سیستم‌های فازی و کاربردها

سال دوم، شماره اول (بهار و تابستان ۱۳۹۸) صص. ۱ تا ۲۴

DOR: 20.1001.1.27174409.1398.2.1.1.9

حسابگری با واژگان

حدیث السادات حسینی نژاد، ماشاءا... ماشین‌چی

بخش آمار، دانشکده ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه شهید باهنر کرمان

چکیده

حسابگری با واژگان [a] یک سیستم حسابگری است که توانایی مهمی را در زمینه مهندسی، پزشکی، زیست‌شناسی و فیزیک ارائه می‌دهد که توسط پروفسور زاده و به خصوص با نوشتن مقاله‌ای با عنوان منطق فازی=حسابگری با واژگان مطرح شد. در این مقاله به بررسی برخی مفاهیم، تعاریف، نتایج اولیه و در نهایت به تشریح فرآیند حسابگری با واژگان می‌پردازیم.

[a] Computing With Words

۱ مقدمه

حسابگری با واژگان گاهی اوقات به شکل حسابگری با ادراک بیان می‌شود که در اوایل تا اواسط دهه ۱۹۹۰ میلادی توسط پروفسور زاده مطرح شده است. انسان‌ها از زبان طبیعی برای بیان احساسات و ادراکات خود استفاده می‌کنند و سپس در رویکرد سنتی مجبور به عبور از زبان طبیعی به اعداد هستند. برای انجام این کار ابزارهایی لازم است که حسابگری با واژگان می‌تواند این کار را انجام دهد. در این مقاله به معرفی مختصری از حسابگری با واژگان می‌پردازیم. بدین منظور در بخش ۲ پیشنیازهای لازم را ارائه می‌دهیم. در بخش ۱.۲ خلاصه‌سازی زبانی را از طریق دانه‌سازی معرفی می‌کنیم. در بخش ۳ روش‌شناسی لازم را از طریق دقیق‌سازی مفاهیم زبانی و

Mathematics Subject Classification (2010): 62A86, **Email:** mashinchi @ uk.ac.ir.

عبارات و کلمات کلیدی: حسابگری با واژگان، خلاصه سازی زبانی از طریق دانه‌سازی، دقیق‌سازی تحدید، اصل گسترش، محاسبه توسط محدودیت‌ها

تحدید را از طریق یک شرط تعمیم‌یافته ارائه می‌دهیم که توسط متغیر مفصل مدل‌سازی می‌شود و برای روشن شدن مطالب مثال‌هایی را ارائه می‌دهیم. در بخش ۳ نیز به بیان مفاهیم پایگاه داده توضیحی و فرم کانونی به عنوان روشی برای دقیق‌سازی پرداخته‌ایم. در بخش ۴ اصل گسترش را ارائه می‌دهیم و مثال‌هایی برای درک مطلب بیان کرده‌ایم.

۲ پیشنیاز

در دنیای استدلال خودکار و تصمیم‌گیری، حسابگری با واژگان مسلماً نقش برجسته‌ای ایفا می‌کند. اهم دانش بشری به ویژه دانش عام بیشتر به زبان طبیعی توصیف می‌شود. توانایی محاسبه با اطلاعات موجود در زندگی روزمره، امکان دسترسی گسترده به نقش زبان‌های طبیعی در نظریه‌های علمی و سیستم‌های مهندسی را فراهم می‌کند. حسابگری با واژگان یک سیستم محاسباتی است که در آن اشیاء حسابگری، واژگان، عبارات و گزاره‌های گرفته شده از یک زبان طبیعی هستند که حاوی اطلاعات می‌باشند. به طور خاص حسابگری با واژگان در پی ایجاد راه‌حل‌های ریاضی برای مشکلات حسابگری است که در یک زبان طبیعی نهفته است. مشکلاتی در حسابگری با واژگان وجود دارد که به علت نادقیق بودن در مدل‌های ریاضی حذف می‌شوند زیرا که به عنوان مواردی خارج از قلمرو محدودیت‌های ریاضی تلقی می‌شوند. آن‌چه که حذف می‌شود از طریق به‌کارگیری مفاهیم و تکنیک‌های خاص حاصل از حسابگری با واژگان می‌تواند قابلیت مهمی را به ریاضیات اضافه کند. یعنی ایجاد قابلیت ساخت جواب‌های ریاضی برای مسائل حسابگری که به زبان طبیعی بیان شده‌اند که ریاضیات سنتی قابلیت پردازش آن‌ها را ندارد . نقطه‌ی آغاز حسابگری واژگان یک سؤال q به شکل زیر است:

سوالq: مقدار متغیر Y چیست؟

پاسخ به این سؤال توسط دنباله‌ای از گزاره‌های $p_i; i = ۱, \cdots, n$ در I حاصل می‌شود که $I = (p_۱, \cdots, p_n)$ به عنوان مجموعه اطلاعات معرفی شده است. به طور کلی حداقل برخی از گزاره‌های I از زبان طبیعی گرفته شده‌اند و p_iها حاوی اطلاعات در مورد Y هستند [۴, ۵, ۷, ۹].

تعریف ۱.۲. فرض کنید X یک مجموعه مرجع باشد. تابع نشانگر هر زیر مجموعه معمولی از X، یک تابع از X به مجموعه دو عضوی ۱ ,۰ است که این گونه تعریف می‌شود [۳]-[۱]:

$$\chi_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 1 & x \in \tilde{A} \\ 0 & x \notin \tilde{A} \end{cases} \tag{1}$$

حال اگر برد تابع نشانگر را از مجموعه دو عضوی $\{0,1\}$ به بازه‌ی $[0,1]$ تعمیم دهیم تعریف مجموعه فازی را خواهیم داشت.

تعریف ۲.۲. فرض کنید X یک مجموعه ناتهی دلخواه باشد. تابع $\tilde{A} : X \longrightarrow [0,1]$ را یک زیرمجموعه فازی روی X گوییم که به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$\tilde{A} = \{(x, \tilde{A(x)}); x \in X\} \tag{2}$$

که ما برای راحتی مجموعه فازی $\tilde{A}$ را به صورت A نمایش می‌دهیم.

تعریف ۳.۲. X را مجموعه دانش عام می‌نامیم اگر $X = \{p_j \mid j \in J\}$ که در آن J یک مجموعه اندیس گذار معلوم و p_j برای $j \in J$، یک گزاره است.

تعریف ۴.۲. فرض کنید $I = (p_1, \cdots, p_n)\ ;\ n \in N$ که درآن N مجموعه اعداد طبیعی است. I را بسته گوییم اگر $p_i \in X$ برای $i = 1, \cdots, n$، که در آن X مجموعه دانش عام است. در غیر این صورت I را باز گوییم و با $I+$ نمایش می‌دهیم [۹].

حال فرض کنید که I یک مجموعه از گزاره‌های مربوط به سؤال q: مقدار متغیر Y چقدر است؟ باشد. آنگاه پاسخ به صورت زیر است:

$$Y \in Ans(q/I) \tag{3}$$

که در آن منظور از $Ans(q/I)$ عبارت است از پاسخ q با توجه به داده‌های I. در واقع I محدودیت‌هایی برای رسیدن به پاسخ q اعمال می‌کند. به طور کلی $Ans(q/I)$ یک مقدار برای

Y نیست بلکه یک تحدید روی مقادیری است که Y مجاز به گرفتن آن‌ها می‌باشد. در واقع $Ans(q/I)$ دسته‌ای از مقادیر Y را که با I سازگار هستند، شناسایی می‌کند. در حساب‌گری با واژگان، سازگاری را معادل با امکان در نظر می‌گیرند [۵, ۹].

دانه‌های اطلاعات [۱]، پایه‌ای برای فرآیندهای انتزاعی هستند که فعالیت فکری مارا هدایت می‌کنند. پردازش در سطح دانه‌های اطلاعات یک ویژگی غالب از سیستم‌های متراکم دانش است. دانه‌های اطلاعات همان‌طور که نام آن تصریح می‌کند مجموعه‌ای از ماهیت‌ها هستند که معمولاً از سطح عددی نشأت می‌گیرند که به لحاظ شباهت، مجاورت، کارکردی و وابستگی به طور یکسان تنظیم شده‌اند. هنگامی که در مورد استفاده از یک چارچوب رسمی مشخص تصمیم‌گیری می‌کنیم معمولاً واژه‌نامه‌ای از اصطلاحات دقیق تعریف می‌کنیم که به عنوان چارچوب مرجع در نظر می‌گیریم که این واژه‌نامه تنها مجموعه‌ای از دانه‌های اطلاعاتی است که به خوبی تعریف شده‌اند و برخی از نشانه‌های مفهومی و یا به اصطلاح دانه‌های اطلاعات مرجع را دربر دارد. به طور مثال هنگام صحبت کردن در مورد ترافیک در یک بزرگراه از دانه‌هایی مانند بالا، پایین، متوسط، بسیار بالا استفاده می‌کنیم. این مفاهیم ساختار کلی یک جهان دانه‌ای-محیطی، متشکل از دانه‌هایی که از انواع فرآیندهای اطلاعات، پردازش اطلاعات و تبادل اطلاعات پشتیبانی می‌کند، را شکل می‌دهد. خلاصه‌سازی زبانی از طریق دانه‌سازی [۲] ابزار مهمی را ایجاد می‌کند که در ادامه به آن می‌پردازیم [۱۴].

۱.۲ خلاصه‌سازی زبانی از طریق دانه‌سازی

تعریف ۵.۲. هر مجموعه فازی در یک فضای مفروض را یک دانه [۳] گوییم. فرض کنید A و B دانه‌های معلومی باشند، آنگاه ضرب دکارتی $A \times B$ را یک دانه دکارتی [۴] گوییم.

تعریف ۶.۲. فرض کنید دانه‌های A_i و B_j برای $i, j = 1, \cdots, n$ مفروض باشند، آنگاه

[1] Information Granule

[2] Linguistic Summarization Via Granulation

[3] Granule

[4] Cartesian Granular

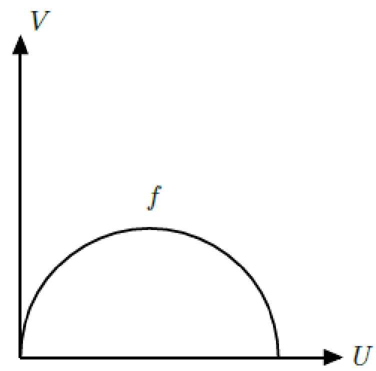
مجموع منطقی از ضرب‌های دکارتی به صورت

$$f^* = A_۱ \times B_۱ + \cdots + A_n \times B_n$$

را یک گراف فازی [۵] گوییم، که در آن عمل‌های "+" و "×" به ترتیب اجتماع منطقی و حاصل‌ضرب دکارتی می‌باشند [۶]-[۱۰]،[۱۲]

فرض کنید تابع $f : U \to V$ دارای گراف واقعی شکل ۱ باشد که فقط توسط قاعده‌های شرطی فازی توصیف می‌شود که در آن U و V دو مجموعه ناتهی مفروض هستند. برای مثال فرض کنید توصیف f به صورت زیر باشد [۴, ۵]

$$f = \begin{cases} if \ \ X \ \ is \ \ small & then \ \ Y \ \ is \ \ small \\ if \ \ X \ \ is \ \ medium & then \ \ Y \ \ is \ \ large \\ if \ \ X \ \ is \ \ large & then \ \ Y \ \ is \ \ small \end{cases}$$



شکل ۱: گراف واقعی تابع f

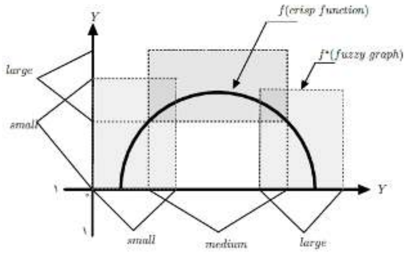
که در آن $X \in U$ متغیر مستقل و $Y \in V$ متغیر وابسته توصیف کننده f هستند. تابع f

[5] Fuzzy Graph

توسط گراف فازی f^* در شکل ۲ توصف شده است که

$$f^* = small \times small + medium \times large + large \times small$$

در شکل ۲ گراف عضویت لغات $small$ ، $medium$ و $large$ روی دو محور X و Y به صورت توابع عضویت مثلثی ترسیم شده‌اند. برای انواع توابع عضویت به [۹ ,۵] مراجعه نمایید. اساساً گراف فازی به عنوان یک تقریب از یک تابع یا یک رابطه در نظر گرفته می‌شود.



شکل ۲: *گراف فازی f^* تقریبی برای تابع f که ضابطه آن را نمی‌دانیم*

۳ روش‌شناسی

حساب‌گری با واژگان فرآیندی است که شامل دو مرحله دقیق‌سازی (بخش ۱.۳) و حساب‌گری با واژگان (بخش ۲.۳) است برای اطلاع بیشتر به مراجع [۱۲, ۱۱, ۹, ۷, ۶] رجوع کنید.

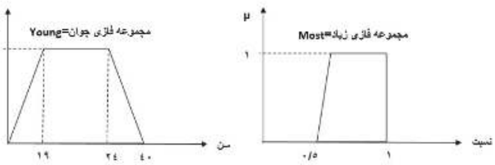
۱.۳ دقیق‌سازی

هر زبان طبیعی اساساً یک سیستم برای توصیف ادراکاتی است که ذاتاً مبهم بوده و منعکس کننده توانایی محدود اندام‌های حسی و در نهایت مغز انسان است که باید حل و فصل جزئیات و ذخیره اطلاعات را انجام دهد. لذا این عدم دقت در ادراک به زبان‌های طبیعی منتقل می‌شود. منبع اصلی عدم دقت در زبان‌های طبیعی ناهماهنگ بودن مرز مجموعه‌ها است که معنای واژگان را در

بر می‌گیرد. این عدم دقت در مرز مجموعه‌های فازی اند و لذا در منطق فازی به صورت مجموعه فازی نمود می‌یابد که این مجموعه فازی عبارت است از مجموعه دقیق شده ای(درجه‌بندی شده) با مرزهای نادقیق.[۶]–[۴]

هنگامی که درباره‌ی دقت صحبت می‌کنیم اهمیت دارد که بین دقت در ارزش و دقت در معنا تفاوت قائل شویم. به طور سنتی دقت را در ارتباط با دقت در ارزش(درستی) می‌گیریم اما در منطق فازی، دقت در اصل به دقت در معنا مربوط می‌شود. دقیق سازی[۶] شامل ساخت مدل‌های محاسباتی یا مدل‌های ریاضی از واژگان، عبارات، گزاره‌ها، سؤالات و سایر انواع نهادهای معنایی است. [۱۲]–[۷]

مثال ۱.۳. اگر گزاره بیشتر دانشجویان جوان هستند را بخواهیم دقیق‌سازی کنیم، چنانچه آن را به معنی نسبت دانشجویان جوان زیاد است تعبیر کنیم، در این صورت مدل‌سازی آن را می‌توان به صورت زیر انجام داد که در شکل ۳ ترسیم شده است.



شکل ۳: *توابع عضویت جوان و زیاد*

۲.۳ تحدید

تحدید[۷] اشکال مختلفی دارد به خصوص اگر یک تحدید به صورت فرم کانونی بیان شود که می‌تواند شرطی و به شکل زیر باشد:

$$if\ X\ is\ A\ then\ Y\ is\ B \qquad (۴)$$

[6] Precisiation
[7] Restriction

که می‌توان آن را به صورت زیر نیز نوشت:

$$Y\ is\ B\ if\ X\ is\ A \tag{۵}$$

که در آن A و B دو مجموعه فازی یا به عبارتی دو دانه هستند . در این صورت (۴) و (۴) را یک تحدید روی متغیرهای X و Y گوییم. توجه کنید که تحدید به معنی ایجاد محدودیت‌هایی در رابطه بین متغیرهای مورد نظر است. به منظور ارائه معنا در زبان‌های طبیعی نیازمندانواع گسترده‌ای از تحدیدها هستیم که به شکل تحدیدهای اساسیِ مهم و به صورت شروط تعمیم یافته‌ای موردنظر قرار گرفته‌اند . به طور کلی یک شرط تعمیم یافته به صورت زیر بیان می‌شود: [۷]-[۴]

$$X\ isr\ R \tag{۶}$$

که در آن isr را یک متغیر مفصل [۸] گوییم. که در آن r بیان‌کننده روش تحدیدی است که رابطه R متغیر X را محدود می‌کند. برخی حالت‌های r می‌تواند از عناصر $\Omega = \{e, d, c, p, u, \lambda up, v, rs, z, \cdots\}$ باشد که در جدول ۱ همراه با معنای آن ارائه شده است که برای مطالعه بیشتر در این مورد به [۶، ۵] مراجعه نمایید.

متغیر محدود شده X می‌تواند انواع مختلفی را به صورت زیر بگیرد:

۱- X می‌تواند یک متغیر n مؤلفه‌ای $X = (X_1, \cdots, X_n)$ باشد.

۲- X می‌تواند یک گزاره و مانند آن باشد مثل X=سیما قد بلند است.

۳- X می‌تواند یک تابع باشد مثل $X = f(Y)$.

۴- X می‌تواند شرطی بر یک متغیر دیگر باشد، مثل $X \mid Y$.

۵- X می‌تواند یک دستورالعمل داشته باشد مثل X= موقعیت مکانی(منزل(علی)).

[8] variable copula

جدول ۱: اشکال گوناگون r

ردیف	r	meaning	معنا
۱	e	*equal*	برابر
۲	d	*disjunective (possibilistic)*	فصلی (امکانی)
۳	c	*conjunctive*	عطفی
۴	p	*probabilistic*	احتمالی
۵	λ	*probability value*	مقدار احتمال
۶	u	*usuality*	معمولاً
۷	v	*veristic*	حقیقی
۸	rs	*random set*	مجموعه تصادفی
۹	z	$z-restriction$	تحدید z
۱۰	rsf	*random fuzzy set*	مجموعه تصادفی فازی
۱۱	fg	*graph fuzzy*	گراف فازی

۶- X می‌تواند یک شرط تعمیم یافته باشد، مثل $X = Y\ isr\ R$.

حال به بررسی چند نمونه از این تحدیدها در جدول ۱ می‌پردازیم:
جدول (۲)۱ متغیر مفصل r برابر با d: اگر متغیر مفصل r مقدار d را بگیرد، تحدید فصلی(امکانی) به صورت isd نوشته که به صورت is مخفف می‌شود.

$$X\ is\ R$$

که R یک رابطه فازی است که X را تحدید می‌کند و این محدودیت توسط تابع توزیع امکان X بیان می‌شود. در حالت خاص اگر X مقادیری در مجموعه مرجع U بگیرد، لذا

$$\Pi_X(u) = Pos\{X = u\} = \mu_R(u)\,;\ u \in U$$

که μ_R تابع عضویت R است و Π_X توزیع امکان X است که مجموعه فازی μ_R به عنوان مقادیر امکانی X است.

مثال ۲.۳. فرض کنید که

$$X\ is\ [a, b]$$

به این معنی است که $[a,b]$ مجموعه مقادیر امکانی X است. حال این را به صورت Π_X می‌نویسیم:

$$\Pi_X(u) = Pos\{X = u\} = \mu_{[a,b]}(u)$$

که $\mu_{[a,b]}(u)$ درجه تعلق u به $[a,b]$ را نشان می‌دهد.

مثال ۳.۳. گزاره بیشتر دانشجویان جوان هستند در مثال ۱.۳ را در نظر بگیرید، این گزاره را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$MOST\ STUDENTS\ are\ YOUNG$$

محدودیت تعمیم یافته این گزاره به صورت زیر است:

$$COUNT\ (YOUNG\ STUDENTS)\ is\ MOST$$

که $X \in N$ همان $YOUNG\ STUDENTS$ و N اعداد صحیح و R نیز $MOST$ است. اگر به‌صورت امکان بنویسیم داریم:

$$\Pi_X(u) = Pos\{X = u\} = \mu_{young\ students}(u) \quad u \in U = N$$

جدول ۱ (۴)- متغیر مفصل r برابر با p: اگر متغیر مفصل r مقدار p را بگیرد تحدید احتمالی است که در این مورد داریم:

$$X\ isp\ R$$

و بدین معنی است که X دارای چگالی احتمال p است که در محدودیت R صدق می‌کند.

مثال ۴.۳.

$$(X\ is\ small)\ isp\ likely$$

به این معنی که احتمال اتفاق فازی $X\ is\ small$ عبارت است از $likely$ و به طور دقیق‌تر،

اگر f تابع چگالی احتمال X باشد، پس احتمال اتفاق فازی $X\ is\ small$ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$Prob(X\ is\ small) = \int_a^b \mu_{small}(u)\, p(u)du$$

که در آن $\mu_{small} : \mathbb{R} \to [0, 1]$ تابع عضویت $small$ یک زیر مجموعه فازی از مجموعه اعداد حقیقی$\mathbb{R}$ است. لذا

$$\begin{aligned}[(X\ is\ small)isp\ likely] &= \mu_{likely}\Big(Prob(X\ is\ small)\Big)\\ &= \mu_{likely}\left(\int_a^b \mu_{small}(u)\, p(u)du\right)\end{aligned}$$

که $\mu_{likely} : [0, 1] \to [0, 1]$ تابع عضویت $likely$ است.

جدول ۱(۷)- متغیر مفصل r برابر با v: اگر متغیر مفصل r مقدار v را بگیرد که به معنی تحدید حقیقی است، آنگاه در این مورد می‌نویسیم:

$$X\ isv\ R$$

که R نقش توزیع X روی اعداد حقیقی از X را دارد. به خصوص اگر X مقادیری در یک مجموعه مرجع $U = \{u_1, \cdots, u_n\}$ را با مقادیر حقیقی مربوط به خود به صورت $t_1, \cdots, t_n$ را بگیرد، آن‌گاه داریم:

$$\begin{aligned}&X\ isv\ \left(\frac{t_1}{u_1} + \cdots + \frac{t_n}{u_n}\right)\\ &X\ isv\ A\end{aligned}$$

به این معنی که $ver(X = u_i) = t_i\ ;\ t_i \in [0, 1]$ که در آن u_i در مجموعه مرجع U قرار

دارد و t_n درستی این است که متغیر X مقدار u_i را بگیرید که در آن $A = (\frac{t_1}{u_1} + \cdots + \frac{t_n}{u_n})$ یک مجموعه فازی مطابق با تعریف ۲.۲ است، بدین معنی که $A(u_i) = t_i$ برای $i = 1, \cdots, n$.

مثال ۵.۳. محمد ۶ ماه تهران ، ۳ ماه کرمان و ۳ ماه زاهدان است. در این صورت با توجه به تحدید حقیقی

$$Relationship(Mohamad)\ isv\ (0/5/Tehran + 0/25/Kerman + 0/25/Zahedan$$

جدول ۱(۹)- متغیر مفصل r برابر با z: اگر متغیر مفصل r مقدار تحدید z را بگیرد در این مورد [۹، ۱۳] :

$$X\ isz\ R$$

تحدید z ترکیبی از تحدید امکانی و احتمالی تعریف شده به صورت زیر است:

$$prob(X\ is\ A)\ is\ B \tag{7}$$

که در آن Aو B مجموعه‌های فازی هستند که به صورت $X\ is\ Z = (A, B)$ نمایش داده می‌شود. معمولاً A و B برچسپ‌هایی هستند که از یک زبان طبیعی گرفته شده‌اند و این در حالی است که ما توابع احتمال (یا تابع چگالی) آن را نمی‌دانیم. فرض کنید

$$\mathbf{P} = \{p \mid \text{چگالی احتمال متغیر تصادفی X است } p\}$$

اگر $p \in \mathbf{P}$معلوم باشد، آنگاه احتمال پیشامد فازی A نسبت به p به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$prob_p(X\ is\ A) = \int A(x)p(x)dx \tag{8}$$

با استفاده از رابطه (۹) می‌توان زیر مجموعه فازی G را روی P به صورت زیر به‌دست آورد.

$$G(p) = B(prob_p(X\ is\ A)) = B(\int A(x)p(x)dx) \qquad (۹)$$

که $G(p)$ بیانگر امکان درستی $(X\ is\ A)$ در B با توجه به متغیر تصادفی X با چگالی p است.

مثال ۶.۳. فرض کنید X متغیری است که متناظر بازه‌ی انتظار برای رسیدن اتوبوس به ایستگاه است. توزیع متغیر تصادفی X متناظر با زمان انتظار را با تابع چگالی زیر بیان می‌کنیم.

$$f_\lambda(x) = \lambda e^{-\lambda x} \qquad x \geq ۰\ ,\ \lambda > ۰$$

فرض کنید زمان انتظار برای رسیدن اتوبوس به ایستگاه را نزدیک به ۱۰ دقیقه در نظر بگیریم که در آن زمان انتظار برای رسیدن اتوبوس به ایستگاه را به صورت یک z-ارزشیاب $X\ is\ (A, B)$ بیان می‌شود که X یک متغیر تصادفی است که تابع چگالی آن برابر با توزیع نمایی است. به‌علاوه A مقدار زبانی کمتر از ۱۰ دقیقه را در نظر میگیریم که اینجا زیر مجموعه فازی $A : \mathbb{R} \to [۰, ۱]$ را به دلیل ساده‌سازی محاسبات به صورت مجموعه معمولی زیر مدل‌سازی کرده‌ایم.

$$A(x) = \begin{cases} ۱ & x \leq ۱۰ \\ ۰ & x > ۱۰ \end{cases}$$

که خواننده می‌تواند هر مجموعه فازی پیچیده‌تری را جایگزین کند و لذا محاسبات طولانی‌تری را انجام دهد. بنابراین برای هر λ داریم:

$$prob_\lambda(V\ is\ A) = \int_۰^\infty A(x)f_\lambda(x)dx = \int_۰^{۱۰} \lambda e^{-\lambda x}dx = ۱ - e^{-۱۰\lambda}$$

اکنون مجموعه فازی $B : [۰, ۱] \to [۰, ۱]$ را که به صورت تقریباً قطعی است، در نظر میگیریم.

برای سادگی B را به صورت زیر مدل‌سازی می‌کنیم:

$$B(x) = \begin{cases} ۱ & ۰/۹ \leq y \leq ۱ \\ ۰ & ۰ \leq y < ۰/۹ \end{cases}$$

حال تابع $G : \mathbf{p} \rightarrow [۰, ۱]$ را می‌توان بر حسب پارامتر λ که متناظر با خانواده‌ی توابع توزیع نمایی است به‌دست آورد. لذا

$$G(\lambda) = B(prob_{\lambda}(V\ is\ A)) = B(۱ - e^{-۱۰\lambda})$$

که با استفاده از تعریف B داریم:

$$G(\lambda) = \begin{cases} ۱ & ۱ - e^{-۱۰\lambda} \geq ۰/۹ \\ ۰ & ۱ - e^{-۱۰\lambda} < ۰/۹ \end{cases} = \begin{cases} ۱ & e^{-۱۰\lambda} \geq ۰/۱ \\ ۰ & e^{-۱۰\lambda} > ۰/۱ \end{cases} = \begin{cases} ۱ & \ln(۰/۱) \geq -۱۰\lambda \\ ۰ & \ln(۰/۱) < ۱۰\lambda \end{cases}$$
$$= \begin{cases} ۱ & \lambda \geq ۰/۲۳ \\ ۰ & \lambda < ۰/۲۳ \end{cases}$$

تبصره ۷.۳. در ارائه P به عنوان یک شرط تعمیم یافته به صورت $P : X\ isr\ R$ دو نکته مهم وجود دارد:

۱- X نباید یک متغیر عددی باشد، بلکه باید مقدار بردار یا به طور کلی ساختار یک شبکه معنایی را داشته باشد. برا ی مثال گزاره سعید کتاب را به نیما داد، X چندتایی (دهنده، گیرنده، موضوع) با مقادیر مربوط از R را نشان می‌دهد که به صورت (سعید،نیما،کتاب) است.

۲- به طور کلی متغیر کانونی X منحصر به فرد نیست. با این حال معمولاً در میان گزینه‌های ممکن یکی را که دارای قابلیت اطمینان بالاتری نسبت به سایر موارد دارد انتخاب می شود [۶, ۷, ۱۰, ۱۱, ۱۲].

۳.۳ تحدید معنایی

در حساب‌گری با واژگان دقیق‌سازی گزاره‌ها از طریق استفاده از آن‌چه که به عنوان تحدید معنایی[۹] شناخته می‌شود، انجام می‌گیرد. ایده کلیدی در تحدید معنایی این است که معنای دقیق‌شده یک گزاره را به عنوان یک تحدید نشان می‌دهد. اگر گزاره P را دقیق‌سازی کنیم عبارت حاصل باید به صورت $X\ isr\ R$ باشد که به عنوان فرم کانونی [۱۰] P معرفی می‌شود.
تحدید معنایی تعمیمی است بر رویکردهای سنتی به معنای زبان‌های طبیعی که عمدتاً شامل معنای جهان ممکن [۱۱] و معنای شرطی درستی [۱۲] می‌باشد. تحدید معنایی دارای قابلیت دقیق‌تری نسبت به جهان ممکن و معنای شرطی درستی است.[۹, ۵]

مثال ۸.۳. گزاره بیشتر دانشجویان جوان هستند را در مثال ۲.۳ در نظر بگیرید. برای استفاده در حساب‌گری این گزاره را می‌توان به صورت زیر می نویسیم:

$$P : MOST\ STUDENTS\ are\ YOUNG$$

در این صورت دقیق‌سازی P را می‌توان به صورت های زیر نوشت:

$$PROPORTION\,(YOUNG\ STUDENTS)\ is\ MOST$$
$$COUNT\,(YOUNG\ STUDENTS)\ is\ MOST$$

که در آن X همان دانشجویان جوان و $MOST$ تحدید R است، این یک تحدید امکانی است که مطابق با ردیف ۲، جدول ۱ می‌باشد.

[9] Restriction Based Semantic
[10] Canonical form
[11] Possible world semantics
[12] Truth conditional semantics

۴.۳ پایگاه داده‌های توضیحی

آن‌چه که برای دقیق‌سازی X و R که در زبان‌های طبیعی بیان می‌شوند، مفهوم پایگاه داده توضیحی[۱۳] (ED)است. مفهوم پایگاه داده توضیحی، چیزی است که برای دقیق‌سازی X وR در زبان‌های طبیعی از آن استفاده می‌شود. در تحدید معنایی، مفهوم پایگاه داده توضیحی روشی است که برای دقیق‌سازی معنای گزاره ی P عمل می‌کند[۴, ۵, ۹].

گزاره ۹.۳. *پایگاه داده توضیحی مجموعه روابطی است از اجزای گزاره P که با نماد ED نمایش می‌دهیم.*

مثال ۱۰.۳. برای گزاره P بیشتر دانشجویان جوان هستند، ED به صورت زیر نشان داده می‌شود.

$$ED = POPULATION\ \ STUDENTS(Name; Age)+$$
$$YOUNG(Young; \mu) + MOST(Proportion; \mu)$$

که $+$ نقش کاما را دارد.

۵.۳ فرم کانونی

پس از این‌که X و R تعریف شدند و پایگاه داده توضیحی ED ساخته شد در این صورت X و R به عنوان توابع ED تعریف می‌شوند. یعنی به عنوان توابعی از متغیرهای پایگاه داده توضیحی مد نظر قرار می‌گیرند.[۹, ۱۲]

تعریف ۱۱.۳. فرض کنید P یک گزاره باشد، آنگاه $CF(P) : X\ isr\ R$ را فرم کانونی P گوییم که در آن X متغیر کانونی است که توسط رابطه R محدود می‌شود.

[13] Explanatory Database

تعریف ۱۲.۳. اگر $CF(P)$ فرم کانونی مفروضی باشد، آن‌گاه فرم کانونی دقیق شده $CF^*(P)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$CF^*(P) = X^* \ isr \ R^*$$

که در آن X^* و R^* دقیق شده X و R هستند که در بخش ۲.۲ ارائه شده است.

۴ حساب‌گری با واژگان

۱.۴ اصل گسترش امکانی

فرض کنید X یک متغیر باشد که مقادیری در U می‌گیرد و تابع $f : U \rightarrow V$ مفروض باشد. یک محدودیت امکانی روی $f(X)$ به صورت $f(X) is f(A)$ بیان می‌شود که A یک زیر مجموعه فازی در U است که در این صورت تابع عضویت $\mu_{f(A)}$ باتوجه به اصل گسترش به صورت زیر است[۴].

$$\mu_{f(A)}(v) = \begin{cases} \sup\limits_{v=f(x);x\in U} \mu_A(x) & f^{-1}(v) \neq \emptyset \\ 0 & f^{-1}(v) = \emptyset \end{cases} \qquad (10)$$

اگر $g : U \rightarrow W$ یک تابع باشد، آنگاه محدودیت امکانی روی $f(X)$ یک محدودیت امکانی روی $g(X)$ القا می‌کند که به صورت $g(X) is \ g(B)$ بیان می‌شود که B یک زیر مجموعه فازی در W است، که می‌نویسیم

$$\frac{f(X) \ is \ f(A)}{g(X) \ is \ g(B)}$$

بنابراین با توجه به اصل گسترش داریم:

$$\mu_{g(B)}(w) = \begin{cases} \sup\limits_{x\in g^{-1}(w)} \mu_{f(A)}(f(x)) & g^{-1}(w) \neq \varnothing \\ 0 & g^{-1}(w) = \varnothing \end{cases} \qquad (11)$$

که در آن $\mu_{f(A)}$ و $\mu_{g(B)}$ به ترتیب تابع عضویت $f(A)$ و $g(B)$ هستند [۵, ۱۱, ۱۲]

مثال ۱.۴. حالت گسسته،

گزاره P عبارت باشد از بیشتر دانشجویان جوان هستند را در نظر بگیرید. دقیق سازی q، که

q: متوسط سن دانشجویان A_{ave}، چقدر است؟ را در نظر بگیرید

$$q^* = A_{ave} = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = Ans(q/I)$$

که A_i سن دانشجوی iام است. در این مثال فرض می‌شود محدودیت‌ها به صورت زیر باشند.

الف: متوسط سن دانشجویان چقدر است؟

ب: بیشتر دانشجویان جوان هستند..

بررسی این مثال را در سه مرحله دنبال می کنیم.

دقیق‌سازی P: بیشتر دانشجویان جوان هستند.

حالت گسسته:

مرحله اول، شناسایی X و R .

X نسبت دانشجویان جوان و R به عنوان اکثریت دانشجویان شناسایی می‌شود.

فرض کنید A_i سن i–امین دانشجوی جوان با نام $Name_i$باشد یعنی

$$Age(Name_i) = A_i$$

مجموعه دانشجویان جوان به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Y = \{Name_1 , Name_2 , \cdots ., Name_n\}$$

درجه عضویت A_i در تابع عضویت جوان به صورت $\mu_{Young} : (0, \infty) \to [0, 1]$ است که در این صورت X (نسبت دانشجویان جوان در میان دانشجویان) به صورت زیرمحاسبه می‌شود:

$$X = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_{Young}(A_i)\right)$$

که $\sum_{i=1}^{n} \mu_{Young}(A_i)$ عدد اصلی دانشجویان جوان است و

$$R = MOST$$

با تابع عضویت

$$\mu_{MOST} : [0, 1] \to [0, 1]$$

حال درجه عضویت μ_{Young} به صورت زیر تعریف شود

$$\mu_{Young}(x) = \begin{cases} 0/5 & x = 18 \\ 0/7 & x = 19 \\ 0 & o.w \end{cases} \tag{12}$$

مرحله دوم: ساخت ED، با توجه به تعریف ۸.۲ داریم:

$$ED = Population\, STUDENTS(Name; Age) + YOUNG(Young; \mu)$$
$$+ MOST(Proportion; \mu)$$
$$ED = Population\, STUDENTS(Name_{۱}, Name_{۲}; ۱۸, ۱۹)$$
$$+ YOUNG(۱۸, ۱۹; ۰/۵, ۰/۷) + MOST(۰/۵, ۰/۷)$$

مرحله سوم، دقیق‌سازی X و R:

$$X^* = \frac{۱}{n}\left(\sum_{i=۱}^{n} \mu_{young}(A_i)\right)$$

و

$$R^* = MOST$$

یا

$$R^* = Most\,(Proportion; \mu)$$

حال فرم کانونی دقیق شده p را می‌نویسم:

$$CF^*(P) : X^* isr R^*$$
$$CF^*(P) : \frac{۱}{n}\left(\sum_{i=۱}^{n} \mu_{Young}(A_i)\right) is MOST$$

طبق اصل گسترش در رابطه (۱۰) داریم:

$$\begin{aligned} \mu(P) &= \mu_{MOST}(\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\mu_{Young}(A_i)\right)) \\ &= \mu_{MOST}(\frac{1}{2}(0/5+0/7)) = \mu_{MOST}(0/6) \end{aligned} \tag{۱۳}$$

که با توجه به تعیین تابع عضویت μ_{MOST} می‌توان مقدار عددی $\mu(P)$ را در فاصله‌ی $[0,1]$ بدست آورد که درجه صدق گزاره "بیشتر دانشجویان جوان هستند." برابر است با $MOST$.

حال محاسبه $Ans(q/I)$ شامل محدودیت‌های امکانی به صورت زیر می‌شود.

$$\frac{\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\mu_{Young}(A_i)\right) is MOST}{\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}A_i\right) is\ A_{ave}}$$

که A_{ave} یک مجموعه فازی است. همان‌طور که می‌بینیم $f(X)$ ما $\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\mu_{Young}(A_i)\right)$، $f(A)$ نیز $MOST$، $g(X)$ نیز $\frac{1}{n}\sum A_i$ و $g(B)$ نیز A_{ave} است.

حال با استفاده از اصل گسترش و رابطه‌های (۱۰) و (۱۱) داریم:

$$\mu_{A_{ave}}(v) = \sup_{Y=(A_1,\cdots,A_n)} \mu_{MOST}(\frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n}\mu_{Young}(A_i))) \tag{۱۴}$$

درحالتی که تابع عضویت جوان حالت گسسته (۱۲) را داشته باشد در اینصورت می‌توان دید که از (۱۴) داریم

$$\mu_{A_{Ave}}(v) = \begin{cases} \mu_{MOST}(0/6) & v = 0/6 \\ 0 & v \neq 0/6 \end{cases}$$

۵ نتیجه‌گیری

در این مقاله به اختصار حساب‌گری روی واژگان موجود در زبان طبیعی را مطرح کردیم و سپس با استفاده از اصل گسترش، مدل‌سازی ریاضی آنها را مرور کردیم. به عنوان کارهای آینده می‌توان به بیان برخی مباحث از حساب‌گری با واژگان از جمله معنا و مفهوم دقیق‌سازی، عملگرهای دقیق‌سازی، تحدید روی اعداد Z، دانه‌سازی تحدیدهای زبانی، مدل‌سازی سایر تحدیدها(شرایط تعمیم یافته)[۱۵] و در نهایت تهیه نرم‌افزاری مناسب برای پیاده‌سازی مفاهیم مطرح شده پرداخت. ما نیز در این موارد به پژوهش خواهیم پرداخت.

تشکر و قدردانی:

نویسندگان این مقاله از حسن توجه داوران گرامی و نظرات ارزشمندشان که در بهبود کیفیت این مقاله بسیار موثر بوده است کمال تشکر را دارند.

مراجع

[۱] ماشین چی، ماشاءالله، مجموعه های مشکک، *انتشارات دانشگاه شهید باهنرکرمان*، ۱۳۷۹

[۲] ماشین چی، ماشاءالله و طاهری، سید محمود، مقدمه ای بر آمار و احتمال فازی، *انتشارات دانشگاه شهید باهنر کرمان*، ۱۳۸۷

[۳] طاهری، سید محمود، آشنایی با نظریه مجموعه های *فازی*، *انتشارات جهاد دانشگاهی مشهد*، ۱۳۷۵

[4] Zadeh, L. A. (2001). A new direction in AI: Toward a computational theory of perceptions. AI Magazine, 22(1), 73.

[5] Zadeh, L. A. (1996). Fuzzy logic= computing with words. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 4(2), 103-111.

[6] Zadeh, L. A. (2011). Generalized Theory of Uncertainty: Principal Concepts and Ideas. *In Fundamental Uncertainty* (pp. 104-150). Palgrave Macmillan, London.

[7] Zadeh, L. A. (1999). From computing with numbers to computing with words-from manipulation of measurements to manipulation of perceptions. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 46(1), 105-119.

[8] Zadeh, L. A. (2002). Toward a perception-based theory of probabilistic reasoning with imprecise probabilities. *In: Soft Methods in Probability, Statistics and Data Analysis* (pp. 27-61). Physica, Heidelberg.

[9] Zadeh, L. A. (2012). Computing with words: Principal concepts and ideas (Vol. 277). Springer Heidelberg, New York.

[10] Zadeh, L. A. (2004). Precisiated natural language (PNL). AI Magazine, 25(3), 74-91

[11] Zadeh, L. A. (2006). From search engines to question answering systems-The problems of world knowledge, *relevance, deduction and precisiation. In Capturing Intelligence* (Vol. 1, pp. 163-210). Elsevier B.V.

[12] Zadeh, L. A. (1997). Toward a theory of fuzzy information granulation and its centrality in human reasoning and fuzzy logic. *Fuzzy Sets and Systems*, 90(2), 111-127.

[13] Yagar, R. R. (2012). On Z-valuations using Zadeh's, *Z-numbers. International Journal of lntelligent Systems,* **27**(3) , 259-278

[14] Bargiela., Pedrycz, W., (2003). Granular Computing: An introduction (Vol.978). Springer Science, Business Media, New York.

[15] Aliev. R. A, Huseynov. O. H, Aliyev. R. R. Alizadeh. A. V. (2015). Arithmetic Of Z-Numbers, *The Theory And Applications. World Scientific, Singapore.*