

## متغیر تصادفی فازی LR

عباس پرچی

دانشگاه شهید باهنر کرمان، دانشکده ریاضی و کامپیوتر، بخش آمار

### چکیده

پس از مروری انتقادی به متغیرهای تصادفی فازی که تا کنون مطرح شده‌اند، در این مقاله نوعی جدید از این مفهوم به نام «متغیر تصادفی قطعه‌قطعه‌شده خطی» مبتنی بر تعدادی متناهی از برش تصادفی معرفی شده است. وقتی تعداد این برش‌های تصادفی به بینهایت میل می‌کند، «متغیر تصادفی قطعه‌قطعه‌شده خطی» به نوعی دیگر از متغیر تصادفی فازی، که آن را «متغیر تصادفی فازی LR» می‌نامیم، میل می‌کند. بنابراین مبتنی بر این حالت حدی، در انتهای این مقاله تعریفی بهتر، دقیق‌تر و در عین حال ساده‌تر برای متغیر تصادفی فازی ارائه می‌شود. همچنین، چندین مثال عددی برای انتقال بهتر مفاهیم و تعاریف، بر اساس شبیه‌سازی مطرح شده است.

## ۱ مروری بر اعداد فازی LR

در این مقاله فرض بر آن است که خواننده با نظریه مجموعه‌های فازی آشنایی دارد و لذا تنها به معرفی چند تعریف و نماد در خصوص اعداد فازی از کتاب‌های [۲] و [۴] می‌پردازیم که در طول مقاله مورد نیاز هستند.

تعریف ۱.۱. مجموعه‌ی فازی  $\tilde{N}$  از  $\mathbb{R}$  را یک عدد فازی گویند، هرگاه:

(الف)  $\tilde{N}$  نرمال و تک‌نمایی باشد،

Mathematics Subject Classification (2010): 62A86., Email: parchami@uk.ac.ir.

عبارات و کلمات کلیدی: متغیر تصادفی فازی، عدد فازی LR، عدد فازی قطعه‌قطعه‌شده خطی، تابع توزیع تجربی.

۱۳۹۸ (انجمن سیستم‌های فازی ایران)

(ب)  $\alpha$ -برش‌های  $\tilde{N}$ ، به ازای هر  $\alpha \in (0, 1)$ ، به صورت بازه‌های ناتهی، بسته و کراندار باشند. مجموعه‌ی تمامی اعداد فازی را با نماد  $F(\mathbb{R})$  نشان می‌دهیم.

تعریف ۲.۱. فرض کنید عدد فازی  $N$  یک زیرمجموعه‌ی فازی از  $\mathbb{R}$  با تابع عضویت

$$N(x) = \begin{cases} L\left(\frac{n-x}{\alpha}\right) & \text{اگر } x \leq n \\ R\left(\frac{x-n}{\beta}\right) & \text{اگر } x > n \end{cases} \quad (1)$$

باشد به طوری که در آن  $L : \mathbb{R}^+ \cup 0 \rightarrow [0, 1]$  و  $R : \mathbb{R}^+ \cup 0 \rightarrow [0, 1]$  توابعی غیرصعودی،  $R(0) = L(0) = 1$  و  $\alpha, \beta > 0$ . در این صورت  $N$  را یک عدد فازی  $LR$  نامیده و آن را با نماد  $(n, \alpha, \beta)_{LR}$  نشان می‌دهند که در آن  $n, \alpha, \beta, L$  و  $R$  به ترتیب مقدار هسته، پهنای چپ، پهنای راست، تابع شکل چپ و تابع شکل راست نامیده می‌شوند.

تعریف ۳.۱. اگر  $R(x) = L(x)$ ، آن‌گاه عدد فازی  $(n, \alpha, \beta)_{LR}$  را یک عدد فازی  $L$  می‌نامند و آن را با نماد  $(n, \alpha, \beta)_L$  نشان می‌دهند.

تبصره ۴.۱. اعداد فازی مثلثی<sup>۱</sup>، نرمال<sup>۲</sup> و سهموی<sup>۳</sup> رایج‌ترین اعداد فازی  $L$  هستند که به ترتیب با نمادهای  $(n, \alpha, \beta)_T$ ،  $(n, \alpha, \beta)_N$  و  $(n, \alpha, \beta)_E$  نشان داده و به ازای توابع شکل زیر

<sup>۱</sup>Triangular

<sup>۲</sup>Normal

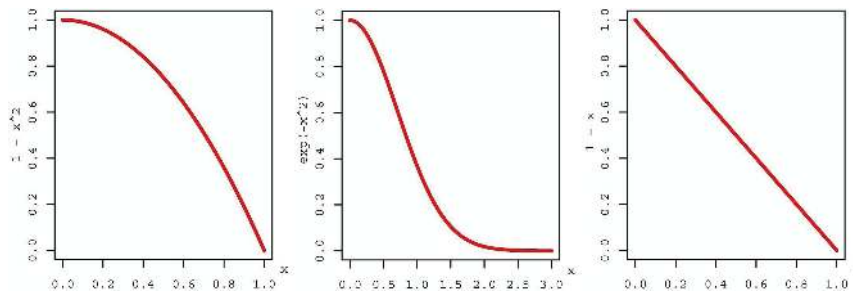
<sup>۳</sup>Elliptic

بدست می‌آیند (شکل ۱ را ببینید)

$$L(x) = \max\{0, 1 - x\} = \begin{cases} 1 - x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & 1 < x \end{cases}$$

$$L(x) = e^{-x^2}, \quad x \geq 0$$

$$L(x) = \max\{0, 1 - x^2\} = \begin{cases} 1 - x^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & 1 < x \end{cases}$$



شکل ۱: توابع شکل سه نوع عدد فازی مثلثی، نرمال و سهموی.

## ۲ برخی از مطالعات انجام شده در خصوص متغیر تصادفی فازی: چالش‌ها و انتقادات

تاکنون چندین رویکرد مختلف برای مدل متغیرهای تصادفی فازی پیشنهاد شده است که در این بخش ایده‌ی برخی از آنها را مطرح و مورد انتقاد قرار می‌دهیم.

### ۱.۲ متغیر تصادفی فازی مبتنی بر برش‌های تصادفی

در این رویکرد، تابع فازی-مقدار  $\tilde{X} : \Omega \rightarrow F(\mathbb{R})$  یک متغیر تصادفی فازی در فضای احتمال  $(\Omega, A, P)$  نامیده می‌شود هرگاه اندازه پذیر باشد. ثابت شده است که

$\tilde{X} : \Omega \rightarrow F(\mathbb{R})$  یک متغیر تصادفی فازی است اگر و تنها اگر برای هر  $\alpha \in [0, 1]$ ، توابع  $\tilde{X}_\alpha^l : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  و  $\tilde{X}_\alpha^r : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  متغیرهای تصادفی حقیقی-مقدار باشند (که در آن  $(\forall \omega \in \Omega; \tilde{X}(\omega)_\alpha = [\tilde{X}_\alpha^l(\omega), \tilde{X}_\alpha^r(\omega)])$ ).

مشکل این ایده آنست که احتمال یک مشاهده‌ی فازی مبتنی بر این تعریف از متغیر تصادفی فازی برابر صفر است. به عبارت دقیق‌تر، در این روش احتمال تودرتو بودن برش‌های تولید/شبه‌سازی شده از یک متغیر تصادفی فازی (که شرطی لازم برای یک مجموعه فازی است) برابر صفر می‌باشد. همچنین تضمینی نیست که پس از شبه‌سازی نقاط ابتدایی  $(\tilde{X}_\alpha^l)$  و انتهایی  $(\tilde{X}_\alpha^r)$  برش دلخواه  $\alpha$ ، رابطه  $\tilde{X}_\alpha^l \leq \tilde{X}_\alpha^r$  (که شرط لازم برای بازه بودن  $[\tilde{X}_\alpha^l, \tilde{X}_\alpha^r]$  است) برقرار باشد.

## ۲.۲ متغیر تصادفی با پارامتر فازی-مقدار

بعضی از نویسندگان، مانند [۱۱، ۱۲]، متغیر تصادفی فازی را به‌گونه‌ای تعریف کردند که تصادفی بودن این متغیر فازی-مقدار ریشه در تنها یک متغیر تصادفی معمولی داشت. مثلاً به اعتقاد آن‌ها،  $\tilde{X}$  یک متغیر تصادفی فازی نرمال با میانگین  $\tilde{\theta}$  و واریانس ۱ است، اگر و تنها اگر  $\tilde{X} = \tilde{\theta} + \xi$  که در آن  $\xi$  یک متغیر تصادفی غیرفازی نرمال استاندارد می‌باشد. گر چه مشاهدات مربوط به این گونه متغیر تصادفی فازی، بصورت فازی است، اما ابهام و نیز توابع شکل برای تمامی مشاهدات فازی-مقدار ثابت بوده و ماهیت تصادفی ندارد.

## ۳.۲ مشاهده‌ی فازی از یک متغیر تصادفی دقیق

[۶] و [۷، ۸] برای تعمیم آماره‌ها مبتنی بر داده‌های فازی، فرض کردند که متغیر تصادفی دقیق است و از آنجا که ابزاری دقیق برای سنجش/اندازه‌گیری مقدار آن در دست نداشتند، مقدار مشاهده‌ی این متغیر تصادفی دقیق را یک عدد نادقیق/فازی در نظر گرفتند. مجدداً تاکید می‌کنیم که در این حالت متغیر تصادفی بصورت فازی تعریف نشده است و لذا از مصداق‌های کاربردی کمی برخوردار است.

### ۳ متغیر تصادفی فازی قطعه‌قطعه‌شده‌ی خطی

در این بخش قصد داریم تا نوعی جدید از متغیر تصادفی فازی، با نام متغیر تصادفی فازی قطعه‌قطعه‌شده‌ی خطی را تعریف کنیم که در بخش‌های بعدی این مقاله زیربنای تعریف متغیر تصادفی فازی  $LR$  می‌شود. متغیر تصادفی فازی قطعه‌قطعه‌شده‌ی خطی در حقیقت یک چند-بر/چند-ضلعی متشکل از اتصال چندین پاره‌خط است که مراحل شبیه‌سازی آن در تعریف زیر ارایه شده است.

تعریف ۱.۳. مراحل تولید/شبیه‌سازی متغیر تصادفی فازی قطعه‌قطعه‌شده‌ی خطی

$$\tilde{X}_{knot.n} \approx \left[ C_X \sim f_C, S_X^l \sim f_{S_X^l}, S_X^r \sim f_{S_X^r} \right]_{knot.n}$$

با تعداد  $knot.n$  گره:

گام ۱ (شبیه‌سازی هسته و دامنه): هسته‌ی متغیر تصادفی فازی قطعه‌قطعه‌شده‌ی خطی  $\tilde{X}_{knot.n}$  از توزیع  $f_C$  و پهناهای چپ و راست بترتیب از توزیع‌های  $f_{S_X^l}$  و  $f_{S_X^r}$  شبیه‌سازی شوند. بنابراین، در این گام هسته و دامنه‌ی متغیر فازی  $\tilde{X}_{knot.n}$  بترتیب برابر  $C_x$  و  $[C_x - S_x^l, C_x + S_x^r]$  تعیین/مشاهده/شبیه‌سازی می‌شوند.

گام ۲ (شبیه‌سازی گره‌ها): مختصات گره‌های یال چپ، به ازای  $knot.n$ ،  $i = 1, 2, \dots$  بصورت  $\left( C_x - l_{(knot.n+1-i)}, \frac{i}{knot.n+1} \right)$  است که در آن  $l_{(i)}$  داده‌های ترتیبی شبیه‌سازی شده از توزیع بریده‌شده‌ی  $f_{S_X^l}$  در بازه‌ی  $[0, S_x^l]$  است، یعنی

$$l_1, \dots, l_{knot.n} \stackrel{iid}{\sim} f_{S_X^l; Trun[0, S_x^l]}$$

مختصات گره‌های یال راست، به ازای  $knot.n$ ،  $i = 1, 2, \dots$  بصورت

$$\left( C_x + r_{(i)}, \frac{i}{knot.n+1} \right)$$

است که در آن  $r_{(i)}$  داده‌های ترتیبی شبیه‌سازی شده از توزیع بریده‌شده  $f_{S_X^r}$  در بازه  $[0, S_x^r]$  است  $(r_1, \dots, r_{knot.n} \stackrel{iid}{\sim} f_{S_X^r; Trun[0, S_x^r]})$ .

گام ۳ (اتصال گره‌ها): پس از اتصال ترتیبی نقاط/گره‌های حاصل در گام‌های ۱ و ۲ بوسیله چندین پاره‌خط مستقیم، تابع عضویت مشاهده‌ی متغیر تصادفی فازی قطعه‌قطعه‌شده‌ی خطی  $\tilde{x}_{knot.n}$  شکل گرفته و شبیه‌سازی متغیر تصادفی فازی تمام می‌شود.

تبصره ۲.۳. تعریف متغیر تصادفی فازی قطعه‌قطعه‌شده‌ی خطی، مبتنی بر سه متغیر تصادفی غیرفازی (یکی حقیقی-مقدار و دوتای دیگر نامنفی-مقدار) است و لذا از نام هر سه متغیر تصادفی معمولی (اولی برای هسته‌ی تصادفی، دومی برای پهنای تصادفی سمت چپ و سومی برای پهنای تصادفی سمت راست) در متغیر تصادفی فازی قطعه‌قطعه‌شده‌ی خطی استفاده می‌شود (مثال ۳.۳ را ببینید).

مثال ۳.۳. برای تولید/شبیه‌سازی یک عدد فازی از متغیر تصادفی فازی قطعه‌قطعه‌شده‌ی خطی

$$\tilde{X}_2 \approx [C_X \sim N(5, 2), S_X^l \sim E(3), S_X^r \sim U(0, 1)]_2$$

که آن را اصطلاحاً یک متغیر تصادفی فازی ۲ گره‌ای نرمال-نمایی-یکنواخت به‌ترتیب پارامترهای ۵، ۲، ۳، ۰ و ۱ می‌نامیم، ابتدا در گام ۱ از متغیرهای تصادفی  $C_X \sim N(5, 2)$ ،  $S_X^l \sim E(3)$  و  $S_X^r \sim U(0, 1)$  به ترتیب هسته و دامنه‌ی  $\tilde{x}_2$  را تولید می‌کنیم:

$$\text{core}(\tilde{x}_2) = C_x = 1.717$$

$$\text{supp}(\tilde{x}_2) = [C_x - S_x^l, C_x + S_x^r] = [1.717 - 0.57, 1.717 + 0.186] = [1.147, 1.903]$$

در گام ۲، ابتدا تعداد  $knot.n = 2$  داده‌ی تصادفی از توزیع بریده‌شده‌ی  $E(3)$  در بازه‌ی  $[0, S_x^l] = [0, 0.57]$ ، که تابع چگالی احتمال آن بصورت

$$f_{S_X^l; Trun[0, S_x^l]} = f_{E(3); Trun[0, 0.57]} = \frac{f_{E(3)} I(0 < x < 0.57)}{F_{E(3)}(0.57) - F_{E(3)}(0)} = \frac{3e^{-3x}}{0.85}, \quad 0 < x < 0.57$$

است تولید می‌کنیم ( $l_1 = 0.17$  و  $l_2 = 0.28$ ). بنابراین  $l_{(1)} = 0.17$  و  $l_{(2)} = 0.28$ .

و مختصات گره‌های شبیه‌سازی‌شده‌ی یال چپ به ازای  $i = 1, 2$  برابر

$$\left( C_x - l_{(knot.n+1-i)}, \frac{i}{knot.n+1} \right) = \left( 1717 - l_{(3-i)}, \frac{i}{3} \right)$$

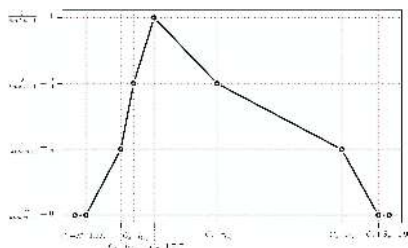
و در نتیجه گره‌های  $(1689, 0.333)$  و  $(1700, 0.667)$  برای یال چپ شبیه‌سازی شدند. برای تعیین گره‌ها/نقاط روی یال راست نیز ابتدا دو داده‌ی  $r_2 = r_{(2)} = 0.156$  و  $r_1 = r_{(1)} = 0.52$  از توزیع

$$\begin{aligned} f_{S_X^r; Trun[0, S_x^r]} &= f_{U(0,2); Trun[0, 0.186]} = \frac{f_{U(0,2)}}{F_{U(0,2)}(0.186) - F_{U(0,2)}(0)} I(0 < x < 0.186) \\ &= \frac{1}{2 \times 0.093} I(0 < x < 0.186) = f_{U(0, 0.186)} \end{aligned}$$

مشاهده شده‌اند. لذا مختصات گره‌های شبیه‌سازی‌شده‌ی یال راست، با توجه به فرمول

$$\left( C_x + r_{(i)}, \frac{i}{knot.n+1} \right) = \left( 1717 + r_{(i)}, \frac{i}{3} \right), \quad i = 1, 2$$

برابر نقاط  $(1873, 0.333)$  و  $(1769, 0.667)$  بدست می‌آیند. سپس در گام ۳، نقاط/گره‌های شبیه‌سازی‌شده در گام‌های ۱ و ۲ را بوسیله‌ی خطوط مستقیم به یکدیگر متصل می‌کنیم تا تابع عضویت  $\tilde{x}_2$  همانند شکل ۲ رسم شود.



شکل ۲: تابع عضویت عدد فازی مشاهده‌شده از یک متغیر تصادفی قطعه‌قطعه‌شده‌ی خطی با تعداد  $knot.n = 2$  گره در مثال ۳.۳.

تعریف ۴.۳. تابع توزیع تجربی داده‌های نمونه‌ی تصادفی  $x_1, \dots, x_n$  بصورت زیر تعریف

می‌شود که در آن تابع نشانگر مجموعه  $A$  است

$$\begin{aligned}
 F_{x_1, \dots, x_n}(x) &= F_n(x) \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I(x_i \leq x) = \frac{(x_i \leq x)}{n} \\
 &= \begin{cases} 0 & \text{اگر } x < x_{(1)} \\ \frac{i}{n} & \text{اگر } x_{(i)} \leq x < x_{(i+1)}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \\ 1 & \text{اگر } x_{(n)} \leq x \end{cases}
 \end{aligned}$$

**تعریف ۵.۳.** تابع توزیع تجربی پیوسته بر اساس داده‌های نمونه‌ی تصادفی  $x_1, \dots, x_n$  از اتصال پی‌درپی نقاط  $(x_{(i)}, \frac{i}{n})$  به ازای  $i = 0, 1, \dots, n$  بدست می‌آید که در آن  $x_{(i)}$  برابر  $i$ امین داده‌ی مرتب‌ی (به ازای  $i = 1, \dots, n$ ) و  $x_{(0)}$  کوچک‌ترین نقطه دامنه  $X$  است. بنابراین تابع توزیع تجربی پیوسته بر اساس داده‌های  $x_1, \dots, x_n$  برابر است با

$$F_{x_1, \dots, x_n}^c(x) = \begin{cases} 0 & \text{اگر } x < x_{(0)} \\ \frac{i}{n} + \frac{x - x_{(i)}}{n(x_{(i+1)} - x_{(i)})} & \text{اگر } x_{(i)} \leq x < x_{(i+1)}, \quad i = 0, 1, \dots, n-1 \\ 1 & \text{اگر } x_{(n)} \leq x \end{cases}$$

**نتیجه ۶.۳.** با توجه به تعریف ۱.۳ و تعریف ۵.۳، می‌توان تابع عضویت متغیر تصادفی فازی  
قطعه‌قطعه‌شده‌ی خطی

$$\tilde{X}_{knot.n} \approx [C_X \sim f_C, S_X^l \sim f_{S_X^l}, S_X^r \sim f_{S_X^r}]_{knot.n}$$



را بر حسب تابع توزیع تجربی پیوسته بصورت زیر بازنویسی کرد

$$\tilde{X}_{knot.n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{اگر } x \leq C_x - S_x^l \\ 1 - F_{l_1, \dots, l_{knot.n}}^c(C_x - x) & \text{اگر } C_x - S_x^l < x < C_x \\ 1 & \text{اگر } x = C_x \\ 1 - F_{r_1, \dots, r_{knot.n}}^c(x - C_x) & \text{اگر } C_x < x < C_x + S_x^r \\ 0 & \text{اگر } x \geq C_x + S_x^r \end{cases} \quad (2)$$

مثال ۷.۳. قصد داریم تا بر اساس نتیجه ۶.۳، تابع عضویت یک مشاهده از متغیر تصادفی فازی قطعه‌قطعه‌شده‌ی خطی

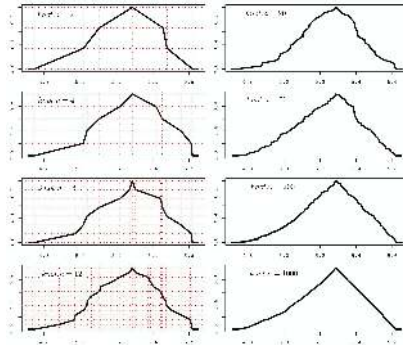
$$\tilde{X}_{knot.n} \approx \left[ C_X \sim N(3, 1), S_X^l \sim E(3), S_X^r \sim U(0, 2) \right]_{knot.n}$$

که اصطلاحاً یک متغیر تصادفی فازی نرمال-نمایی-یکنواخت به ترتیب با پارامترهای ۱، ۳، ۰ و ۲ با تعداد  $knot.n$  گره نامیده می‌شود را به ازای مقادیر مختلفی از تعداد گره‌ها شبیه‌سازی کنیم. تابع عضویت  $\tilde{x}_{knot.n}$  به ازای مقادیر ۲، ۴، ۶، ۱۲، ۲۰، ۵۰، ۲۰۰، ۱۰۰۰  $knot.n =$  در شکل ۳ رسم شده است. بطور شهودی، شکل ۳ الهام‌بخش نوعی همگرایی در حالت حدی  $knot.n \rightarrow \infty$  است که در بخش بعدی مورد بررسی قرار گرفته و موجب ارائه تعریفی ساده‌تر و دقیق‌تر برای متغیر تصادفی فازی شده است.

#### ۴ متغیر تصادفی فازی LR

قضیه ۱.۴. در حالت حدی  $knot.n \rightarrow \infty$ ، مقدار تابع عضویت متغیر تصادفی قطعه‌قطعه‌شده‌ی خطی

$$\tilde{X}_{knot.n} \approx \left[ C_X \sim f_C, S_X^l \sim f_{S_X^l}, S_X^r \sim f_{S_X^r} \right]_{knot.n}$$



شکل ۳: تابع عضویت متغیر تصادفی فازی مشاهده شده قطعه قطعه شده خطی در مثال ۷.۳ با افزایش تعداد گره‌ها.

(با تعداد گره  $knot.n$ ) در هر نقطه‌ی حقیقی  $x$ ، به

$$\tilde{X}(x) = \begin{cases} 0 & \text{اگر } x \leq C_x - S_x^l \\ 1 - F_{S_x^l; Trun[0, S_x^l]}(C_x - x) & \text{اگر } C_x - S_x^l < x < C_x \\ 1 & \text{اگر } x = C_x \\ 1 - F_{S_x^r; Trun[0, S_x^r]}(x - C_x) & \text{اگر } C_x < x < C_x + S_x^r \\ 0 & \text{اگر } x \geq C_x + S_x^r \end{cases} \quad (۳)$$

با احتمال یک همگراست. به عبارت دیگر به ازای هر  $x \in R$ ،

$$\tilde{X}_{knot.n}(x) \xrightarrow{knot.n \rightarrow \infty} \tilde{X}(x). \quad (۴)$$

اثبات. تابع توزیع تجربی مشاهدات نمونه‌ی تصادفی به حجم  $n$  از توزیع  $X_1, \dots, X_n \stackrel{iid}{\sim} F_X$  برابر است با

$$F_{x_1, \dots, x_n}(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I(x_i \leq t) = \overline{I(x \leq t)}. \quad (۵)$$

بنابراین طبق قضیه حد مرکزی، می‌توان ادعا کرد که در حالت  $n \rightarrow \infty$ ، تابع توزیع تجربی  $F_{x_1, \dots, x_n}(t)$  با احتمال یک به تابع توزیع (نظری) یعنی

$$E(I(X \leq t)) = P(X \leq t) = F_X(t) \quad (۶)$$

می‌گیرید. به عبارت دیگر  $F_{x_1, \dots, x_n}(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F_X(x)$ . از طرفی، تشابه تابع توزیع تجربی پیوسته  $(F_{x_1, \dots, x_n}^c)$  به تابع توزیع، بیشتر از تشابه تابع توزیع تجربی  $(F_{x_1, \dots, x_n})$  به تابع توزیع است و لذا می‌توان ادعا کرد که

$$F_{x_1, \dots, x_n}^c(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F_X(x) \quad (۷)$$

و بنابراین اثبات قضیه ۱.۴ بدیهی است.

□

قضیه ۲.۴. در حالت حدی  $knot.n \rightarrow \infty$ ، متغیر تصادفی قطعه‌قطعه‌شده‌ی خطی

$$\tilde{X}_{knot.n} \approx [C_X \sim f_C, S_X^l \sim f_{S_X^l}, S_X^r \sim f_{S_X^r}]_{knot.n}$$

با احتمال یک به متغیر تصادفی فازی  $(C_x, S_x^l, S_x^r)_{LR}$   $\tilde{X} \approx$  با توابع شکل

$$L(x) = \begin{cases} 1 - F_{S_X^l; Trun[0, S_x^l]}(x S_x^l), & 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (۸)$$

$$R(x) = \begin{cases} 1 - F_{S_X^r; Trun[0, S_x^r]}(x S_x^r), & 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (۹)$$

میل می‌کند (که در گام ۱ فیکس/مشاهده‌شده است)؛ یعنی

$$\tilde{X}_{knot.n} \xrightarrow{knot.n \rightarrow \infty} (C_x, S_x^l, S_x^r)_{LR}. \quad (۱۰)$$

اثبات. با توجه به قضیه ۱.۴، تنها کفایت تابع عضویت حدی مطرح شده در رابطه‌ی (۲.۴) را به فرم تابع عضویت یک عدد فازی  $LR$  (که در تعریف ۲.۱ مطرح شد) بنویسیم. لذا می‌توان رابطه‌ی حدی (۱۰) را نتیجه گرفت به‌گونه‌ای که روابط

$$L\left(\frac{C_x - x}{S_x^l}\right) = 1 - F_{S_X^l; Trun[0, S_x^l]}(C_x - x), \quad C_x - S_x^l < x < C_x \quad (11)$$

$$R\left(\frac{x - C_x}{S_x^r}\right) = 1 - F_{S_X^r; Trun[0, S_x^r]}(x - C_x), \quad C_x < x < C_x + S_x^r \quad (12)$$

برقرار باشند. سپس، اعمال تبدیل خطی  $x$  به  $C_x - xS_x^l$  بر روی رابطه‌ی (۱۱)، تابع  $L$  (تابع شکل چپ متغیر تصادفی فازی  $((C_x, S_x^l, S_x^r))_{LR}$ ) را تعیین می‌سازد که همان رابطه‌ی (۸) است. همچنین با اعمال تبدیل خطی  $x$  به  $C_x + xS_x^r$  بر روی رابطه‌ی (۱۲)، تابع  $R$  به فرم رابطه‌ی (۹) بدست می‌آید.  $\square$

با توجه به قضیه ۲.۴، می‌توان تعریف ۱.۳ را برای حالت حدی  $knot.n \rightarrow \infty$  بصورت زیر بیان کرد. از آنجا که تعداد گره‌ها در تعریف زیر به سمت بینهایت میل می‌کند، لذا بدیهی است که تعریف ۳.۴ تعبیر دقیق‌تری از یک متغیر تصادفی فازی (نسبت به تعریف ۱.۳) دارد که در ادامه آن را متغیر تصادفی فازی  $LR$  می‌نامیم.

تعریف ۳.۴.  $(C_X \sim f_C, S_X^l \sim f_{S_X^l}, S_X^r \sim f_{S_X^r})_{LR}$  را یک متغیر تصادفی فازی-مقدار  $LR$  (متغیر تصادفی فازی  $LR$ ) نامیم، هرگاه:

(الف) هسته‌ی آن یک متغیر تصادفی حقیقی-مقدار از توزیع  $C_X \sim f_C$  و پهناهای چپ و راست آن متغیرهای تصادفی نامنفی-مقدار از توزیع‌های  $S_X^l \sim f_{S_X^l}$  و  $S_X^r \sim f_{S_X^r}$  باشند؛

(ب) توابع شکل بر حسب توابع توزیع بریده شده، بصورت زیر باشند

$$\begin{aligned} L(x) &= 1 - F_{S_X^l; Trun[\circ, S_x^l]}(xS_x^l), \quad \circ \leq x \leq 1, \\ R(x) &= 1 - F_{S_X^r; Trun[\circ, S_x^r]}(xS_x^r), \quad \circ \leq x \leq 1. \end{aligned} \quad (13)$$

تعریف ۴.۴.  $\tilde{X} \approx (C_X \sim f_C, S_X \sim f_{S_X})_L$  را یک متغیر تصادفی فازی متقارن  $L$  نامیم، هرگاه:

(الف) هسته‌ی آن یک متغیر تصادفی حقیقی-مقدار از توزیع  $C_X \sim f_C$  و پهنای آن متغیرهای تصادفی نامنفی-مقدار از توزیع  $S_X \sim f_{S_X}$  باشند؛

(ب) تابع شکل بر حسب تابع توزیع بریده شده، بصورت زیر باشد

$$L(x) = 1 - F_{S_X; Trun[\circ, S_x]}(xS_x), \quad \circ \leq x \leq 1. \quad (14)$$

مثال ۵.۴. روند همگرایی سه تابع عضویت متغیر تصادفی فازی

قطعه قطعه شده‌ی خطی

$[C_X \sim N(\circ, 1), S_X^l \sim \chi_\lambda^l, S_X^r \sim \chi_\lambda^r]_{knot.n}$  (ستون سمت چپ شکل)

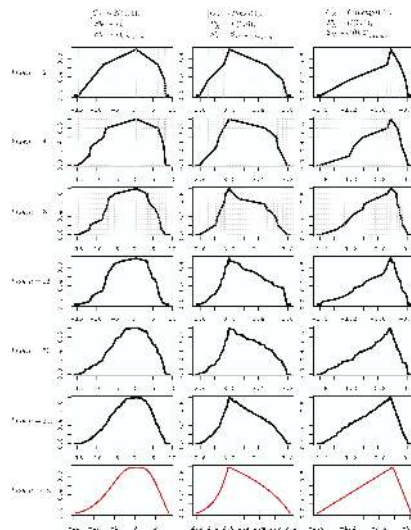
$[C_X \sim Poiss(\mathcal{F}), S_X^l \sim \Gamma(1, \mathcal{E}), S_X^r \sim \beta(1, \mathcal{Z})]_{knot.n}$  (ستون وسط شکل)

$[C_X \sim Cauchy(\circ, 1), S_X^l \sim U(\circ, 1), S_X^r \sim U(\circ, \mathcal{Z})]_{knot.n}$  (ستون سمت راست)

به ترتیب به تابع عضویت متغیرهای تصادفی فازی  $LR$  زیر، در شکل ۵ ترسیم شده است

$$\begin{aligned} &\left( C_X \sim N(\circ, 1), S_X^l \sim \chi_\lambda^l, S_X^r \sim \chi_\lambda^r \right)_{LR} \\ &\left( C_X \sim Poiss(\mathcal{F}), S_X^l \sim \Gamma(1, \mathcal{E}), S_X^r \sim \beta(1, \mathcal{Z}) \right)_{LR} \\ &\left( C_X \sim Cauchy(\circ, 1), S_X^l \sim U(\circ, 1), S_X^r \sim U(\circ, \mathcal{Z}) \right)_{LR} \end{aligned}$$

شش سطر بالایی شکل ۴ به ترتیب توابع عضویت متغیرهای تصادفی فازی قطعه‌قطعه‌شده‌ی خطی، به ازای تعداد گره‌های  $knot.n = 2, 4, 8, 16, 50, 200$  و سطر هفتم/آخر شکل توابع عضویت متغیرهای تصادفی فازی  $LR$  مربوطه (در حالت حدی) می‌باشند.



شکل ۴: روند همگرایی سه تابع عضویت متغیر تصادفی فازی مشاهده‌شده قطعه‌قطعه‌شده‌ی خطی به متغیرهای تصادفی فازی  $LR$  مربوطه، با افزایش تعداد گره‌ها در مثال ۵.۴.

## ۵ نمونه تصادفی فازی

تعریف ۱۰.۵. گوئیم  $\tilde{X} = (\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_n)$  یک نمونه تصادفی فازی  $LR$  از توزیع‌های  $f_{S_X^r} - f_{S_X^l} - f_C$  است هر گاه به ازای هر  $i = 1, \dots, n$

$$\tilde{X}_i \approx \left( C_{X_i} \sim f_C, S_{X_i}^l \sim f_{S_X^l}, S_{X_i}^r \sim f_{S_X^r} \right)_{LR}$$

یک متغیر تصادفی فازی  $LR$  با توابع شکل

$$L(x) = 1 - F_{S_X^l; Trun[0, S_x^l]}(x S_x^l), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (15)$$

$$R(x) = 1 - F_{S_X^r; Trun[0, S_x^r]}(x S_x^r), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (16)$$

باشند بطوریکه  $f_C, C_{X_1}, \dots, C_{X_n} \stackrel{iid}{\sim} f_C$  و  $S_{X_1}^l, \dots, S_{X_n}^l \stackrel{iid}{\sim} f_{S_X^l}$  و  $S_{X_1}^r, \dots, S_{X_n}^r \stackrel{iid}{\sim} f_{S_X^r}$  در این حالت می‌نویسیم

$$\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_n \stackrel{iid}{\approx} (f_C, f_{S_X^l}, f_{S_X^r})_{LR}.$$

مثال ۲.۵. فرض کنید  $\tilde{X} = (\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_n)$  یک نمونه تصادفی فازی به حجم  $n = 10$  از توزیع نرمال-یکنواخت-بتا با پارامترهای  $0, 1, 0, 1, 3, 1$  است، که آن را بصورت

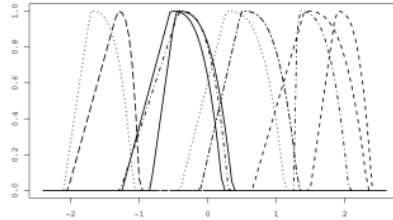
$$\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_n \stackrel{iid}{\approx} (N(0, 1), U(0, 1), Beta(3, 1))_{LR}$$

نشان می‌دهیم. برای مشاهده‌ی یک نمونه تصادفی فازی به حجم  $10$ ، طبق تعریف ۱.۵ ابتدا سه نمونه تصادفی  $C_{X_1}, \dots, C_{X_{10}} \stackrel{iid}{\sim} N(0, 1)$  و  $S_{X_1}^l, \dots, S_{X_{10}}^l \stackrel{iid}{\sim} U(0, 1)$  و  $S_{X_1}^r, \dots, S_{X_{10}}^r \stackrel{iid}{\sim} Beta(3, 1)$  را شبیه‌سازی می‌کنیم. حال مبتنی بر داده‌های تولید شده، پس از لحاظ نمودن توابع شکل

$$L(x) = 1 - F_{S_X^l; Trun[0, S_x^l]}(x S_x^l) = 1 - \frac{x S_x^l}{S_x^l} = 1 - x, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$R(x) = 1 - F_{S_X^r; Trun[0, S_x^r]}(x S_x^r) = 1 - \left(\frac{x S_x^r}{S_x^r}\right)^3 = 1 - x^3, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

می‌توان توابع عضویت نمونه تصادفی فازی  $10$  تایی را همانند شکل ۳ رسم کرد.



شکل ۵: توابع عضویت یک نمونه‌ی تصادفی فازی LR شبیه‌سازی‌شده به حجم ۱۰ در مثال ۲.۵.

## ۶ نتیجه‌گیری و بحث

در این مقاله، ابتدا یک تعریف منطقی برای متغیر تصادفی فازی، تحت عنوان «متغیر تصادفی فازی قطعه‌قطعه‌شده‌ی خطی» پیشنهاد شده است (تعریف ۱.۳). سپس با بررسی حالت حدی مطرح شده در دومین گام تولید متغیر تصادفی فازی قطعه‌قطعه‌شده‌ی خطی، تعریفی ساده‌تر و در عین حال دقیق‌تر (نسبت به تعریف متغیر تصادفی فازی قطعه‌قطعه‌شده‌ی خطی) مطرح شده که در ادامه آن را، بعنوان اصلی‌ترین نتیجه‌ی این مقاله، به اختصار بازگو می‌سازیم.  $(C_X \sim f_C, S_X^l \sim f_{S_X^l}, S_X^r \sim f_{S_X^r})_{LR}$  را یک «متغیر تصادفی فازی LR» گوئیم، هرگاه هسته‌ی آن یک متغیر تصادفی حقیقی-مقدار از توزیع  $C_X \sim f_C$ ، پهنای چپ و راست آن متغیرهای تصادفی نامنفی-مقدار از توزیع‌های  $S_X^l \sim f_{S_X^l}$  و  $S_X^r \sim f_{S_X^r}$ ، و همچنین توابع شکل به ازای  $0 \leq x \leq 1$  بصورت  $L(x) = 1 - F_{S_X^l; Trun[0, S_x^l]}(x S_x^l)$  و  $R(x) = 1 - F_{S_X^r; Trun[0, S_x^r]}(x S_x^r)$  در نظر گرفته شوند.

بنابراین می‌توان ادعا کرد که متغیر تصادفی فازی را فقط مقادیر مشاهده‌شده‌ی  $C_x$ ،  $S_x^l$  و  $S_x^r$  (در گام ۱) و همچنین توابع توزیعی که یال‌های چپ و راست را می‌سازند، رقم می‌زنند و نه مقدار  $knot.n$  (تعداد گره‌های تصادفی) آن‌ها. به عبارت دیگر، تصادفی بودن یک متغیر تصادفی فازی LR تنها ریشه در تصادفی بودن هسته و دامنه/سپورت آن دارد.

تعریف متغیر تصادفی فازی LR در بر دارنده‌ی دو نوع عدم قطعیت احتمالی و امکانی بطور همزمان است. ویژگی متغیرهای تصادفی فازی LR در نوع تابع عضویت آنهاست و محاسبه‌ی توابع/آماره‌ها، که از اعمال عملگرهای حسابی بر روی این متغیرها بوجود می‌آیند، از قواعد خاصی



پیروی می‌کند. این ویژگی باعث می‌شود که در بسیاری از مباحث آمار فازی (همچون آزمون فرضیه‌ها در محیط فازی، رگرسیون فازی، فاصله اطمینان فازی، کنترل کیفیت فازی، قضایای حدی برای متغیرهای تصادفی فازی و ...) از این نوع متغیرهای تصادفی فازی استفاده شود. در انتها بسته‌های نرم‌افزاری FuzzyNumbers، Calculator.LR.FNs و Sim.PLFN، که از قابلیت نصب بر روی نرم‌افزار R برخوردارند را برای انجام محاسبات آماری مبتنی بر اعداد/متغیرهای تصادفی فازی و اعداد/متغیرهای تصادفی فازی قطعه‌قطعه‌شده‌ی خطی به علاقمندان معرفی و پیشنهاد می‌کنیم که بترتیب در مراجع [۵]، [۹] و [۱۰] آورده شده‌اند.

## مراجع

[۱] چاچی، ج.، روش‌های آماری بر اساس اطلاعات نادقیق، رساله دکتری آمار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی اصفهان، ۱۳۹۱.

[۲] طاهری، س.م.، ماشین‌چی، م.، مقدمه‌ای بر آمار و احتمال فازی، انتشارات دانشگاه شهید باهنر کرمان، چاپ اول، ۱۳۸۷.

[3] Blanco-Fernández, A., Casals, M.R., Colubi, A., Corral, N., García-Bárcana, M., Gil, M.A., González-Rodríguez, G., López, M.T., Lubiano, M.A., Montenegro, M., Ramos-Guajardo, A.B., de la Rosa de Súa, S. and Sinova, B. (2013), Random fuzzy sets: A mathematical tool to develop statistical fuzzy data analysis. *Iranian Journal of Fuzzy Systems* 10, 1-28.

[4] Dubois, D. and Prade, H. (1980), *Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications*. Academic Press.

- [5] Gagolewski, M. and Caha, J. (2015) *FuzzyNumbers: Tools to deal with fuzzy numbers in R*, R package version 0.4-1. <https://cran.r-project.org/web/packages=FuzzyNumbers>
- [6] Nourbakhsh, M.R., Mashinchi, M. and Parchami, A. (2013), Analysis of variance based on fuzzy observations. *International Journal of Systems Science* 44, 714-726.
- [7] Parchami, A., Sadeghpour-Gildeh, B., Nourbakhsh, M. and Mashinchi, M. (2014), A new generation of process capability indices based on fuzzy measurements. *Journal of Applied Statistics* 41, 1122-1136.
- [8] Parchami, A., Nourbakhsh, M.R. and Mashinchi, M. (2017), Analysis of variance in uncertain environments, *Complex & Intelligent Systems* 3, 189-196.
- [9] Parchami, A. (2018), *Calculator.LR.FNs : Calculator for LR Fuzzy Numbers*, R package version 1.3. <https://CRAN.R-project.org/package=Calculator.LR.FNs>
- [10] Parchami, A. (2017), *Sim.PLFN : Simulation of Piecewise Linear Fuzzy Numbers*, R package version 1.0. <https://CRAN.R-project.org/package=Sim.PLFN>
- [11] Puri, M. L. and Ralescu, D. A. (1985) The concept of normality for fuzzy random variables. *The Annals of Probability* 13, 1373-1379.
- [12] Puri, M. L. and Ralescu, D. A. (1986) Fuzzy random variables. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 114, 409-422.
- [13] Wu, C.W. (2008), Assessing Process Capability Based on Bayesian Approach with Subsamples. *European Journal of Operational Research* 184, 207-228.

- [14] Wu, C.W. (2009), Decision-making in testing process performance with fuzzy data. *European Journal of Operational Research* 193, 499-509.
- [15] Wu, C.W. and Liao, M.Y. (2009), Estimating and testing process yield with imprecise data. *Expert Systems with Applications* 36, 11006-11012.
- [16] Wu, H.C. (2005), Statistical hypotheses testing for fuzzy data. *Information Sciences* 175, 30-56.
- [17] Wu, H.C. (1999), The central limit theorems for fuzzy random variables. *Information Sciences* 120, 239-256.
- [18] Wu, H.C. (2000), The laws of large numbers for fuzzy random variables. *Fuzzy Sets and Systems* 116, 245-262.