فاصله همینگ-هاسدورف نرمال شده مورد، به صورت معادله زیر تبدیل می‌گردد:

$$d_{HFS}^1(M, N) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \max_j |h_M^{\sigma(j)}(x_i) - h_N^{\sigma(j)}(x_i)| \quad (114)$$

۲- اگر $\lambda = 2$ باشد، آنگاه معادله ۱۱۳ به فاصله اقلیدسی-هاسدورف نرمال شده مورد، به صورت معادله زیر تبدیل می‌گردد:

$$d_{HFS}^2(M, N) = \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \max_j |h_M^{\sigma(j)}(x_i) - h_N^{\sigma(j)}(x_i)|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (115)$$

با ترکیب معیارهای فوق، فاصله‌های همینگ نرمال شده مورد ترکیبی، اقلیدسی نرمال شده مورد ترکیبی و فاصله نرمال شده مورد ترکیبی توسعه یافته، به ترتیب به صورت معادلات زیر تعریف

شده‌اند:

$$d_{HFS}^{\vee}(M, N) = \frac{1}{\vee n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{l_{x_i}} \sum_{j=1}^{l_{x_i}} |h_M^{\sigma(j)}(x_i) - h_N^{\sigma(j)}(x_i)| + \max_j |h_M^{\sigma(j)}(x_i) - h_N^{\sigma(j)}(x_i)| \right) \quad (116)$$

$$d_{HFS}^{\wedge}(M, N) = \left[\frac{1}{\vee n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{l_{x_i}} \sum_{j=1}^{l_{x_i}} |h_M^{\sigma(j)}(x_i) - h_N^{\sigma(j)}(x_i)|^{\vee} + \max_j |h_M^{\sigma(j)}(x_i) - h_N^{\sigma(j)}(x_i)|^{\vee} \right) \right]^{\frac{1}{\vee}} \quad (117)$$

$$d_{HFS}^{\lambda}(M, N) = \left[\frac{1}{\vee n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{l_{x_i}} \sum_{j=1}^{l_{x_i}} |h_M^{\sigma(j)}(x_i) - h_N^{\sigma(j)}(x_i)|^{\lambda} + \max_j |h_M^{\sigma(j)}(x_i) - h_N^{\sigma(j)}(x_i)|^{\lambda} \right) \right]^{\frac{1}{\lambda}}, \quad \lambda > 0. \quad (118)$$

با فرض اینکه w_i وزن $x_i \in X$ به ازای $i = 1, 2, \dots, n$ و با شرایط $w_i \in [0, 1]$ و $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ باشد، فاصله‌های وزن‌دار مورد توسعه‌یافته و هاسدورف وزن‌دار مورد توسعه‌یافته به ترتیب به شکل معادله‌های (۱۱۹) و (۱۲۰) تعریف می‌شوند.

(۱۱۹)

$$d_{HFS}^{\circ}(M, N) = \left[\sum_{i=1}^n w_i \left(\frac{1}{l_{x_i}} \sum_{j=1}^{l_{x_i}} |h_M^{\sigma(j)}(x_i) - h_N^{\sigma(j)}(x_i)|^{\lambda} \right) \right]^{\frac{1}{\lambda}}, \quad \lambda > 0.$$

$$d_{HFS}^{\backslash}(M, N) = \left[\sum_{i=1}^n w_i \max_j |h_M^{\sigma(j)}(x_i) - h_N^{\sigma(j)}(x_i)|^{\lambda} \right]^{\frac{1}{\lambda}}, \quad \lambda > 0. \quad (120)$$

در حالت خاص با قرار دادن $\lambda = 1$ ، فاصله‌های همینگ وزن‌دار مردد و همینگ-هاسدورف وزن‌دار مردد به ترتیب به شکل معادله‌های (۱۲۱) و (۱۲۲) و با قرار دادن $\lambda = 2$ ، فاصله‌های اقلیدسی وزن‌دار مردد و اقلیدسی-هاسدورف وزن‌دار مردد به ترتیب به شکل معادله‌های (۱۲۳) و (۱۲۴) نمایش داده می‌شوند.

$$d_{HFS}^{\lambda 1}(M, N) = \sum_{i=1}^n w_i \left[\frac{1}{l_{x_i}} \sum_{j=1}^{l_{x_i}} |h_M^{\sigma(j)}(x_i) - h_N^{\sigma(j)}(x_i)| \right] \quad (121)$$

$$d_{HFS}^{\lambda 2}(M, N) = \sum_{i=1}^n w_i \max_j |h_M^{\sigma(j)}(x_i) - h_N^{\sigma(j)}(x_i)| \quad (122)$$

$$d_{HFS}^{\lambda 3}(M, N) = \left[\sum_{i=1}^n w_i \left(\frac{1}{l_{x_i}} \sum_{j=1}^{l_{x_i}} |h_M^{\sigma(j)}(x_i) - h_N^{\sigma(j)}(x_i)|^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (123)$$

$$d_{HFS}^{\lambda 5}(M, N) = \left[\sum_{i=1}^n w_i \max_j |h_M^{\sigma(j)}(x_i) - h_N^{\sigma(j)}(x_i)|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (124)$$

علاوه بر این، با ترکیب فاصله‌های وزن‌دار مردد توسعه یافته و هاسدورف وزن‌دار مردد توسعه یافته، فاصله وزن‌دار مردد ترکیبی توسعه یافته به صورت معادله زیر معرفی شده است:

$$d_{HFS}^{\lambda 6}(M, N) = \left[\sum_{i=1}^n w_i \left(\frac{1}{l_{x_i}} \sum_{j=1}^{l_{x_i}} |h_M^{\sigma(j)}(x_i) - h_N^{\sigma(j)}(x_i)|^\lambda + \max_j |h_M^{\sigma(j)}(x_i) - h_N^{\sigma(j)}(x_i)|^\lambda \right) \right]^{\frac{1}{\lambda}}, \quad \lambda > 0 \quad (125)$$

در حالت خاص، با قرار دادن $\lambda = 1$ و $\lambda = 2$ معیار فاصله فوق، به فاصله همینگ وزن‌دار

مردد ترکیبی و فاصله اقلیدسی وزن دار مردد ترکیبی به ترتیب به شکل معادله‌های ۱۲۶ و ۱۲۷ تبدیل می‌شود:

$$d_{HFS}^{\vee}(M, N) = \sum_{i=1}^n w_i \left(\frac{1}{l_{x_i}} \sum_{j=1}^{l_{x_i}} |h_M^{\sigma(j)}(x_i) - h_N^{\sigma(j)}(x_i)| + \max_j |h_M^{\sigma(j)}(x_i) - h_N^{\sigma(j)}(x_i)| \right) \quad (126)$$

$$d_{HFS}^{\wedge}(M, N) = \left[\sum_{i=1}^n w_i \left(\frac{1}{l_{x_i}} \sum_{j=1}^{l_{x_i}} |h_M^{\sigma(j)}(x_i) - h_N^{\sigma(j)}(x_i)|^2 + \max_j |h_M^{\sigma(j)}(x_i) - h_N^{\sigma(j)}(x_i)|^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (127)$$

تمامی معیارهای فاصله‌ای که تاکنون برای مجموعه‌های فازی مردد مورد بررسی قرار گرفت، معیارهایی گسسته می‌باشند. در صورتی که مجموعه مرجع و وزن‌های عناصر پیوسته باشند، به طوری که $w(x)$ وزن عنصر $x \in X = [a, b]$ با شرایط $w(x) \in [0, 1]$ و $\int_a^b w(x) dx = 1$ باشد، فاصله‌های همینگ وزن دار مردد پیوسته، اقلیدسی وزن دار مردد پیوسته و فاصله وزن دار مردد پیوسته توسعه یافته به ترتیب به صورت معادله‌های زیر معرفی شده‌اند:

$$d_{HFS}^{\vee}(M, N) = \int_a^b w(x) \left(\frac{1}{l_x} \sum_{j=1}^{l_x} |h_M^{\sigma(j)}(x) - h_N^{\sigma(j)}(x)| \right) dx \quad (128)$$

$$d_{HFS}^{\wedge}(M, N) = \left[\int_a^b w(x) \left(\frac{1}{l_x} \sum_{j=1}^{l_x} |h_M^{\sigma(j)}(x) - h_N^{\sigma(j)}(x)|^2 \right) dx \right]^{\frac{1}{2}} \quad (129)$$

$$d_{HFS}^{\lambda}(M, N) = \left[\int_a^b w(x) \left(\frac{1}{l_x} \sum_{j=1}^{l_x} |h_M^{\sigma(j)}(x) - h_N^{\sigma(j)}(x)|^{\lambda} \right) dx \right]^{\frac{1}{\lambda}}, \quad \lambda > 0 \quad (130)$$

در صورتی که برای هر $x \in [a, b]$ ، $w(x) = 1/(b-a)$ باشد، فاصله‌های همینگ وزن‌دار مردد پیوسته، اقلیدسی وزن‌دار مردد پیوسته و فاصله وزن‌دار مردد پیوسته توسعه یافته به ترتیب به فاصله‌های همینگ نرمال مردد پیوسته، اقلیدسی نرمال مردد پیوسته و فاصله نرمال مردد پیوسته توسعه یافته به شکل معادله‌های زیر تقلیل می‌یابند:

$$d_{HFS}^{\lambda}(M, N) = \frac{1}{b-a} \int_a^b \left(\frac{1}{l_x} \sum_{j=1}^{l_x} |h_M^{\sigma(j)}(x) - h_N^{\sigma(j)}(x)| \right) dx \quad (131)$$

$$d_{HFS}^{\lambda}(M, N) = \left[\frac{1}{b-a} \int_a^b \left(\frac{1}{l_x} \sum_{j=1}^{l_x} |h_M^{\sigma(j)}(x) - h_N^{\sigma(j)}(x)|^2 \right) dx \right]^{\frac{1}{2}} \quad (132)$$

$$d_{HFS}^{\lambda}(M, N) = \left[\frac{1}{b-a} \int_a^b \left(\frac{1}{l_x} \sum_{j=1}^{l_x} |h_M^{\sigma(j)}(x) - h_N^{\sigma(j)}(x)|^{\lambda} \right) dx \right]^{\frac{1}{\lambda}}, \quad \lambda > 0 \quad (133)$$

با استفاده از متر هاسدورف، فاصله هاسدورف وزن‌دار مردد پیوسته توسعه یافته به صورت زیر تعریف شده است:

$$d_{HFS}^{\lambda}(M, N) = \left[\int_a^b w(x) \max_j |h_M^{\sigma(j)}(x) - h_N^{\sigma(j)}(x)|^{\lambda} dx \right]^{\frac{1}{\lambda}}, \quad \lambda > 0 \quad (134)$$

در حالت خاص، با قرار دادن $\lambda = 1$ و $\lambda = 2$ فاصله فوق به ترتیب به فاصله همینگ-هاسدورف وزن‌دار مردد پیوسته و فاصله اقلیدسی-هاسدورف وزن‌دار مردد پیوسته به صورت تقلیل می‌یابد:

$$d_{HFS}^{\lambda}(M, N) = \int_a^b w(x) \max_j |h_M^{\sigma(j)}(x) - h_N^{\sigma(j)}(x)| dx \quad (135)$$

$$d_{HFS}^{\lambda\gamma}(M, N) = \left[\int_a^b w(x) \max_j |h_M^{\sigma(j)}(x) - h_N^{\sigma(j)}(x)|^\gamma dx \right]^{\frac{1}{\gamma}} \quad (136)$$

مجددا، در صورتی که برای هر $x \in [a, b]$ ، $w(x) = 1/(b-a)$ باشد، فاصله‌های وزن‌دار مردد پیوسته توسعه یافته، همینگ-هاسدورف وزن‌دار مردد پیوسته و اقلیدسی-هاسدورف وزن‌دار مردد پیوسته، به ترتیب به فاصله‌های نرمال شده مردد پیوسته توسعه یافته، همینگ-هاسدورف نرمال شده مردد پیوسته و اقلیدسی-هاسدورف نرمال شده مردد پیوسته به شکل معادله‌های زیر تبدیل می‌شوند:

$$d_{HFS}^{\lambda\lambda}(M, N) = \left[\frac{1}{b-a} \int_a^b \max_j |h_M^{\sigma(j)}(x) - h_N^{\sigma(j)}(x)|^\lambda dx \right]^{\frac{1}{\lambda}}, \quad \lambda > 0 \quad (137)$$

$$d_{HFS}^{\lambda 1}(M, N) = \frac{1}{b-a} \int_a^b \max_j |h_M^{\sigma(j)}(x) - h_N^{\sigma(j)}(x)| dx \quad (138)$$

$$d_{HFS}^{\lambda 0}(M, N) = \left[\frac{1}{b-a} \int_a^b \max_j |h_M^{\sigma(j)}(x) - h_N^{\sigma(j)}(x)|^\lambda dx \right]^{\frac{1}{\lambda}} \quad (139)$$

مشابه با فاصله وزن‌دار مردد ترکیبی توسعه یافته، فاصله وزن‌دار مردد پیوسته ترکیبی توسعه یافته به صورت زیر تعریف شده است:

$$d_{HFS}^{\lambda\lambda}(M, N) = \left[\int_a^b w(x) \left(\frac{1}{\gamma l_i} \sum_{j=1}^{l_i} |h_M^{\sigma(j)}(x) - h_N^{\sigma(j)}(x)|^\lambda + \frac{1}{\gamma} \max_j |h_M^{\sigma(j)}(x) - h_N^{\sigma(j)}(x)|^\lambda \right) dx \right]^{\frac{1}{\lambda}}, \quad \lambda > 0 \quad (140)$$

مجددا، با در نظر گرفتن $w(x) = 1/(b-a)$ برای هر $x \in [a, b]$ ، فاصله وزن‌دار مردد پیوسته ترکیبی توسعه یافته به فاصله نرمال شده مردد پیوسته ترکیبی توسعه یافته به صورت زیر تبدیل

می‌شود:

$$d_{HFS}^{\lambda, \lambda}(M, N) = \left[\frac{1}{b-a} \int_a^b \left(\frac{1}{\sqrt[l_x]{l_x}} \sum_{j=1}^{l_x} |h_M^{\sigma(j)}(x) - h_N^{\sigma(j)}(x)|^\lambda + \frac{1}{\sqrt[l_x]{l_x}} \max_j |h_M^{\sigma(j)}(x) - h_N^{\sigma(j)}(x)|^\lambda \right) \right]^{\frac{1}{\lambda}}, \quad \lambda > 0 \quad (141)$$

با قرار دادن $\lambda = 1$ و $\lambda = 2$ در معادله (۱۴۰)، به ترتیب فاصله‌های همینگ وزن‌دار مردد پیوسته ترکیبی و اقلیدسی وزن‌دار مردد پیوسته ترکیبی به شکل معادله‌های زیر نمایش داده شده و با در نظر گرفتن $w(x) = 1/(b-a)$ برای هر $x \in [a, b]$ ، فاصله‌های همینگ نرمال شده مردد پیوسته ترکیبی و اقلیدسی نرمال شده مردد پیوسته ترکیبی به شکل معادله‌های (۱۴۴) و (۱۴۵) تبدیل می‌شوند:

$$d_{HFS}^{\lambda, \lambda}(M, N) = \int_a^b w(x) \left(\frac{1}{\sqrt[l_x]{l_x}} \sum_{j=1}^{l_x} |h_M^{\sigma(j)}(x) - h_N^{\sigma(j)}(x)| + \frac{1}{\sqrt[l_x]{l_x}} \max_j |h_M^{\sigma(j)}(x) - h_N^{\sigma(j)}(x)| \right) \quad (142)$$

$$d_{HFS}^{\lambda, \lambda}(M, N) = \left[\int_a^b w(x) \left(\frac{1}{\sqrt[l_x]{l_x}} \sum_{j=1}^{l_x} |h_M^{\sigma(j)}(x) - h_N^{\sigma(j)}(x)|^\lambda + \frac{1}{\sqrt[l_x]{l_x}} \max_j |h_M^{\sigma(j)}(x) - h_N^{\sigma(j)}(x)|^\lambda \right) \right]^{\frac{1}{\lambda}} \quad (143)$$

$$d_{HFS}^{\lambda, \lambda}(M, N) = \frac{1}{b-a} \int_a^b \left(\frac{1}{\sqrt[l_x]{l_x}} \sum_{j=1}^{l_x} |h_M^{\sigma(j)}(x) - h_N^{\sigma(j)}(x)| + \frac{1}{\sqrt[l_x]{l_x}} \max_j |h_M^{\sigma(j)}(x) - h_N^{\sigma(j)}(x)| \right) \quad (144)$$

$$d_{HFS}^{\sigma}(M, N) = \left[\frac{1}{b-a} \int_a^b \left(\frac{1}{\sqrt{l_x}} \sum_{j=1}^{l_x} |h_M^{\sigma(j)}(x) - h_N^{\sigma(j)}(x)|^2 + \frac{1}{\sqrt{l_x}} \max_j |h_M^{\sigma(j)}(x) - h_N^{\sigma(j)}(x)|^2 \right) dx \right]^{\frac{1}{\sqrt{l_x}}} \quad (145)$$

مثال ۱۱.۳. [۲۶] انرژی یک عامل ضروری برای توسعه اقتصادی-اجتماعی جوامع است، بنابراین سیاست انرژی درست، بر رشد اقتصادی و محیطی جامعه تاثیرگذار بوده و در نتیجه انتخاب یک سیاست مناسب، امری مهم است. فرض کنید پنج گزینه (پروژه انرژی) $A_i, (i = 1, 2, 3, 4, 5)$ وجود دارد، هر گزینه شامل چهار ویژگی P_1 : تکنولوژیکی، P_2 : محیطی، P_3 : اجتماعی-سیاسی و P_4 : اقتصادی می‌باشد. بردار وزن به صورت $w = (0.15, 0.3, 0.2, 0.35)^T$ در نظر گرفته شده است. از چند کارشناس خواسته شده تا نظر خود را در مورد عملکرد این گزینه‌ها بیان کنند. ارزیابی‌های مختلف یک گزینه نسبت به ویژگی‌ها را می‌توان به صورت یک مجموعه فازی مردد در نظر گرفت. نتیجه ارزیابی کارشناسان به صورت یک ماتریس تصمیم فازی مردد در جدول ۲ نشان داده شده است.

جدول ۲: ماتریس تصمیم فازی مردد

	P_1	P_2	P_3	P_4
A_1	{0.5, 0.4, 0.3}	{0.9, 0.8, 0.7, 0.1}	{0.5, 0.4, 0.2}	{0.9, 0.6, 0.5, 0.3}
A_2	{0.5, 0.3}	{0.9, 0.7, 0.6, 0.5, 0.2}	{0.8, 0.6, 0.5, 0.1}	{0.7, 0.3, 0.4}
A_3	{0.7, 0.6}	{0.9, 0.6}	{0.7, 0.5, 0.3}	{0.6, 0.4}
A_4	{0.8, 0.7, 0.4, 0.3}	{0.7, 0.4, 0.2}	{0.8, 0.1}	{0.8, 0.8, 0.6}
A_5	{0.9, 0.7, 0.6, 0.3, 0.1}	{0.8, 0.7, 0.6, 0.4}	{0.9, 0.8, 0.7}	{0.9, 0.7, 0.6, 0.3}

با فرض اینکه گزینه ایده‌آل به صورت $A^* = \{1\}$ تعریف شود، به منظور یافتن گزینه مناسب، باید فاصله بین هر گزینه تا گزینه ایده‌آل محاسبه گردد. در صورت استفاده از معیارهای فاصله وزن‌دار مردد توسعه یافته، هاسدورف وزن‌دار مردد توسعه یافته و وزن‌دار مردد ترکیبی توسعه یافته، رتبه‌بندی گزینه‌ها به ترتیب در جدول‌های ۳ تا ۵ ارائه شده است.

جدول ۳: نتایج به دست آمده با استفاده از معیار فاصله وزن دار مردد توسعه یافته

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	رتبه بندی
$\lambda = 1$	۰,۴۷۹۹	۰,۵۰۲۷	۰,۴۰۲۵	۰,۴۲۹۲	۰,۳۵۵۸	$A_5 > A_3 > A_4 > A_1 > A_2$
$\lambda = 2$	۰,۵۳۷۸	۰,۵۴۵۱	۰,۴۳۶۶	۰,۵۰۵۲	۰,۴۱۲۹	$A_5 > A_3 > A_4 > A_1 > A_2$
$\lambda = 6$	۰,۶۵۹۹	۰,۶۴۷۶	۰,۵۱۵۶	۰,۶۷۰۴	۰,۵۶۹۹	$A_3 > A_5 > A_2 > A_1 > A_4$
$\lambda = 10$	۰,۷۲۱۳	۰,۷۰۴۶	۰,۵۶۰۷	۰,۷۳۷۳	۰,۶۵۳۷	$A_3 > A_5 > A_2 > A_1 > A_4$

جدول ۴: نتایج به دست آمده با استفاده از معیار فاصله هاسدورف وزن دار مردد توسعه یافته

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	رتبه بندی
$\lambda = 1$	۰,۷۸۰۰	۰,۷۷۰۰	۰,۵۳۰۰	۰,۶۶۵۰	۰,۶۲۰۰	$A_3 > A_5 > A_4 > A_2 > A_1$
$\lambda = 2$	۰,۷۸۴۹	۰,۷۷۴۰	۰,۵۴۴۱	۰,۶۹۵۳	۰,۶۴۷۳	$A_3 > A_5 > A_4 > A_2 > A_1$
$\lambda = 6$	۰,۸۰۴۳	۰,۷۹۰۴	۰,۵۸۸۹	۰,۷۶۷۳	۰,۷۱۶۳	$A_3 > A_5 > A_4 > A_2 > A_1$
$\lambda = 10$	۰,۸۲۱۶	۰,۸۰۶۳	۰,۶۱۵۶	۰,۷۹۹۱	۰,۷۵۹۷	$A_3 > A_5 > A_4 > A_2 > A_1$

جدول ۵: نتایج به دست آمده با استفاده از معیار فاصله وزن دار مردد ترکیبی توسعه یافته

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	رتبه بندی
$\lambda = 1$	۰,۶۳۰۰	۰,۶۳۶۳	۰,۴۶۶۲	۰,۵۴۷۱	۰,۴۸۷۹	$A_3 > A_5 > A_4 > A_1 > A_2$
$\lambda = 2$	۰,۶۶۱۳	۰,۶۵۹۵	۰,۴۹۰۳	۰,۶۰۰۲	۰,۵۳۰۱	$A_3 > A_5 > A_4 > A_2 > A_1$
$\lambda = 6$	۰,۷۳۲۱	۰,۷۱۹۰	۰,۵۵۲۳	۰,۷۱۸۸	۰,۶۴۳۱	$A_3 > A_5 > A_4 > A_2 > A_1$
$\lambda = 10$	۰,۷۶۲۸	۰,۷۴۷۵	۰,۵۷۴۸	۰,۷۵۲۳	۰,۶۸۵۰	$A_3 > A_5 > A_2 > A_4 > A_1$

۱.۵.۳ معیارهای فاصله شامل درج تردید برای مجموعه‌های فازی مردد

در [۳۱] به این نکته اشاره شده است که ممکن است معیارهای فاصله معرفی شده در [۲۶] در برخی از موارد عملکرد مناسبی نداشته باشند. به عنوان مثال، اگر $x_i \in M = \{ \langle x_i, \{0,3,0,5\} \rangle \mid x_i \in X \}$ و $N = \{ \langle x_i, \{0,2,0,3\} \rangle \mid x_i \in X \}$ ، X سه مجموعه فازی مردد بر X باشند، با استفاده از معیارهای فاصله معرفی شده در [۲۶]، نتیجه می‌شود که فاصله بین M و N با فاصله بین M و Q یکسان می‌باشد. بنابراین، در چنین مواردی نمی‌توان با استفاده از فاصله‌های مذکور مقایسه مناسبی بین مجموعه‌های فازی مردد انجام داد. به منظور غلبه بر این مشکل، در [۳۱] یک اندیس تردید جدید برای مجموعه‌های فازی مردد در نظر

گرفته شده و بر اساس آن معیارهای فاصله و شباهت جدیدی برای این مجموعه ها معرفی شده است. در [۳۱]، به منظور اندازه‌گیری انحراف هر عنصر فازی مردد در هر مجموعه فازی مردد، یک اندیس تردید به صورت تعریف زیر ارائه شده است.

تعریف ۱۲.۳. [۳۱] با فرض اینکه H یک مجموعه فازی مردد بر مجموعه مرجع X باشد، اندیس تردید x در H به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tilde{h}_H(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{\binom{l_x}{\nu}} \sum_{k>j=1}^{l_x} (h_H^{\sigma(k)}(x) - h_H^{\sigma(j)}(x))^2}, & l_x > 1 \\ 0, & l_x = 1 \end{cases} \quad (146)$$

که l_x تعداد مقادیر در $h_H(x)$ بوده و $\binom{l_x}{\nu} = \frac{1}{\nu} l_x \times (l_x - 1)$ می‌باشد.

بنابراین، اندیس تردید مجموعه فازی مردد H به صورت زیر تعریف شده است:

$$\tilde{h}(H) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \tilde{h}_H(x_i) \quad (147)$$

سپس، با در نظر گرفتن اندیس تردید فوق، معیارهای فاصله جدیدی برای مجموعه‌های فازی مردد ارائه شده‌اند. به عنوان مثال، فرمول توسعه یافته جدید از فاصله نرمال فازی مردد بین مجموعه‌های فازی مردد M و N به صورت زیر ارائه شده است:

$$d_{HFS}^{\lambda, \nu}(M, N) = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\phi_1}{l_{x_i}} \sum_{j=1}^{l_{x_i}} |h_M^{\sigma(j)}(x_i) - h_N^{\sigma(j)}(x_i)|^\lambda + \phi_2 |h_M(x_i) - h_N(x_i)|^\lambda \right) \right)^{\frac{1}{\lambda}} \quad (148)$$

که $\phi_1 \geq \phi_2$ و $\phi_1 + \phi_2 = 1$ ، $\phi_1, \phi_2 \in [0, 1]$ ، $\lambda > 0$

معیار فوق با مقادیر متفاوت λ ، ϕ_1 و ϕ_2 به نسخه‌های مختلفی تقلیل خواهد یافت که در ادامه به برخی از آنها خواهیم پرداخت. برای آسانی، فرض می‌کنیم $\phi_1 = \phi_2 = \frac{1}{2}$ باشد. در اینصورت،

معیار فوق به فاصله نرمال فازی مجدد توسعه یافته بهبود یافته به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$d_{HFS}^{\lambda}(M, N) = \left(\frac{1}{\lambda n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{l_{x_i}} \sum_{j=1}^{l_{x_i}} |h_M^{\sigma(j)}(x_i) - h_N^{\sigma(j)}(x_i)|^{\lambda} + |\tilde{h}_M(x_i) - \tilde{h}_N(x_i)|^{\lambda} \right) \right)^{\frac{1}{\lambda}} \quad (149)$$

علاوه بر این، با قرار دادن $\lambda = 1$ و $\lambda = 2$ معیار فوق به ترتیب به فاصله همینگ نرمال فازی مجدد بهبود یافته و فاصله اقلیدسی نرمال فازی مجدد بهبود یافته به ترتیب به صورت معادله‌های زیر تبدیل می‌شود:

$$d_{HFS}^{\lambda}(M, N) = \frac{1}{\lambda n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{l_{x_i}} \sum_{j=1}^{l_{x_i}} |h_M^{\sigma(j)}(x_i) - h_N^{\sigma(j)}(x_i)| + |\tilde{h}_M(x_i) - \tilde{h}_N(x_i)| \right) \quad (150)$$

$$d_{HFS}^{\lambda}(M, N) = \left(\frac{1}{\lambda n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{l_{x_i}} \sum_{j=1}^{l_{x_i}} (h_M^{\sigma(j)}(x_i) - h_N^{\sigma(j)}(x_i))^{\lambda} + (\tilde{h}_M(x_i) - \tilde{h}_N(x_i))^{\lambda} \right) \right)^{\frac{1}{\lambda}} \quad (151)$$

با فرض اینکه w_i وزن $x_i \in X$ به ازای $i = 1, 2, \dots, n$ و با شرایط $w_i \in [0, 1]$ و $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ باشد، معیار فاصله وزن‌دار فازی مجدد توسعه یافته به صورت زیر تعریف شده

است:

$$d_{HFS}^{\phi_1}(M, N) = \left(\sum_{i=1}^n w_i \left(\frac{\phi_1}{l_{x_i}} \sum_{j=1}^{l_{x_i}} |h_M^{\sigma(j)}(x_i) - h_N^{\sigma(j)}(x_i)|^\lambda + \phi_2 |\bar{h}_M(x_i) - \bar{h}_N(x_i)|^\lambda \right) \right)^{\frac{1}{\lambda}} \quad (152)$$

مجدداً با فرض $\frac{1}{\lambda} = \phi_1 = \phi_2$ ، معیار فوق به معیار فاصله وزن دار فازی مجدد توسعه یافته به صورت زیر تبدیل خواهد شد:

$$d_{HFS}^{\lambda}(M, N) = \left(\frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^n w_i \left(\frac{1}{l_{x_i}} \sum_{j=1}^{l_{x_i}} |h_M^{\sigma(j)}(x_i) - h_N^{\sigma(j)}(x_i)|^\lambda + |\bar{h}_M(x_i) - \bar{h}_N(x_i)|^\lambda \right) \right)^{\frac{1}{\lambda}} \quad (153)$$

علاوه بر این، با قرار دادن $\lambda = 1$ و $\lambda = 2$ معیار فوق به ترتیب به فاصله همینگ وزن دار فازی مجدد بهبود یافته و فاصله اقلیدسی وزن دار فازی مجدد بهبود یافته به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$d_{HFS}^{\lambda=1}(M, N) = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^n w_i \left(\frac{1}{l_{x_i}} \sum_{j=1}^{l_{x_i}} |h_M^{\sigma(j)}(x_i) - h_N^{\sigma(j)}(x_i)| + |\bar{h}_M(x_i) - \bar{h}_N(x_i)| \right) \quad (154)$$

$$d_{HFS}^{\lambda=2}(M, N) = \left(\frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^n w_i \left(\frac{1}{l_{x_i}} \sum_{j=1}^{l_{x_i}} (h_M^{\sigma(j)}(x_i) - h_N^{\sigma(j)}(x_i))^2 + (\bar{h}_M(x_i) - \bar{h}_N(x_i))^2 \right) \right)^{\frac{1}{\lambda}} \quad (155)$$

با فرض اینکه $X = [a, b]$ بوده و $w(x)$ وزن عنصر $x \in X$ با شرایط $w(x) \in [0, 1]$ و

باشد، فاصله وزن دار فازی مجدد پیوسته به صورت زیر تعریف شده است:

$$d_{HFS}^{\phi_1, \phi_2}(M, N) = \left(\int_a^b w(x) \left(\frac{\phi_1}{l_x} \sum_{j=1}^{l_x} |h_M^{\sigma(j)}(x) - h_N^{\sigma(j)}(x)|^\lambda + \phi_2 |\bar{h}_M(x) - \bar{h}_N(x)|^\lambda \right) dx \right)^{\frac{1}{\lambda}} \quad (156)$$

مجدداً با فرض $\frac{1}{\lambda} = \phi_1 = \phi_2$ ، معیار فوق به فاصله وزن دار فازی مجدد پیوسته توسعه یافته بهبود یافته به صورت زیر تبدیل خواهد شد:

$$d_{HFS}^{\phi}(M, N) = \left(\frac{1}{\lambda} \int_a^b w(x) \left(\frac{1}{l_x} \sum_{j=1}^{l_x} |h_M^{\sigma(j)}(x) - h_N^{\sigma(j)}(x)|^\lambda + |\bar{h}_M(x) - \bar{h}_N(x)|^\lambda \right) dx \right)^{\frac{1}{\lambda}} \quad (157)$$

علاوه بر این، با قرار دادن $\lambda = 1$ و $\lambda = 2$ معیار فوق به ترتیب به فاصله همینگ وزن دار فازی مجدد پیوسته بهبود یافته و فاصله اقلیدسی وزن دار فازی مجدد پیوسته بهبود یافته به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$d_{HFS}^{\phi}(M, N) = \frac{1}{\lambda} \int_a^b w(x) \left(\frac{1}{l_x} \sum_{j=1}^{l_x} |h_M^{\sigma(j)}(x) - h_N^{\sigma(j)}(x)| + |\bar{h}_M(x) - \bar{h}_N(x)| \right) dx \quad (158)$$

$$d_{HFS}^{\phi}(M, N) = \left(\frac{1}{\lambda} \int_a^b w(x) \left(\frac{1}{l_x} \sum_{j=1}^{l_x} (h_M^{\sigma(j)}(x) - h_N^{\sigma(j)}(x))^2 + (\bar{h}_M(x) - \bar{h}_N(x))^2 \right) dx \right)^{\frac{1}{\lambda}} \quad (159)$$

در صورتی که برای هر $x \in [a, b]$ ، $w(x) = 1/(b-a)$ باشد، فاصله‌های همینگ نرمال شده فازی مردد پیوسته بهبود یافته و اقلیدسی نرمال شده فازی مردد پیوسته بهبود یافته به شکل زیر نمایش داده می‌شوند:

$$d_{HFS}^{\lambda, \varphi}(M, N) = \frac{1}{\varphi(b-a)} \int_a^b \left(\frac{1}{l_x} \sum_{j=1}^{l_x} |h_M^{\sigma(j)}(x) - h_N^{\sigma(j)}(x)| + |\tilde{h}_M(x) - \tilde{h}_N(x)| \right) dx \quad (160)$$

$$d_{HFS}^{\Delta, \varphi}(M, N) = \left(\frac{1}{\varphi(b-a)} \int_a^b \left(\frac{1}{l_x} \sum_{j=1}^{l_x} (h_M^{\sigma(j)}(x) - h_N^{\sigma(j)}(x))^{\varphi} + (\tilde{h}_M(x) - \tilde{h}_N(x))^{\varphi} \right) dx \right)^{\frac{1}{\varphi}} \quad (161)$$

همچنین، معادله (۱۵۷) نیز به فاصله نرمال شده فازی مردد پیوسته توسعه یافته بهبود یافته به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$d_{HFS}^{\Delta, \lambda}(M, N) = \left(\frac{1}{\varphi(b-a)} \int_a^b \left(\frac{1}{l_x} \sum_{j=1}^{l_x} |h_M^{\sigma(j)}(x) - h_N^{\sigma(j)}(x)|^{\lambda} + |\tilde{h}_M(x) - \tilde{h}_N(x)|^{\lambda} \right) dx \right)^{\frac{1}{\lambda}} \quad (162)$$

بر اساس رابطه بین معیار فاصله و معیار شباهت، می‌توان معیار شباهت زیر را برای مجموعه‌های

فازی مجدد تعریف نمود:

$$s_{HFS}^{\lambda}(M, N) = 1 - \left(\sum_{i=1}^n w_i \left(\frac{\phi_1}{l_{x_i}} \sum_{j=1}^{l_{x_i}} |h_M^{\sigma(j)}(x_i) - h_N^{\sigma(j)}(x_i)|^{\lambda} + \phi_2 |h_M(x_i) - h_N(x_i)|^{\lambda} \right) \right)^{\frac{1}{\lambda}} \quad (163)$$

علاوه بر این، در [۳۱]، معیار دیگری برای اندازه‌گیری شباهت بین مجموعه‌های فازی مجدد به صورت زیر معرفی شده است:

$$s_{HFS}^{\lambda}(M, N) = \frac{d_{HFS}^{\lambda}(M, N^c)}{d_{HFS}^{\lambda}(M, N) + d_{HFS}^{\lambda}(M, N^c)} \quad (164)$$

که d_{HFS}^{λ} معیار فاصله وزن دار فازی مجدد توسعه یافته جدید، و N^c مکمل مجموعه فازی مجدد N است که به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$N^c = \{ \langle x_i, (h_N(x_i))^c \rangle \mid x_i \in X \} \quad (165)$$

که $(h_N(x_i))^c = \{ 1 - h_N^{\sigma(j)}(x_i) \mid j = 1, 2, \dots, l_{x_i} \}$ می‌باشد.

۴ نتیجه‌گیری

مجموعه‌های فازی و توسعه‌های متعدد آنها که تاکنون معرفی شده‌اند، ابزارهایی مفید برای برخورد با عدم قطعیت موجود در بسیاری از مسائل هستند. از طرف دیگر، معیارهای فاصله و شباهت، اهمیت فراوانی در کاربردهای مختلف دارند. از اینرو، معرفی معیارهای فاصله و شباهت برای این مجموعه‌ها به زمینه تحقیقاتی جذابی برای محققین تبدیل شده و تاکنون معیارهای متنوعی برای این مجموعه‌ها معرفی شده است. با توجه به جذابیت و اهمیت این موضوع، در این مقاله، برخی از معیارهای فاصله و شباهت برای این مجموعه‌ها مورد بررسی قرار گرفت. در تحقیقات آتی، محققین

می‌توانند توسعه‌های دیگری از مجموعه‌های فازی و معیارهای فاصله و شباهت معرفی شده برای آنها را مورد بررسی قرار دهند.

مراجع

- [1] K. T. Atanassov, Intuitionistic fuzzy sets, *Fuzzy Sets and Systems*, **20**(1986), 87-96.
- [2] V. Balopoulos, A. G. Hatzimichailidis and B. K. Papadopoulos, Distance and similarity measures for fuzzy operators, *Information Sciences*, **177**(2007), 2336-2348.
- [3] B. B. Chaudhuri and A. Rosenfeld, A modified Hausdorff distance between fuzzy sets, *Information Sciences*, **118**(1999), 159-171.
- [4] N. Chen, Z. Xu and M. Xia, The ELECTRE I multi-criteria decision-making method based on hesitant fuzzy sets, *International Journal of Information Technology & Decision Making*, **14**(2015), 621-657.
- [5] D. Dubois and H. Prade On distances between fuzzy points and their use for plausible reasoning, *Proc. Int. Conf. on Systems, Man and Cybernetics*, (1983), 300-303.
- [6] M. B. Gorzalczany, A method of inference in approximate reasoning based on interval-valued fuzzy sets, *Fuzzy Sets and Systems*, **21**(1987), 1-17.
- [7] P. Grzegorzewski, Distances between intuitionistic fuzzy sets and/or interval-valued fuzzy sets based on the Hausdorff metric, *Fuzzy Sets and Systems*, **148**(2004), 319-328.

- [8] W. L. Hung and M. S. Yang, Similarity measures between type-2 fuzzy sets, *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, **12**(2004), 827-841.
- [9] L. K. Hyung, Y. S. Song and K. M. Lee, Similarity measure between fuzzy sets and between elements, *Fuzzy Sets and Systems*, **62**(1994), 291-293.
- [10] J. M. Mendel and R. I. B. John, Type-2 fuzzy sets made simple, *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, **10**(2002), 117-127.
- [11] C. P. Pappis and N. I. Karacapilidis, A comparative assessment of measures of similarity of fuzzy values, *Fuzzy Sets and Systems*, **56**(1993), 171-174.
- [12] H. Rezaei, M. Emoto and M. Mukaidono, New Similarity Measure Between Two Fuzzy Sets, *Journal of Advanced Computational Intelligence and Intelligent Informatics*, **10**(2006), 946-953.
- [13] H. Rezaei and M. Mukaidono, New Similarity Measures of Intuitionistic Fuzzy Sets, *Journal of Advanced Computational Intelligence and Intelligent Informatics*, **11**(2007), 202-209.
- [14] A. Rosenfeld, Distances between fuzzy sets, *Pattern Recognition Letters*, **3**(1985), 229-233.
- [15] L. Rutkowski, *Computational Intelligence*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, (2008).
- [16] P. Singh, Some new distance measures for type-2 fuzzy sets and distance measure based ranking for group decision making problems, *Frontiers of Computer Science*, **8**(2014), 741-752.

- [17] E. Szmidt, *Distances and Similarities in Intuitionistic Fuzzy Sets*, Springer International Publishing, (2014).
- [18] E. Szmidt and J. Kacprzyk, Distances between intuitionistic fuzzy sets, *Fuzzy Sets and Systems*, **114**(2000), 505-518.
- [19] V. Torra, Hesitant fuzzy sets, *International Journal of Intelligent Systems*, **25**(2010), 529-539.
- [20] V. Torra and Y. Narukawa, On hesitant fuzzy sets and decision, *The 18th IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, Jeju Island, Korea, (2009), 1378-1382.
- [21] W. J. Wang, New similarity measures on fuzzy sets and on elements, *Fuzzy Sets and Systems*, **85** (1997), 305-309.
- [22] W. Wang and X. Xin, Distance measure between intuitionistic fuzzy sets, *Pattern Recognition Letters*, **26**(2005), 2063-2069.
- [23] M. Xia and Z. Xu, Hesitant fuzzy information aggregation in decision making, *International Journal of Approximate Reasoning*, **52**(2011), 395-407.
- [24] Z. Xu, Some similarity measures of intuitionistic fuzzy sets and their applications to multiple attribute decision making, *Fuzzy Optimization and Decision Making*, **6**(2007), 109-121.
- [25] Z. S. Xu and J. Chen, An overview of distance and similarity measures of intuitionistic fuzzy sets, *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, **16**(2008), 529-555.
- [26] Z. Xu and M. Xia, Distance and similarity measures for hesitant fuzzy sets, *Information Sciences*, **181**(2011), 2128-2138.

- [27] L. Xuecheng, Entropy, distance measure and similarity measure of fuzzy sets and their relations, *Fuzzy Sets and Systems*, **52**(1992), 305-318.
- [28] L. A. Zadeh, Fuzzy sets, *Information and Control*, **8**(1965), 338-353.
- [29] L. A. Zadeh, The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning-I, *Information Sciences*, **8**(1975), 199-249.
- [30] W. Zeng and P. Guo, Normalized distance, similarity measure, inclusion measure and entropy of interval-valued fuzzy sets and their relationship, *Information Sciences*, **178**(2008), 1334-1342.
- [31] X. Zhang and Z. Xu, Novel distance and similarity measures on hesitant fuzzy sets with applications to clustering analysis, *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, **28**(2015), 2279-2296.
- [32] H. Zhang, W. Zhang and C. Mei, Entropy of interval-valued fuzzy sets based on distance and its relationship with similarity measure, *Knowledge-Based Systems*, **22**(2009), 449-454.