

عدد احاطه گری فازی براساس پل فازی و کاربردهای آن

محمد حمیدی و محمداسماعیل نیکفر

گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۰۷/۰۳

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۱۲/۱۲

چکیده

هدف از این مقاله، به کارگیری مفهوم پل فازی و توسیع نماد عدد احاطه گری در گراف‌های فازی است. پل فازی به معرفی نماد جدیدی از مجموعه‌های احاطه گری و اعداد احاطه گری می‌پردازد که برای گراف‌های فازی که شامل دور هستند و رئوس روی دور قرار می‌گیرند، قابل بررسی است. برای بررسی اهمیت عدد احاطه گری بر مبنای پل فازی به مقایسه اعداد احاطه گری مختلفی پرداختیم و نشان داده ایم که عدد احاطه گری بر پایه پل فازی در حالت بهینه قرار دارد. روش اصلی ما در این مطالعه بر پایه محاسبه عدد احاطه گری روی گراف‌های فازی با رئوس فازی متمایز است و روی گراف‌های خاص و پرکاربردی مانند گراف فازی ۲-چرخ قوی و گراف فازی ۲-کامل محاسبات انجام می‌دهیم. مطالعه روی گراف فازی ۲-چرخ و گراف فازی ۲-کامل برای نخستین بار در این مقاله و براساس تعمیم ۲-بخشی گراف فازی چرخ و گراف فازی کامل انجام گرفته است که این گراف‌های فازی خاص دارای کاربردهای زیادی در شبکه‌های مختلط هستند. در این مطالعه، محاسبات عدد احاطه گری این گراف‌های فازی خاص براساس پل فازی با رئوس متمایز فازی انجام گرفته است. این مقاله شامل اهدافی برای توسعه گراف فازی در مدل سازی مسائل عدم قطعیت و کاربردهای آن در دنیای واقعی است که به دو نمونه کاربرد واقعی آن می‌پردازیم.

عبارات و کلمات کلیدی: پل فازی، عدد احاطه گر فازی، گراف فازی ۲-چرخ قوی، گراف فازی ۲-کامل

Email(s): .

۱۴۰۰ انجمن سیستم‌های فازی ایران

Mathematics Subject Classification: 05C72 ; 05C69

۱ سرآغاز

نظریه گراف به عنوان یکی از شاخه‌های مهم ریاضیات تلقی می‌گردد. گراف به عنوان یک ساختار جبری ابزار مناسبی برای مدلسازی مسائل دنیای واقعی محسوب می‌شود و کاربردهای زیادی در دیگر علوم دارد [۵]. یک گراف روی مجموعه دلخواه، یک رابطه بین عناصر مجموعه (به عنوان اشیا یا رئوس) در نظر گرفته می‌شود و اگر گراف موردنظر برچسب دار باشد، آن گاه رابطه بین عناصر را توصیف می‌نماید. اگر گراف موردنظر یک گراف وزن دار باشد و وزن‌ها یا برچسب‌ها معلوم و معین باشند به صورت ایده آل از گراف‌ها استفاده می‌کنیم ولی اگر برچسب‌ها شناخته شده و قطعی نباشند، روابط بین عناصر مجموعه به صورت مبهم مورد بررسی قرار می‌گیرند. با پیشرفت گراف فازی، اهمیت این نظریه و گراف فازی به عنوان یک تعمیم از گراف که اطلاعات بیشتری در زندگی حقیقی فراهم می‌سازد، افزایش یافت. برپایه روابط فازی پروفوسور لطفی زاده^۱ [۲۵]، ریاضی دانی بنام کافمن^۲ [۱۰]، اولین تعریف از یک گراف فازی را ارائه نمود. بعد از آن، روزنفلد^۳، یه^۴ و بنگ^۵ ساختارهای پایه ای نظریه گراف‌های فازی را تشریح نموده و توسعه دادند. با توجه به اهمیت گراف‌های فازی، پژوهشگران زیادی در این زمینه به کار پرداخته و پژوهش‌های زیادی در این زمینه انجام گرفته است. امروزه گراف‌های فازی دارای کاربردهای مهمی بوده و در شبکه‌های پیچیده مانند علوم کامپیوتر، شبکه حسگر بدون سیم، یادگیری ماشین و دیگر ابرشبکه‌های پیچیده مورد استفاده قرار می‌گیرد. علاوه بر این، مجموعه احاطه گر در گراف و عدد احاطه گری به وسیله آره^۶ [۲۱]، ای. جی. کوکین^۷ و اس.تی. هدتنیمی^۸ [۶]، مورد مطالعه قرار گرفته و برای حل برخی از مسائل مانند مسأله ملکه‌ها، ایستگاه‌های رادار مکان یاب، نظریه کدگذاری و غیره، توسعه پیدا کرده است. بنابراین مجموعه احاطه گر در گراف‌های فازی

Zadeh^۱

Kaufman^۲

Rosenfeld^۳

Yeh^۴

Bang^۵

Ore^۶

E. J. Cockayne^۷

S. T. Hedetnieme^۸

(به عنوان یکی از مهمترین زیرساختارهای گراف‌های فازی) به عنوان یک تعمیم از مجموعه احاطه گر در گراف‌ها و در کاربردهای مشابه قلمداد می‌گردد که توسط محققانی مانند ا. سوماساندارام^۹ و اس. سوماساندارام^{۱۰} در سال ۱۹۹۸ [۲۳] معرفی شد. بعد از آن، کارهایی روی احاطه گری در گراف‌های فازی مانند احاطه گری، احاطه گری قوی، احاطه گری همبند، احاطه گری کامل، احاطه گری مستقل، احاطه گری بدون مکمل، احاطه گری موثر و احاطه گری قوی (ضعیف) با کاربردهای آنها، انجام شده است. [۱، ۲، ۳، ۴، ۹، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۵، ۱۶، ۱۷، ۱۸، ۱۹، ۲۰، ۲۲، ۲۴].

با توجه به مطالب فوق، ما در این مقاله سعی می‌کنیم مفهوم پل فازی را به عنوان اساس پژوهش در نظر بگیریم و روی گراف‌های فازی که دارای دور با طول بیشتر از ۳ هستند، یک مفهوم جدیدی از مجموعه‌های احاطه گر و عدد احاطه گری را معرفی و تشریح نماییم. برای این که اهمیت کار ما در این مقاله بیشتر نمایان شود سعی می‌کنیم مقایسه ای در محاسبات اعداد احاطه گری فازی، این مفهوم را با روش‌های انجام شده قبلی اعم از عدد احاطه گری قوی، عدد احاطه گری ضعیف، مجموعه احاطه گری (α, β) -قوی مقایسه کنیم. چون هر گراف فازی، یک زیرگراف فازی از گراف فازی کامل است با الگو قرار دادن گراف‌های فازی کامل و گراف‌های فازی چرخ، به محاسبه عدد احاطه گری گراف‌های جدیدی مانند گراف فازی ۲-چرخ قوی و گراف فازی ۲-کامل بپردازیم. در پایان به ارائه مثال‌هایی از کاربردهای اعداد احاطه گری در دنیای واقعی پرداخته ایم. از جمله انگیزه‌های این پژوهش می‌توان اذعان به یافتن مفهوم جدیدی از احاطه گری اشاره نمود که بتواند مطالعه موثرتری را در این مفهوم رقم بزند و در این فرآیند، کاربردهای شبکه‌های مختلط گراف فازی ۲-چرخ قوی و گراف فازی ۲-کامل انگیزه نوینی برای این پژوهش رقم زدند. مطالعه نظری و کاربردی گراف‌های فازی خاص و پرکاربرد مطرح شده و لزوم ارائه تعریف جدید برای درک این مدل‌های فازی در قالب مقایسه پدیدآمده بین تعاریف، این انگیزه را ایجاد کرده که به معرفی مفهوم جدیدی در سیطره تعاریف اعداد احاطه گری و مجموعه احاطه گر بپردازیم. از اهداف این مقاله می‌توان به بررسی ساختاری مفهوم جدید و بررسی مقایسه‌ای نتایج حاصل شده از این مفهوم با تعاریف پیشین پرداخت. از دیگر اهداف این مقاله، می‌توان به استخراج نتایج جدید برای گراف‌های

A. Somasundaram^۹S. Somasundaram^{۱۰}

فازی خاص و پرکاربرد مطرح شده از نقطه نظر کاربردی و نظری پرداخت. از مزایای این پژوهش، می‌توان از محاسبه عدد احاطه گری و مجموعه احاطه گرگراف فازی ۲-چرخ قوی و گرگراف فازی ۲-کامل نام برد. از دیگر نقاط برجسته این پژوهش می‌توان از بررسی خواص پایه مجموعه احاطه گر و عدد احاطه گری نام برده و کاربردهای این مفاهیم در شبکه‌های مختلط از دیگر دستاوردهای این پژوهش تلقی می‌گردد. از محدودیت‌های این تحقیق، می‌توان به در نظر گرفتن گرگراف‌های فازی قوی و گرگراف‌های فازی دارای دور به عنوان مورد مطالعه، اشاره نمود.

۲ پیشنهادها

در ادامه، ما به یادآوری برخی نتایج موردنیاز برای این پژوهش، از مرجع [۱۴]، می‌پردازیم. فرض کنید $G^* = (V, E)$ یک گرگراف ساده باشد. آن گاه یک ساختار جبری $G = (\sigma, \mu)$ ، یک گرگراف فازی روی G^* نامیده می‌شود، اگر $\sigma : V \rightarrow [0, 1]$ و $\mu : V \times V \rightarrow [0, 1]$ زیرمجموعه‌های فازی برای هر یال $xy \in E$ به صورت $\mu(xy) = \mu(x, y) \leq \sigma(x) \wedge \sigma(y)$ باشد. تابع σ به عنوان مجموعه راس فازی و تابع μ به عنوان مجموعه یال فازی از گرگراف G نامیده می‌گردد. یک گرگراف فازی $G = (\sigma, \mu)$ یک گرگراف فازی کامل نامیده می‌گردد اگر برای هر دو رأس متمایز $x, y \in V$ داشته باشیم $\mu(xy) = \sigma(x) \wedge \sigma(y)$ و آن یک گرگراف فازی قوی نامیده می‌گردد اگر برای هر یال $xy \in E$ داشته باشیم $\mu(xy) = \sigma(x) \wedge \sigma(y)$. اگر $G = (\sigma, \mu)$ و $H = (\tau, \nu)$ گرگراف‌های فازی باشند، آن گاه H یک زیرگرگراف فازی جزئی از G ، نامیده می‌گردد اگر $\sigma \subseteq \tau, \mu \subseteq \nu$ و زیرگرگراف جزئی H یک زیرگرگراف فازی فراگیر از G نامیده می‌گردد، اگر $\tau = \sigma$. یک مسیر $P(x, y)$ بین x, y از طول n (با نماد $l(P(x, y)) = n$ مشخص می‌گردد)، یک دنباله از رئوس متمایز $y = x_n, \dots, x_1, x_0 = x : P$ است به طوری که برای هر $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ، داشته باشیم، $\mu(x_{i-1}x_i) > 0$ و عدد $s(P) = \bigwedge_{i=1}^n \mu(x_{i-1}x_i)$ به عنوان شدت آن تعریف می‌گردد. شدت همبندی بین دو رأس x و y به صورت $\{P \text{ یک مسیر بین } x, y \text{ است.} \mid s(P)\} = \mu^\infty(xy)$ تعریف می‌گردد (قوی ترین مسیر متصل کننده هر دو رأس x و y دارای شدت همبندی $\mu^\infty(xy)$ باشد).

ادامه ما برخی از انواع مجموعه‌های احاطه گر را در گراف‌های فازی معرفی می‌نمائیم.

تعریف ۱.۲. فرض کنید $G = (\sigma, \mu)$ یک گراف فازی و $D \subseteq V$. آن گاه

(الف) (آ. سوماساندارم ۱۹۹۸) [۲۳] زیرمجموعه D به صورت یک مجموعه احاطه گر موثر در G ، نامیده شده و با نماد D^e نشان داده می‌گردد اگر برای هر $v_1 \in V \setminus D$ ، رأس $v \in D$ وجود داشته باشد به طوری که $\mu(vv_1) = \sigma(v) \wedge \sigma(v_1)$ (می‌گوییم v به طور موثر، رأس v_1 را احاطه می‌کند و با نماد $y \xrightarrow{e} x$ نشان می‌دهیم). اگر D^e یک مجموعه از هر مجموعه‌های احاطه گر موثر در G باشد، $\gamma_e(G)$ به صورت $\gamma_e(G) = \bigwedge_{D^e \in \mathcal{D}^e} \sum_{v \in D^e} \sigma(v)$ تعریف شده و یک عدد احاطه گری موثر از G نامیده می‌گردد. همچنین مجموعه D^e که در عبارت $\gamma_e(G) = \sum_{v \in D^e} \sigma(v)$ صدق می‌نماید را با نماد D_{min}^e نمایش می‌دهیم؛

(ب) (أ.ت. مانجوشا ۲۰۱۴) ^{۱۱} [۱۲] زیر مجموعه D یک مجموعه احاطه گر قوی نامیده شده و با نماد $D^{(\alpha, \beta)}$ نشان داده می‌گردد اگر برای هر $v_1 \in V \setminus D$ ، رأس $v \in D$ وجود داشته باشد به طوری که $\mu(vv_1) \geq \mu_{G_i}^\infty(v, v_1)$ (می‌گوییم v به طور (α, β) -قوی، رأس v_1 را احاطه می‌کند و با نماد $y \xrightarrow{(\alpha, \beta)} x$ نشان می‌دهیم). اگر $D^{(\alpha, \beta)}$ مجموعه تمام مجموعه‌های احاطه گر در G باشد، آن گاه $\gamma_s(G) = \bigwedge_{D^{(\alpha, \beta)} \in \mathcal{D}^{(\alpha, \beta)}} \sum_{v \in D^{(\alpha, \beta)}} \sigma(v)$ به صورت عدد احاطه گری قوی از G نامیده می‌گردد. همچنین مجموعه $D^{(\alpha, \beta)}$ که در عبارت $\gamma_s(G) = \sum_{v \in D^{(\alpha, \beta)}} \sigma(v)$ صدق می‌نماید را با نماد $D_{min}^{(\alpha, \beta)}$ نمایش می‌دهیم؛

۳ عدد احاطه گری و پل فازی

در این بخش، ما به معرفی مفهوم بدیع از مجموعه‌های احاطه گری به عنوان مجموعه احاطه گر α -قوی و عدد احاطه گری در گراف‌های فازی، برپایه پل‌های فازی می‌پردازیم.

فرض کنید $G = (\sigma, \mu)$ یک گراف فازی بوده و $xy \in E$. آن گاه یک یال $xy \in E$ به صورت یک یال $-\alpha$ قوی (پل فازی)، نامیده می‌گردد، اگر $\mu(xy) > \mu'^{\infty}(xy)$ ، جایی که G' یک زیرگراف جزئی از G بوده و $G' = (\sigma, \mu')$ به طوری که $\mu'(xy) = 0$ و $\mu' = \mu$ برای سایر یال‌ها تعریف می‌گردد.

تعریف ۱.۳. فرض کنید $G = (\sigma, \mu)$ یک گراف فازی بوده، $D \subseteq V$ و $x, y \in V$ باشد. آن گاه

(الف) اگر $\mu(xy) > \mu'^{\infty}(xy)$ ، آن گاه یک رأس x یک رأس y را به صورت $-\alpha$ قوی در G احاطه می‌کند اگر $\mu(xy) > \mu'^{\infty}(xy)$ و این مطلب توسط $x \xrightarrow{\alpha} y$ نشان داده می‌گردد؛

(ب) یک مجموعه D به صورت مجموعه احاطه گر $-\alpha$ قوی در G نامیده شده و با نماد D^{α} نمایش داده می‌گردد اگر برای هر $y \in V \setminus D$ ، رأس $x \in D$ وجود داشته باشد به طوری که $x \xrightarrow{\alpha} y$ ؛

(ج) وزن D^{α} به صورت $\omega(D^{\alpha}) = \sum_{xy \in \mathcal{E}(D^{\alpha}, x)} \sigma(x)\mu(xy)$ تعریف می‌گردد به طوری که $\mathcal{E}(D^{\alpha}) = \bigcup_{x \in D^{\alpha}} \mathcal{E}(D^{\alpha}, x)$ ، $\mathcal{E}(D^{\alpha}, x) = \{xy \in E \mid x \xrightarrow{\alpha} y\}$ و $x \in D$ ؛

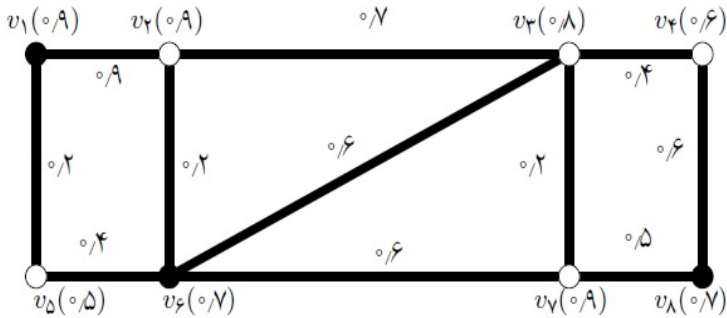
(د) عدد احاطه گری از G به صورت $\gamma_t(G) = \bigwedge_{D^{\alpha} \in \mathcal{D}^{\alpha}} \omega(D^{\alpha})$ تعریف می‌گردد به طوری که

$$\mathcal{D}^{\alpha}(G) = \{D^{\alpha} \mid \text{قوی در } G \text{ است. } -\alpha\}$$

و مجموعه احاطه گر $-\alpha$ قوی با وزن مینیمم با نماد D_{min}^{α} نمایش داده شده و به صورت مجموعه احاطه گر رأسی نامیده می‌گردد.

مثال ۲.۳. گراف فازی $G = (\mu, \sigma)$ را در شکل ۱، در نظر بگیرید. اکنون مجموعه احاطه گری و عدد احاطه گری را از نقطه نظر تعریف ۱.۳ و مقایسه آن با تعریف ۱.۲ بررسی می‌کنیم. محاسبات نشان می‌دهد که $\gamma_t(G) = \omega(D_{min}^{\alpha}) = \{v_1, v_6, v_8\}$ و

$D_{min}^{(\alpha, \beta)} = \{v_1, v_6, v_8\}$, $\gamma_e(G) = 4/4$ و $D_{min}^e = \{v_1, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$, $2/619$
 و $\gamma_s(G) = 2/3$ بنابراین $D_{min}^\alpha = D_{min}^{(\alpha, \beta)} \subseteq D_{min}^e$ و $D_{min}^\alpha = D_{min}^{(\alpha, \beta)}$ و $\gamma_s(G) < \gamma_t(G) < \gamma_e(G)$



شکل ۱: رئوس توپیر مجموعه احاطه گر را براساس تعریف ما مشخص می‌نمایند.

در قضیه زیر به دنبال مقایسه رئوس احاطه گر، مجموعه‌های احاطه گر، مجموعه احاطه گر مینیمم و عدد احاطه‌گری از نقطه نظر تعریف ۱.۲ (ب)، و تعریف ۱.۳ هستیم. قضیه ۳.۳. فرض کنید $G = (\sigma, \mu)$ یک گراف فازی بوده و V مجموعه رئوس آن باشد. آن‌گاه

(الف) اگر $y \xrightarrow{\alpha} x$ ، آن‌گاه $y \xrightarrow{(\alpha, \beta)}$ ؛

(ب) اگر $D \in \mathcal{D}^\alpha(G)$ ، آن‌گاه $D \in \mathcal{D}^{(\alpha, \beta)}(G)$ ؛

(ج) اگر برای هر $x \in D_{min}^\alpha = D_{min}^{(\alpha, \beta)}$ فقط یک رأس $y \in V \setminus D_{min}^\alpha$ وجود دارد به طوری که $y \xrightarrow{\alpha} x$ ، آن‌گاه $\gamma_s(G) > \gamma_t(G)$ ؛

(د) اگر برای هر $x \in D_{min}^\alpha = D_{min}^{(\alpha, \beta)}$ حداقل دو رأس متمایز $y, s \in V \setminus D_{min}^\alpha$ وجود دارد به طوری که $y \xrightarrow{\alpha} x$ و $s \xrightarrow{\alpha} x$ و $\mu(xy) + \mu(xs) > 1$ ، آن‌گاه $\gamma_s(G) < \gamma_t(G)$ ؛

اثبات. (الف) اگر $y \xrightarrow{\alpha} x$ ، آن‌گاه $\mu(xy) > \mu'^\infty(xy)$. بنابراین $\mu(xy) > \mu'^\infty(xy) \geq \mu'^\infty(xy)$ که $y \xrightarrow{(\alpha, \beta)}$ را

ایجاب می‌کند.

(ب) فرض کنید $x \in D^\alpha \in D^\alpha(G)$ ، آن گاه حداقل یک رأس $y \in V$ وجود دارد به طوری که $x \xrightarrow{\alpha} y$. بنابراین مورد اول، $x \xrightarrow{(\alpha,\beta)} y$ که $x \in D^{(\alpha,\beta)} \in D^{(\alpha,\beta)}(G)$ را ایجاب می‌نماید. پس $D^\alpha \subseteq D^{(\alpha,\beta)}$. از طرفی، بنابراین مورد اول، برای هر $y \in V$ ، رأس $x \in D^\alpha$ وجود دارد به طوری که $x \xrightarrow{(\alpha,\beta)} y$ و بنابراین $D^\alpha \in D^{(\alpha,\beta)}(G)$ را نتیجه می‌دهد.

(ج) فرض کنید $x \in D_{\min}^\alpha = D_{\min}^{(\alpha,\beta)}$. آن گاه رأس $y \in V \setminus D_{\min}^\alpha$ وجود دارد به طوری که $x \xrightarrow{\alpha} y$. بنابراین از $0 < \mu(xy) < 1$ ، $\sigma(x) > \sigma(x)\mu(xy)$ که با توجه به

$$\gamma_s(G) = \sum_{x \in D_{\min}^{(\alpha,\beta)}} \sigma(x) > \sum_{\substack{x \in D_{\min}^\alpha \\ xy \in \mathcal{E}(D_{\min}^\alpha, x)}} \sigma(x)\mu(xy) = \gamma_t(G)$$

داریم $\gamma_s(G) > \gamma_t(G)$.

(د) فرض کنید $x \in D_{\min}^\alpha = D_{\min}^{(\alpha,\beta)}$. آن گاه رئوس $y, s \in V \setminus D_{\min}^\alpha$ وجود دارد به طوری که $x \xrightarrow{\alpha} s$ و $x \xrightarrow{\alpha} y$ بنابراین از رابطه‌های $1 > \mu(xs) + \mu(xy)$ داریم $\sigma(x) < \sigma(x)(\mu(xs) + \mu(xy))$

$$\gamma_s(G) = \sum_{x \in D_{\min}^{(\alpha,\beta)}} \sigma(x) < \sum_{\substack{x \in D_{\min}^\alpha \\ xy \in \mathcal{E}(D_{\min}^\alpha, x)}} \sigma(x)\mu(xy) = \gamma_t(G)$$

□ که نامعادله $\gamma_s(G) < \gamma_t(G)$ را نتیجه می‌گیریم.

در قضیه زیر به دنبال مقایسه رئوس احاطه گر، مجموعه‌های احاطه گر، مجموعه احاطه گر مینیمم و عدد احاطه گری از نقطه نظر تعریف ۱.۲ (الف)، و تعریف ۱.۳، هستیم.

قضیه ۴.۳. فرض کنید $G = (\sigma, \mu)$ یک گراف فازی بوده و V مجموعه رئوس آن باشد. آن گاه

(الف) اگر برای هر $x \in D_{\min}^\alpha = D_{\min}^e$ ، فقط یک رأس $y \in V \setminus D_{\min}^\alpha$ وجود دارد به طوری که $x \xrightarrow{\alpha} y$ آن گاه $\gamma_e(G) > \gamma_t(G)$ ؛

(ب) اگر برای هر $x \in D_{\min}^\alpha = D_{\min}^e$ ، حداقل دو رأس متمایز $y, s \in V \setminus D_{\min}^\alpha$

وجود دارد به طوری که $x \xrightarrow{\alpha} s, x \xrightarrow{\alpha} y$ و $\mu(xs) + \mu(xy) > 1$ آن گاه $\gamma_e(G) < \gamma_t(G)$.

اثبات. (الف) فرض کنید $x \in D_{\min}^{\alpha} = D_{\min}^e$. آن گاه رأس $y \in V \setminus D_{\min}^{\alpha}$ وجود دارد به طوری که $x \xrightarrow{\alpha} y$. بنابراین با توجه به $0 < \mu(xy) < 1$ و $\sigma(x) > \sigma(x)\mu(xy)$ و

$$\gamma_e(G) = \sum_{x \in D_{\min}^e} \sigma(x) > \sum_{\substack{x \in D_{\min}^{\alpha} \\ xy \in \mathcal{E}(D_{\min}^{\alpha}, x)}} \sigma(x)\mu(xy) = \gamma_t(G)$$

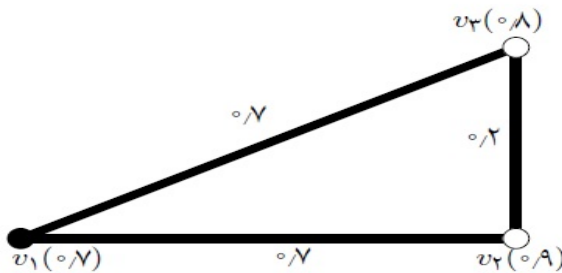
به عبارت $\gamma_e(G) > \gamma_t(G)$ می‌رسیم.

(ب) فرض کنید $x \in D_{\min}^{\alpha} = D_{\min}^e$. آن گاه رئوس $y, s \in V \setminus D_{\min}^{\alpha}$ وجود دارد به طوری که $x \xrightarrow{\alpha} s, x \xrightarrow{\alpha} y$ بنابراین از روابط $\mu(xs) + \mu(xy) > 1$ و $\sigma(x) < \sigma(x)(\mu(xs) + \mu(xy))$

$$\gamma_e(G) = \sum_{x \in D_{\min}^e} \sigma(x) < \sum_{\substack{x \in D_{\min}^{\alpha} \\ xy \in \mathcal{E}(D_{\min}^{\alpha}, x)}} \sigma(x)\mu(xy) = \gamma_t(G)$$

□ به نتیجه $\gamma_e(G) < \gamma_t(G)$ می‌رسیم.

مثال ۵.۳. گراف فازی $G = (\mu, \sigma)$ را در شکل ۲، در نظر بگیرید. در ادامه ما با توجه به قضایای ۱۳.۳ و ۱۴.۳، یک مقایسه دیگری برای اعداد احاطه گری تعاریف ۱.۲ و ۱.۳ می‌آوریم. در این مثال، گراف فازی دارای شرط زیر است. برای هر $x \in D_{\min}^{\alpha} = D_{\min}^e = D_{\min}^{(\alpha, \beta)}$ ، حداقل دو رأس متمایز $y, s \in V \setminus D_{\min}^{\alpha}$ وجود دارد به طوری که $x \xrightarrow{\alpha} s, x \xrightarrow{\alpha} y$ و $\mu(xs) + \mu(xy) > 1$ همچنین نشان می‌دهیم که در مقایسه بین تعاریف ۱.۲ و ۱.۳، رابطه $\gamma_e(G) < \gamma_t(G)$ و $\gamma_s(G) < \gamma_t(G)$ برقرار است. محاسبات نشان می‌دهد که $\gamma_e(G) = \circ\mathcal{N}, D_{\min}^e = \{v_1\}, \gamma_t(G) = \circ\mathcal{A}, D_{\min}^{\alpha} = \{v_1\}$ ، $\gamma_s(G) = \circ\mathcal{N}, D_{\min}^{(\alpha, \beta)} = \{v_1\}$ و $D_{\min}^e = D_{\min}^{(\alpha, \beta)} = D_{\min}^{\alpha}$. بنابراین $\gamma_s(G) = \circ\mathcal{N}, D_{\min}^{(\alpha, \beta)} = \{v_1\}$ و $\gamma_e(G) = \gamma_s(G) < \gamma_t(G)$.



شکل ۲: رأس توپیر مجموعه احاطه گر را براساس هر سه تعریف مشخص می نمایند.

در قضیه زیر به بررسی مفهوم احاطه گری بین دو رأس و خواص رأس احاطه گر می پردازیم.

قضیه ۶.۳. فرض کنید $G = (\sigma, \mu)$ یک گراف فازی، $x, y \in V$ و $D^\alpha \in D^\alpha(G)$ باشد. آن گاه

(الف) $x \not\stackrel{\alpha}{\rightarrow} x$ ؛

(ب) $x \stackrel{\alpha}{\rightarrow} y$ اگر و تنها اگر $x \stackrel{\alpha}{\rightarrow} y$ ؛

(ج) $D^\alpha(G) = \emptyset$ اگر و تنها اگر برای هر دو رأس متمایز $x, y \in V$ داشته باشیم $x \not\stackrel{\alpha}{\rightarrow} y$

(د) $\gamma_t(G) = 0$ اگر و تنها اگر $\mathcal{E}(D^\alpha) = \emptyset$.

اثبات. ما تنها به اثبات موارد (ج) و (د) می پردازیم؛ سایر موارد بنابر تعریف، واضح هستند.

(ج) $D^\alpha(G) \neq \emptyset$ اگر و تنها اگر $D^\alpha \in D^\alpha(G)$ ، $x \in D^\alpha$ و $y \in V \setminus D$ وجود داشته باشد به طوری که $x \stackrel{\alpha}{\rightarrow} y$.

(د) برای هر $D^\alpha \in D^\alpha(G)$ ، با توجه به (ج)، به دلیل $\omega(D^\alpha) \neq 0$ ، ما خواهیم داشت $\gamma_t(G) = 0$ اگر و تنها اگر $\mathcal{E}(D^\alpha) = \emptyset$. □

در قضیه بعدی به دنبال بررسی ارتباط بین مجموعه رئوس احاطه گر و مجموعه یال‌های مرتبط با این رئوس از منظر احاطه‌گری هستیم.

قضیه ۷.۳. فرض کنید $G = (\sigma, \mu)$ یک گراف فازی، $D_1^\alpha, D_2^\alpha \in \mathcal{D}^\alpha(G)$ و $x \in V$. آن‌گاه

(الف) اگر $D_1^\alpha \cap D_2^\alpha \neq \emptyset$ ، آن‌گاه $\mathcal{E}(D_1^\alpha, x) = \mathcal{E}(D_2^\alpha, x)$

(ب) اگر $D_1^\alpha \cap D_2^\alpha = \emptyset$ ، آن‌گاه $\mathcal{E}(D_1^\alpha) \cap \mathcal{E}(D_2^\alpha) = \emptyset$

(ج) اگر $D_1^\alpha \subseteq D_2^\alpha$ ، آن‌گاه $\mathcal{E}(D_1^\alpha, x) = \mathcal{E}(D_2^\alpha, x)$

(د) اگر $D_1^\alpha \subseteq D_2^\alpha$ ، آن‌گاه $\mathcal{E}(D_1^\alpha) \subseteq \mathcal{E}(D_2^\alpha)$

(ه) اگر $l(x, y) \geq 2$ ، آن‌گاه $\mathcal{E}(D_1^\alpha, x) \cap \mathcal{E}(D_2^\alpha, y) = \emptyset$

(و) اگر $l(x, y) = 3$ و $w \in V$ ، آن‌گاه $x \xrightarrow{\alpha} w$ و $y \not\xrightarrow{\alpha} w$ اگر و تنها اگر $w \in V$

اثبات. ما تنها به اثبات موارد (ه) و (و) می‌پردازیم؛ سایر موارد بنابر تعریف، واضح هستند.

(ه) فرض کنید $e \in \mathcal{E}(D_1^\alpha, x) \cap \mathcal{E}(D_2^\alpha, y) \neq \emptyset$. آن‌گاه دو رأس $x_1 \in V$ و $y_1 \in V$ وجود دارد به طوری که $e = xx_1$ و $e = yy_1$. بنابراین نتیجه $e = xx_1 = yy_1$ حاصل می‌گردد و در نتیجه $e = xy$ که با توجه به $l(x, y) \geq 2$ ، بیانگر تناقض است.

(و) فرض کنید $x \xrightarrow{\alpha} w$ ، آن‌گاه $\mu(xw) > \mu'^\infty(x, w)$. اگر $\mu(yw) > \mu'^\infty(y, w)$ ، آن‌گاه $l(x, y) = 2$ ، که تناقض است بنابراین $y \not\xrightarrow{\alpha} w$. حالت برگشت مشابه است. \square

مثال ۸.۳. حالت معکوس در موارد قضیه (۷.۳)، برقرار نیست. شکل ۱، را در نظر بگیرید. فرض کنید $D_1^\alpha = \{v_1, v_6, v_8\}$ و $D_2^\alpha = \{v_1, v_3, v_8\}$ ، آن‌گاه $\mathcal{E}(D_1^\alpha, v_3) = \mathcal{E}(D_2^\alpha, v_3) = \{v_3v_6, v_3v_2\}$ ولی $D_1^\alpha \cap D_2^\alpha = \{v_1, v_8\}$ و $v_3 \notin D_1^\alpha \cap D_2^\alpha$. $D_1^\alpha \not\subseteq D_2^\alpha$

همچنین، فرض کنید $D^\alpha = \{v_1, v_6, v_8\}$ و $D_\beta^\alpha = \{v_2, v_5, v_4, v_7, v_3\}$ ، آن گاه عبارت
 مقابل را خواهیم داشت $\mathcal{E}(D_\beta^\alpha) \cap \mathcal{E}(D^\alpha) = \{v_2v_1, v_5v_6, v_7v_6, v_6v_3, v_7v_8, v_8v_4\} \neq \emptyset$ ولی $D_\beta^\alpha \cap D^\alpha = \emptyset$
 و $D_\beta^\alpha \not\subseteq D^\alpha$ به طوری که در این حالت داریم $\mathcal{E}(D_\beta^\alpha) \subseteq \mathcal{E}(D^\alpha) = \mathcal{E}(D_\beta^\alpha) \cup \{v_3, v_2\}$
 دو رأس v_6 و v_2 را در نظر بگیرید. آن گاه $l(v_2, v_6) = 1 \not\geq 2$ ولی $\mathcal{E}(D_\beta^\alpha, v_6) \cap \mathcal{E}(D^\alpha, v_2) = \emptyset$
 در شکل ۲، دو رأس v_1 و v_2 را در نظر بگیرید. آن گاه $v_1 \xrightarrow{\alpha} v_3$ و $v_2 \not\xrightarrow{\alpha} v_3$ ولی
 $l(v_1, v_2) = 1 \neq 3$

در قضیه بعدی ارتباط بین دو مجموعه احاطه گر و اجتماع این دو مجموعه، مورد
 بررسی قرار گرفته است.

قضیه ۹.۳. فرض کنید $G = (\sigma, \mu)$ یک گراف فازی و $D_1, D_2 \subseteq V$. آن گاه

(الف) اگر $D_1 \subseteq D_2$ و $D_1^\alpha \in \mathcal{D}^\alpha(G)$ ، آن گاه $D_2^\alpha \in \mathcal{D}^\alpha(G)$ ؛

(ب) اگر $D_1^\alpha, D_2^\alpha \in \mathcal{D}^\alpha(G)$ ، آن گاه $D_1^\alpha \cup D_2^\alpha \in \mathcal{D}^\alpha(G)$.

اثبات. (الف) فرض کنید $D_1 \subseteq D_2$ و $y \in V \setminus D_2$. با توجه به
 $D_1^\alpha \in \mathcal{D}^\alpha(G)$ و $y \in V \setminus D_1$ ، رأس $x \in D_1^\alpha$ وجود دارد به طوری که $x \xrightarrow{\alpha} y$.
 بنابراین نتیجه $x \in D_2^\alpha$ حاصل شده که $D_2^\alpha \in \mathcal{D}^\alpha(G)$ را ایجاب
 می نماید.

(ب) فرض کنید $y \in V \setminus (D_1 \cup D_2)$. آن گاه $y \in V \setminus D_1$ و $y \in V \setminus D_2$.
 با توجه به $D_1^\alpha, D_2^\alpha \in \mathcal{D}^\alpha(G)$ ، رأس $x \in D_1 \cup D_2$ وجود دارد به طوری که
 $x \xrightarrow{\alpha} y$. بنابراین $x \in D_1^\alpha \cup D_2^\alpha \in \mathcal{D}^\alpha(G)$ که نتیجه $D_1^\alpha \cup D_2^\alpha \in \mathcal{D}^\alpha(G)$ را
 ایجاب می نماید. \square

مثال ۱۰.۳. حالت معکوس در موارد قضیه (۹.۳)، برقرار نیست. شکل ۱، را
 در نظر بگیرید. اگر $D_1^\alpha = \{v_1, v_8\}$ و $D_2^\alpha = \{v_1, v_6, v_8\}$ ، آن گاه $D_1 \subseteq D_2$ ولی
 $D_1^\alpha \notin \mathcal{D}^\alpha(G)$.

همچنین $\{v_1, v_6, v_8\} \in \mathcal{D}^\alpha(G)$ ولی $\{v_1, v_6\} \notin \mathcal{D}^\alpha(G)$ و $\{v_1, v_8\} \notin \mathcal{D}^\alpha(G)$.

۱.۳ گراف فازی ۲-چرخ قوی

ما در این زیربخش به معرفی و محاسبه عدد احاطه گری گراف فازی ۲-چرخ قوی می‌پردازیم.

حمیدی و دیگران [۸] گراف فازی قوی چرخ با مرکز ماکزیمم و گراف فازی قوی چرخ با مرکز مینیمم را تعریف نمودند. همچنین عدد و مجموعه احاطه گری فازی این دو نوع گراف فازی را مطابق با دو نتیجه زیر محاسبه کردند.

تعریف ۱۱.۳. فرض کنید $W_n = (\sigma, \mu)$ گراف فازی قوی چرخ با مرکز v باشد. آن گاه

(الف) یک گراف فازی قوی چرخ با مرکز مینیمم نامیده می‌گردد اگر

$$; \sigma(v_i) < \sigma(v_{i+1}), 1 \leq i \leq n-1$$
 و برای هر $v = \bigwedge_{v_i \in V} \sigma(v_i)$

(ب) یک گراف فازی قوی چرخ با مرکز ماکزیمم نامیده می‌گردد اگر

$$. \sigma(v_i) < \sigma(v_{i+1}), 1 \leq i \leq n-1$$
 و برای هر $v = \bigvee_{v_i \in V} \sigma(v_i)$

مثال ۱۲.۳. گراف فازی $W = (\sigma, \mu)$ با مجموعه رئوس $V = \{v, v_1, v_2, v_3\}$ به طوری که $1 \leq i \leq 2$ و مجموعه یال‌های $E = \{v_1v, v_1v_2, v_2v, v_2v_3, v_3v, v_3v_1\}$ با ارزش $\mu(v_iv_{i+1}) = 0.1$ به طوری که $1 \leq i \leq 2$ و $\mu(v_3v_1) = 0.1$ را در نظر بگیرید. اگر این گراف فازی دارای مرکز v با ارزش 0.1 باشد، گراف فازی قوی چرخ با مرکز مینیمم می‌باشد و اگر این گراف فازی دارای مرکز v با ارزش 0.3 باشد، گراف فازی قوی چرخ با مرکز ماکزیمم می‌باشد.

قضیه ۱۳.۳. فرض کنید $W_n = (\sigma, \mu)$ گراف فازی قوی چرخ با مرکز مینیمم بوده و

$$. V = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$$
 آن گاه

(الف) اگر $3 | n - k - 2$ ، آن گاه

$$\gamma_t(W_n) = \sigma(y_n)((\mu(y_n y_{n-1})) + \sum_{i \in \{n-3, n-6, \dots, k+2\}} \sigma(y_i)((\mu(y_i y_{i-1})) + \mu(y_i y_{i+1})))$$

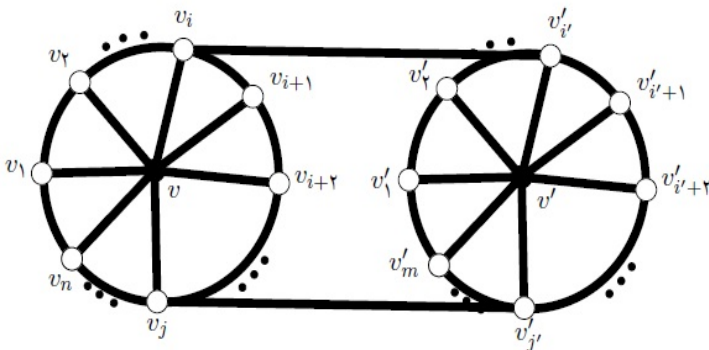
(ب) اگر $3 | n - k - 3$ ، آن گاه

$$; \sigma(y_n) \mu(y_n y_{n-1}) + \sum_{i \in \{n-2, n-5, \dots, k+3\}} \sigma(y_i)((\mu(y_i y_{i-1}) + \mu(y_i y_{i+1})))$$

(ج) اگر $n - k - 1$ ، 3 ، آن گاه $\gamma_t(W_n) = \sigma(y_{k+1})\mu(y_{k+1}y_{k+2}) + \sigma(y_n)\mu(y_n y_{n-1}) + \sum_{i \in \{n-3, n-6, \dots, k+4\}} \sigma(y_i)((\mu(y_i y_{i-1}) + \mu(y_i y_{i+1})))$.

نتیجه ۱۴.۳. فرض کنید $W_n = (\sigma, \mu)$ گراف فازی قوی چرخ با مرکز ماکزیمم باشد. آن گاه $\gamma_t(W_n) = \sigma^2(v_n)$.

تعریف ۱۵.۳. گراف فازی در شکل ۳ را گراف فازی ۲-چرخ قوی نامیده و آن را با نماد $G = (W_n, W_m)$ نشان می‌دهیم اگر $W_n = (\sigma, \mu)$ و $W_m = (\sigma', \mu')$ گراف‌های فازی چرخ قوی از مرتبه به ترتیب $n + 1$ و $m + 1$ بوده و همچنین دارای مرکزهای به ترتیب v و v' باشند به طوری که برای دو یال $e = v_i v_j$ ، $e' = v'_i v'_j$ ، رئوس v_i, v_j, v و v'_i, v'_j, v' متمایز بوده و همچنین هستند و همچنین برای هر $1 \leq a \leq n - 1$ و هر $1 \leq b \leq m - 1$ داریم $\sigma(v_a) < \sigma(v_{a+1})$ و $\sigma'(v'_b) < \sigma'(v'_{b+1})$.



شکل ۳: گراف فازی ۲-چرخ قوی $G = (W_n, W_m)$.

تعریف ۱۶.۳. فرض کنید $G = (W_n, W_m)$ گراف فازی ۲-چرخ قوی باشد. آن گاه

(الف) G ، گراف فازی ۲-چرخ قوی با مرکز سبک نامیده می‌گردد اگر

$$v' = \bigwedge_{v'_i \in V'} \sigma(v'_i) \text{ و } v = \bigwedge_{v_i \in V} \sigma(v_i)$$

(ب) G ، گراف فازی ۲-چرخ قوی با مرکز متوسط نامیده می‌گردد

اگر $v' = \bigwedge_{v'_i \in V'} \sigma(v'_i)$ و $v = \bigvee_{v_i \in V} \sigma(v_i)$ یا $v = \bigwedge_{v_i \in V} \sigma(v_i)$ و

$$v' = \bigvee_{v'_i \in V'} \sigma(v'_i)$$

(ج) G ، گراف فازی ۲-چرخ قوی با مرکز سنگین نامیده می‌گردد اگر

$$v' = \bigvee_{v'_i \in V'} \sigma(v'_i) \text{ و } v = \bigvee_{v_i \in V} \sigma(v_i)$$

مثال ۱۷.۳. گراف فازی ۲-چرخ قوی $G = (W_3, W'_3)$ که شامل گراف فازی چرخ قوی $W_3 = (\sigma, \mu)$ با مجموعه رئوس $V = \{v, v_1, v_2, v_3\}$ ، $\sigma(v_i) = \circ.i$ ، به طوری که $1 \leq i \leq 2$ و مجموعه یال‌های $E = \{v_1v, v_1v_2, v_2v, v_2v_3, v_3v, v_3v_1\}$ با ارزش $\mu(v_iv_{i+1}) = \circ.i$ به طوری که $1 \leq i \leq 2$ و همچنین گراف فازی چرخ قوی $W'_3 = (\sigma', \mu')$ با مجموعه رئوس $V' = \{v', v'_1, v'_2, v'_3\}$ ، $\sigma(v'_i) = \circ.i$ ، به طوری که $1 \leq i \leq 2$ و مجموعه یال‌های $E' = \{v'_1v', v'_1v'_2, v'_2v', v'_2v'_3, v'_3v', v'_3v'_1\}$ با ارزش $\mu'(v'_iv'_{i+1}) = \circ.i$ به طوری که $1 \leq i \leq 2$ و $\mu(v'_3v'_1) = \circ.1$ را در نظر بگیرید. یک یال از رأس v_2 به رأس v'_2 و یک یال از رأس v_3 به رأس v'_3 ایجاد نموده و ارزش‌های این یال‌ها را به صورت $\mu(v_2v'_2) = \circ.2$ و $\mu(v_3v'_3) = \circ.3$ تعریف کنیم. اگر این گراف فازی دارای مرکز v با ارزش $\circ.1$ باشد و دارای مرکز v' با ارزش $\circ.1$ باشد، گراف فازی قوی ۲-چرخ با مرکز سبک می‌باشد. اگر این گراف فازی دارای مرکز v با ارزش $\circ.1$ باشد و دارای مرکز v' با ارزش $\circ.3$ باشد، گراف فازی قوی ۲-چرخ با مرکز متوسط می‌باشد. اگر این گراف فازی دارای مرکز v با ارزش $\circ.3$ باشد و دارای مرکز v' با ارزش $\circ.3$ باشد، گراف فازی قوی ۲-چرخ با مرکز سنگین می‌باشد.

قضیه ۱۸.۳. فرض کنید $G = (W_n, W_m)$ یک گراف فازی ۲-چرخ قوی باشد. آن‌گاه

$$D_{min}^\alpha(G) = D_{min}^\alpha(W_n) \cup D_{min}^\alpha(W_m).$$

اثبات. بدون کاستن از کلیت مطلب، فرض کنید $v_nv'_j$ به طوری که $n < j$. آن‌گاه دور $P : v, v'_j, v', v'_i, v_i, v$ دارای شدت $\sigma(v_i) < \sigma(v)$ است که $\sigma(v_i) < \sigma(v)$ ایجاب می‌نماید که یال v, v'_j یک یال α -قوی نیست. بنابراین دو یال ایجاد شده، تاثیری در تغییر نوع یال α -قوی در گراف ندارند. پس بنابر قضیه‌های ۱۳.۳ و ۱۴.۳،

□

$$D_{min}^\alpha(G) = D_{min}^\alpha(W_n) \cup D_{min}^\alpha(W_m)$$

قضیه ۱۹.۳. فرض کنید $G = (W_n, W_m)$ یک گراف فازی ۲-چرخ قوی باشد. آن گاه

$$\gamma_t(G) = \gamma_t(W_n) + \gamma_t(W_m).$$

اثبات. بنابر قضیه‌های ۱۸.۳، ۱۳.۳ و ۱۴.۳، $\gamma_t(G) = \gamma_t(W_n) + \gamma_t(W_m)$.

□

۲.۳ گراف فازی ۲-کامل

ما در این زیربخش به معرفی و محاسبه عدد احاطه گری فازی ۲-کامل می‌پردازیم. حمیدی و دیگران [۷] عدد و مجموعه احاطه گری فازی گراف فازی کامل را مطابق با نتیجه زیر محاسبه کردند.

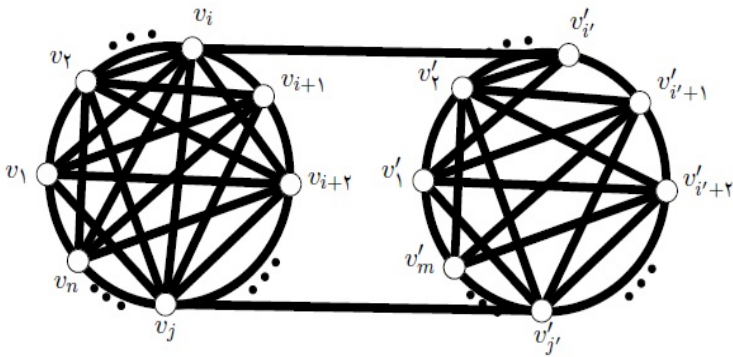
قضیه ۲۰.۳. فرض کنید $K_n = (\sigma, \mu)$ یک گراف فازی کامل بوده و برای هر دو رأس متمایز $w, w' \in V$ ، $\sigma(w) \neq \sigma(w')$. اگر رأس $y \in V$ وجود داشته باشد به طوری که $\bigvee_{x \in V \setminus \{y\}} \sigma(x) = \sigma(z)$ و $\bigvee_{x \in V} \sigma(x) = \sigma(y)$ آن گاه

$$\gamma_t(K_n) = T_{min}\{\sigma(y)\mu(yz), \sigma(z)\mu(yz)\} \quad (\text{الف})$$

$$\gamma_t(K_n) = \sigma^2(z) \quad (\text{ب})$$

$$\gamma_t(K_n) = \sigma(z) \quad (\text{ج}) \quad \text{مجموعه احاطه گر رأسی است.}$$

تعریف ۲۱.۳. گراف فازی در شکل ۴ را گراف فازی ۲-کامل نامیده و آن را با نماد $G = (K_n, K_m)$ نشان می‌دهیم اگر $K_n = (V, \sigma, \mu)$ و $K_m = (V', \sigma', \mu')$ گراف‌های فازی کامل از مرتبه به ترتیب n و m بوده به طوری که برای دو یال $e = v_i v_j$ و $e' = v'_i v'_j$ ، رئوس v_i, v_j, v_n متمایز بوده و v'_i, v'_j, v'_m نیز متمایز هستند و همچنین برای هر $1 \leq a \leq n-1$ و هر $1 \leq b \leq m-1$ به ترتیب داریم $\sigma(v_a) < \sigma(v_{a+1})$ و $\sigma(v'_b) < \sigma(v'_{b+1})$.



شکل ۴: گراف فازی ۲-کامل $G = (K_n, K_m)$

قضیه ۲۲.۳. فرض کنید $G = (K_n, K_m)$ یک گراف فازی ۲-کامل باشد. آن گاه

$$D_{min}^\alpha(G) = D_{min}^\alpha(K_n) \cup D_{min}^\alpha(K_m).$$

اثبات. بدون کاستن از کلیت مطلب، فرض کنید $v_{n-1}v'_j$ به طوری که $n-1 < j$. آن گاه دور $P : v_{n-1}, v'_j, v'_{m-1}, v'_i, v_i, v$ ، بنا بر $i \neq n-1$ ، با توجه به $i \neq n-1$ دارای شدت $\sigma(v_i)$ است که $\sigma(v_i) < \sigma(n-1)$ ایجاب می‌نماید که یال $v_{n-1}v'_j$ یک یال $-\alpha$ قوی نیست. بنابراین دو یال ایجاد شده، تاثیری در تغییر نوع یال $-\alpha$ قوی در گراف ندارند. پس بنا بر

□ قضیه ۲۰.۳، $D_{min}^\alpha(G) = D_{min}^\alpha(K_n) \cup D_{min}^\alpha(K_m)$.

قضیه ۲۳.۳. فرض کنید $G = (K_n, K_m)$ یک گراف فازی ۲-کامل باشد. آن گاه

$$\gamma_t(G) = \gamma_t(K_n) + \gamma_t(K_m).$$

اثبات. بنا بر قضیه ۲۲.۳ و همچنین قضیه ۲۰.۳،

□ $\gamma_t(G) = \gamma_t(K_n) + \gamma_t(K_m)$.

۴ کاربردهای عدد احاطه گری

در این بخش، ما از مفاهیم و نتایج عدد احاطه گری در گراف فازی ۲-کامل و گراف فازی ۲-چرخ قوی استفاده کرده و به معرفی برخی از کاربردهای این مفهوم در زندگی حقیقی می‌پردازیم.

شبکه مختلط یادگیری ماشین

یادگیری ماشین به عنوان روشی از تجزیه و تحلیل روی داده‌ها بر روی شبکه پیچیده از داده‌ها به کار می‌رود. این شبکه یک مدل بر پایه داده برای تصمیم‌گیری و پیش‌بینی بدون استفاده از برنامه‌ها به عنوان مدل، می‌سازد. همچنین دارای کاربردهای متفاوت و زیادی در پزشکی و ایده پردازشی کامپیوتر است به طوری که توسعه برنامه‌ها بسیار سخت یا غیرممکن است. در ادامه، ما یک کاربرد از عدد احاطه گری و شبکه مختلط یادگیری ماشین ارائه می‌دهیم. فرض کنید $\{v_1, v_2, \dots, v_6\}$ یک مجموعه از پایگاه داده‌ها و $\{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5, v_5v_6, v_6v_1\}$ یک مجموعه از بخشی از ارتباط کابلی بین پایگاه داده‌ها باشد. فرض کنید انرژی مصرف شده از پایگاه داده‌ها و انرژی مصرف شده از کابل‌های بین پایگاه داده‌ها در جدول ۱ و شکل ۵ باشند.

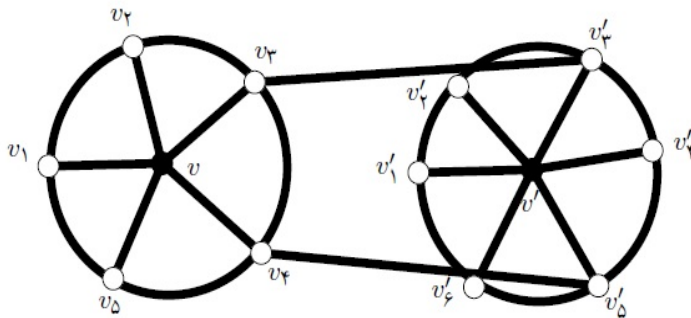
جدول ۱: انرژی مصرف شده پایگاه داده‌ها

v_6	v_5	v_4	v_3	v_2	v_1	پایگاه داده‌ها
۱۰۰	۵۰۰	۴۰۰	۳۰۰	۲۰۰	۱۰۰	انرژی مصرف شده پایگاه داده‌ها
v_6v_5	v_5v_4	v_4v_3	v_3v_2	v_2v_1	v_1v_6	کابل‌های ارتباط دهنده
۱۰۰	۵۰۰	۴۰۰	۳۰۰	۲۰۰	۱۰۰	انرژی مصرف شده کابل

به ترتیب عبارات v_i انرژی مصرف شده پایگاه داده $\sigma(v) = \bigvee_{i \in \{1, 2, \dots, 6\}} \sigma(v_i)$ ، $\sigma(v_i) = \frac{v_i \text{ انرژی مصرف شده پایگاه داده}}{1000}$ و $\mu(v_i v) = \sigma(v_i)$ را مقدار فازی انرژی مصرف شده از پایگاه داده v_i ، مقدار فازی انرژی مصرف شده از پایگاه داده v ، مقدار فازی انرژی مصرف شده از کابل $v_i v$ و مقدار فازی انرژی مصرف شده از کابل $v_i v_{i+1}$ به طوری که $i \in \mathbb{N}$ و $1 \leq i \leq 5$ ، تعریف نمائید.

فرض کنید این مدل ماشین یادگیری در قالب یک مدل مطرح شده در تعریف ۱۶.۳ (ج)، بخشی از یک مدل از یک سیستم پیچیده است که در آن، هر ارتباط کابلی خارج از مدل

ماشین دارای یک مسیر از ارتباطات کابلی بین پایگاه داده‌ها است به طوری که شدت این مسیر از ارزش فازی این ارتباط کابلی بیش تر است. بنابراین عدد احاطه گری و مجموعه احاطه گری فازی این سیستم به ترتیب برابر با عدد احاطه گری و مجموعه احاطه گری فازی گراف فازی ۲-چرخ قوی با مرکز سنگین است. در واقع این سیستم به عنوان گراف فازی دارای زیرگراف فازی ۲-چرخ قوی با مرکز سنگین است. به وضوح عدد و مجموعه احاطه گری فازی این گراف فازی با عدد و مجموعه احاطه گری فازی این زیرگراف فازی برابر است. مسأله به صورت یافتن مجموعه و عدد احاطه گری فازی بهینه از این مدل



شکل ۵: گراف فازی ۲-چرخ قوی $G = (W_5, W_6)$

براساس نمونه اطلاعات مطرح شده در جدول ۱، و توضیحات مطرح شده می‌باشد. ارتباطات کابلی بین هر دو پایگاه داده ای دلخواه راه را برای بدست آوردن عدد و مجموعه احاطه گری فازی پیچیده و سخت می‌نماید اما با توجه به قضیه عدد احاطه گری و مجموعه احاطه گری فازی این زیرمدل $G = (W_5, W_6)$ و به عنوان پیامدی از آن، عدد احاطه گری و مجموعه احاطه گری فازی مدل اصلی $M = (V, \sigma, \mu)$ به ترتیب برابر با $\gamma_t(M) = \gamma_t(G = (W_5, W_6)) = \sigma^2(v_5) + \sigma^2(v'_6) = 0.25 + 0.36 = 0.61$ و $D_{min}^\alpha(M) = D_{min}^\alpha(G = (W_5, W_6)) = (V \setminus \{v_6\}) \cup \{v\} \cup (V' \setminus \{v'_5\}) \cup \{v'\}$ است. لازم به ذکر است که از مدل اصلی اطلاعاتی در مورد تعداد رئوس وجود ندارد ولی این مطلب مشخص است که این مدل دارای یک زیرگراف فازی ۲-چرخ قوی با مرکز سنگین $G = (W_5, W_6)$ است که در تعریف ۱۶.۳ (ج) تعریف شده‌اند. به طوری که هر یال در مدل اصلی که در این زیرگراف نیست دارای یک مسیر در این زیرگراف فازی

۲- چرخ قوی با مرکز سنگین است به طوری که شدت این مسیر از ارزش فازی این یال بیش تر است.

شبکه مختلط حمل و نقل

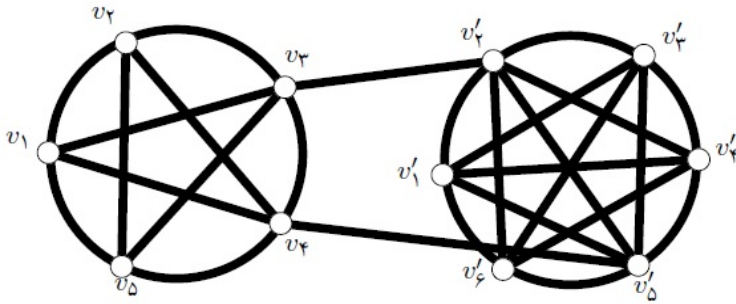
شبکه‌های حمل و نقل دسترسی را به برخی از سرویس بر پایه حرکت یا جریان که مرتبط با فضای جغرافیایی هستند، امکان پذیر می‌سازند. این شبکه جریان ارتباط بین تمام قسمت‌های جهان است که بر پایه برخی از روش‌ها مانند خطوط لوله، مسیرهای هوایی، شبکه‌های جاده‌ای، مسیرهای ریلی و خطوط قدرت می‌باشد. فرض کنید یک مجموعه از شبکه‌های مختلط حمل و نقل ارائه شده و هدف محاسبه سریع عدد احاطه گری بهینه هر شبکه مختلط حمل و نقل است. فرض کنید $\{M_1, M_2, M_3\}$ یک مجموعه از مدل‌های شبکه مختلط حمل و نقل باشد به طوری هیچ اطلاعاتی از این مدل‌ها در دسترس نیست به جز این که این مدل‌ها به صورت گراف فازی مدلسازی شده و هر گراف فازی دارای زیرگراف فازی ۲-کامل به عنوان زیرمدل است به شکلی که هر یال خارج از این زیرگراف فازی ۲-کامل دارای مسیری در این گراف فازی در شکل ۶ و توضیحات مرتبط با آن است به طوری که شدت این مسیر از ارزش فازی این یال بیش‌تر است و همچنین مدل M_i دارای زیرمدل متناظر $G_i = (K_{\Delta+i}, K_{\Phi+i})$ است به طوری که $1 \leq i \leq 3$. فرض کنید $\{v_1, v_2, \dots, v_6\}$ یک مجموعه از فرودگاه‌ها و $\{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5, v_5v_6, v_6v_1\}$ یک مجموعه از بخشی از راه‌های هوایی بین فرودگاه‌ها باشد. هزینه مصرف شده در فرودگاه‌ها و سوخت مصرف شده در هواپیماها در جدول ۲ و شکل ۶ باشد.

جدول ۲: هزینه‌های مصرف شده در فرودگاه‌ها و سوخت مصرف شده در هواپیماها

v_6	v_5	v_4	v_3	v_2	v_1	فرودگاه‌ها
۱۰۲۰	۸۵۰	۶۸۰	۵۱۰	۳۴۰	۱۷۰	هزینه فرودگاه‌ها
v_6v_1	v_5v_6	v_4v_5	v_3v_4	v_2v_3	v_1v_2	خطوط هوایی
۱۰۲۰	۸۵۰	۶۸۰	۵۱۰	۳۴۰	۱۷۰	سوخت مصرف شده در هواپیماها

به ترتیب عبارات $\sigma(v_i) = \frac{v_i \text{ هزینه فرودگاه}}{170}$ و $\mu(v_i v_{i+t}) = \sigma(v_i)$ را مقدار فازی هزینه مصرف شده در فرودگاه v_i و مقدار فازی سوخت مصرف شده در هواپیما $v_i v_{i+t}$ به

طوری که $i, t \in \mathbb{N}$ و $1 \leq i, t + 6 \leq 6$ ، تعریف نمائید. ارتباطات هوایی بین هر دو



شکل ۶: گراف فازی ۲-کامل $G = (K_5, K_6)$

فرودگاه دلخواه راه را برای بدست آوردن عدد احاطه گری هر مدل، پیچیده و سخت می‌نماید اما با توجه به قضیه ۲۳.۳ برای هر $1 \leq i \leq 3$ ، عدد احاطه گری زیرمدل‌های $G_i = (K_{\Delta+i}, K_{\epsilon+i})$ و به عنوان پیامدی از آن، عدد احاطه گری مدل‌های اصلی $M_i = (V_i, \sigma_i, \mu_i)$ به صورت زیر محاسبه می‌گردد.

$$\gamma_t(M_1) = \gamma_t(G_1 = (K_6, K_5)) = \sigma^2(v_5) + \sigma^2(v_6) = 0.41,$$

$$\gamma_t(M_2) = \gamma_t(G_2 = (K_7, K_6)) = \sigma^2(v_6) + \sigma^2(v_5) = 0.61,$$

$$\gamma_t(M_3) = \gamma_t(G_3 = (K_8, K_7)) = \sigma^2(v_7) + \sigma^2(v_6) = 0.85.$$

بنابراین برای هر مجموعه از شبکه‌های مختلط حمل و نقل که هر شبکه مختلط حمل و نقل دارای ویژگی خاص مطرح شده است، عدد احاطه گری هر شبکه در سریع‌ترین زمان ممکن محاسبه شده و راه را برای تجزیه و تحلیل بیش‌تر هر شبکه مهیا می‌سازد زمانی که هر شبکه دارای یک زیرشبکه بوده که در آن ارتباطات بین فرودگاه‌ها به بالاترین ظرفیت خود رسیده است و رابطه خاصی بین شبکه و زیرشبکه موردنظر وجود دارد.

۵ نتیجه گیری

در این مقاله، به معرفی تعریف جدیدی از عدد احاطه گری و مجموعه احاطه گر روی گراف های فازی پرداختیم و در این راستا به مطالعه اختصاصی گراف های فازی ۲-چرخ قوی و گراف فازی ۲-کامل پرداختیم. مقایسه ای بین تعریف جدید و تعاریف پیشین صورت گرفته و در این اقدام، نتایج جدیدی حاصل گشت. شبکه های مختلط به عنوان کاربردی از این مفهوم از دیگر کارهای صورت گرفته در این مقاله است. چشم انداز ما در مورد این پژوهش، درک هر چه بیش تر این مفهوم در قالب مطالعات آتی روی مدل های مختلفی از گراف های فازی شامل ابرگراف های فازی بوده و در این فرآیند به یافتن کاربردهای جدیدی از این مفهوم در موضوع مطرح شده می پردازیم. برای کارهای بعدی می توانیم روی عدد احاطه گری براساس گراف های نیتروسوفیک و ابرگراف های فازی و نیتروسوفیک تحقیق کنیم و کاربرد آن ها را در ابرشبکه های مختلط بیاوریم.

مراجع

- [۱] جاویدی آل سعدی، م. جمشیدی، ف. (۱۳۹۹). طراحی کنترل گر فازی مبتنی بر الگوریتم بهینه سازی ازدحام ذرات برای ربات تعادلی دو چرخ. سیستم های فازی و کاربردها، دوره ۳، شماره ۲، صص. ۱ تا ۲۷.
- [۲] حسن پور، ح. رهنما، س. (۱۳۹۹). حل مسئله تصمیم گیری گروهی چند معیاره در محیط فازی شهودی دوزنقه ای. سیستم های فازی و کاربردها، دوره ۳، شماره ۲، صص. ۷۳ تا ۸۷.

[3] S. Afsharmanesh and R. A. Borzooei, Domination in fuzzy incidence graphs based on valid edges, J. Appl. Math. Comput., (2021).

[4] M. Akram, D. Saleem and B. Davvaz, Energy of double dominating bipolar fuzzy graphs, J. Appl. Math. Comput., **61** (2019), 219–234.

- [5] N. Biggs, E. Lloyd and R. Wilson, Graph Theory 1736–1936, Clarendon Press, 1976.
- [6] E. J. Cockayne and S. T. Hedetniemi, Towards a theory of domination in graphs, *Networks*, **7** (1977), 247–261.
- [7] M. Hamidi, M. Nikfar, and A. Radfar, Decision making Based on Fuzzy Bridges in Fuzzy Graphs, (submitted)
- [8] M. Hamidi and M. Nikfar, Fuzzy Domination Number Based on Fuzzy Bridges And Real Applications, (submitted)
- [9] M. Ismayil and I. Mohideen, Complementary nil domination in fuzzy graphs, *Ann. Fuzzy Math. Inform.*, (2014), 1–8.
- [10] A. Kauffmann, Introduction to the Theory of Fuzzy Sets, Academic Press, Inc., Orlando, Florida, **1**, 1973.
- [11] O.T. Manjusha and M.S. Sunitha, Strong Domination in Fuzzy Graphs, *Fuzzy Inf. Eng.*, **7** (2015), 369–377.
- [12] O.T. Manjusha and M.S. Sunitha, Notes on domination in fuzzy graphs, *J. Intell. Fuzzy Syst.*, **27** (2014), 3205–3212.
- [13] O.T. Manjusha and M.S. Sunitha, Connected domination in fuzzy graphs using strong edges, *Ann. Fuzzy Math. Inform.*, **10 (6)** (2015), 979–994.
- [14] J. N. Mordeson, P. S. Nair, Fuzzy Graphs and Fuzzy Hypergraphs, Physica Verlag Heideberg, New Yourk, 2000.
- [15] O.T. Manjusha and M.S. Sunitha, The Strong Domination Alteration Sets in Fuzzy Graphs, *Int. j. math.*, **4 (2-D)** (2016), 109–123.

- [16] A. Nagoorgani, Muhammad Akram and S. Anupriya, Double domination on intuitionistic fuzzy graphs, *J. Appl. Math. Comput.*, **52** (2016), 515–528.
- [17] H. Naresh Kumar, D. Pradhan and Y. B. Venkatakrisnan, Double vertex-edge domination in graphs: complexity and algorithms, *J. Appl. Math. Comput.*, **66** (2021), 245–262.
- [18] A. Nagoorgani and V.T. Chandrasekaran, Domination in fuzzy graph, *Adv. in fuzzy sets and systems*, **1 (1)** (2006), 17–26.
- [19] C. Natarajan and S.K. Ayyaswamy, on Strong (weak) domination in Fuzzy Graphs, *Int. J. Electr. Comput. Eng.*, **4 (7)** (2010), 1035–1037.
- [20] A. Nagoorgani and P. Vadivel, Relations between the parameters of Independent Domination and Irredundance in Fuzzy Graphs, *Int. J. Comput. Sci. Math.*, **2 (1)** (2009), 15–19.
- [21] O. Ore, *Theory of Graphs*. Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., (Amer. Math. Soc., Providence, RI), **38**, 1962.
- [22] N. Sarala and T. Kavitha, (1, 2)-Vertex Domination in Fuzzy Graphs, *Int. j. innov. res. technol. sci. eng.*, **5 (7)** (2016), 16501–16505.
- [23] A. Somasundaram and S. Somasundaram, *Domination in fuzzy graphs-I*, *Pattern Recognit Lett.*, **19** (1998), 787–791.
- [24] S. Vimala and J.S. Sathya, Efficient Domination number and Chromatic number of a Fuzzy Graph, *Int. j. innov. res. technol. sci. eng.*, **3 (3)** (2014), 9965–9970.
- [25] L.A. Zadeh, *Fuzzy sets*, *Information and Control*, **8** (1965), 338–353.
- [26] B. O’Neill, *Semi-Riemannian geometry*, Academic Press, 1986.

- [27] J. Oprea, *Differential geometry and its applications*, Prentice Hall, second ed., 2004.