

تحلیلی بر اعداد فازی دوقطبی

فاطمه باباکردی*، نعت اله تقی‌نژاد

گروه ریاضی و آمار، دانشکده علوم پایه، دانشگاه گنبد کاووس، گنبد کاووس، ایران

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۲/۲۱

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۵/۱۹

نوع مقاله: علمی-مروری

چکیده. در این مقاله به معرفی و مرور مجموعه‌ها و انواع مختلف اعداد فازی دوقطبی خواهیم پرداخت و سپس با تعریف جمع و ضرب اسکالر برای اعداد فازی دوقطبی مثلثی، به معرفی یک رتبه‌بندی جدید مبتنی بر مرکز ثقل برای این دسته از اعداد می‌پردازیم و با بیان چند قضیه و گزاره، ویژگی‌های روش جدید را اثبات خواهیم کرد. در پایان مثال‌های عددی و مقایسه‌ای را ارائه می‌کنیم.

۱. سرآغاز

ریاضیات ابزاری برای مدل‌سازی مسائل جهان واقعی و تعیین راه‌حل‌های مناسب برای آن‌ها می‌باشد، از این‌رو هر چه مدل ریاضی به مسئله‌ی جهان واقعی نزدیک‌تر باشد خروجی مدل دقیق‌تر خواهد بود [۳۱]. از طرفی دانش بشر نسبی و پراز ابهام و عدم قطعیت است که این ابهامات بایستی در مدل‌سازی ریاضی در نظر گرفته شوند، لذا لطفی‌زاده در [۴۰] مجموعه‌های فازی را معرفی کرد که کاربردهای گوناگون و مهمی از آن بدست آمد [۱۱، ۱۴، ۳۰، ۳۲، ۳۵]. ژانگ^۱ با تعمیم مجموعه‌های فازی، مجموعه‌های فازی دوقطبی را معرفی کرد که درجه

2010 Mathematics Subject Classification. 03B52; 03E72

* Corresponding author

E-mail: babakordif@yahoo.com.

عبارات و کلمات کلیدی. مجموعه فازی دوقطبی، انواع اعداد فازی دوقطبی، رتبه‌بندی اعداد فازی دوقطبی، مرکز ثقل.

¹Zhang

عضویت اعضاي آن متعلق به $[1, -1]$ می باشد [۴۱]. مجموعه‌هاي فازی دوقطبی نه تنها از نظر تئوري [۱۸، ۴۷] بلکه در محیط‌هاي عدم قطعیت نظیر روان‌پزشکیمحاسباتی [۴۴]، علم پزشکی [۲۳، ۴۶]، منطق کوانتوم دوقطبی [۴۲، ۴۵]، فیزیک و فلسفه [۴۳] و غیره کاربردهاي متنوعی دارد.

در [۱۹] عملگر تجمعی پیشرفته برای روش تصمیم‌گیری چند معیاره در محیط نرم فازی دوقطبی مورد بحث قرار گرفت و در [۱، ۲، ۴] به حل دستگاه خطی فازی دوقطبی و دستگاه خطی فازی دوقطبی LR، پرداخته شد. سپس تئوري مجموعه‌هاي فازی دوقطبی روی زیرگروه‌ها بکاربرده شد و ساختاري خاص برای زیرحلقه‌هاي فازی دوقطبی مطرح گردید [۸، ۳۹].

در [۲۴]، ایده مجموعه‌هاي فازی فیثاغورثی دوقطبی و ویژگی‌هاي آن که تعمیم مجموعه‌هاي فازی، مجموعه‌هاي فازی دوقطبی، مجموعه‌هاي فازی شهودي و مجموعه‌هاي فازی شهودي دوقطبی است، ارائه شد که می‌تواند در طول فرآیند تصمیم‌گیری با داده‌هاي مشکوک با انعطاف بیشتری برخورد کند و سپس به بیان کاربرد آن در مسائل تصمیم‌گیری پرداخته شد. در ادامه مفهوم ماتریس فازی فیثاغورث دوقطبی و عملیات اساسی آن معرفی و عملیات ضرب اسکالر و توان یک ماتریس فازی فیثاغورثی دوقطبی تعریف شد و برخی از خواص آن‌ها نیز مورد بحث قرار گرفت [۲۹]. اکرم و همکاران روش‌هاي مختلفی برای حل مسائل تصمیم‌گیری چند معیاره شامل اندازه‌گیری‌هاي دوقطبی با مقادیر مثبت و منفی ارائه کردند [۶]. سپس آن‌ها به طور عمیق یکی دیگر از تکنیک‌هاي شناخته شده، یعنی روش ویکور^۱ را بررسی کرده و به منظور تجزیه و تحلیل مدل دوقطبی از دیدگاهی متفاوت، مدل تصمیم‌گیری گروهی چند معیاره ابتکاری به نام روش ویکور فازی دوقطبی ذوزنقه‌اي را توسعه دادند و بیان داشتند که این یک نسخه باز طراحی شده مناسبی از روش محبوب ویکور است که می‌تواند اطلاعات نادرست را با یک پیکربندی دوقطبی خاص ترکیب کند که گسترش دوقطبی مجموعه‌هاي فازی (و اعداد) یک مبادله متقارن را بین دو مؤلفه غیرمنطقی استدلال و تفکر انسان باز می‌کند و ممکن است مواردی وجود داشته باشد که عدم قطعیت اطلاعات توسط اصطلاحات زبانی قابل ترجمه به اعداد فازی دوقطبی ذوزنقه‌اي تفسیر شود. کارشناسان تصمیم‌گیری، اعداد فازی دوقطبی ذوزنقه‌اي را بررسی می‌کنند تا براساس معیارهاي متناقض، رتبه‌هاي ترجیحی را به گزینه‌ها اختصاص دهند [۷]. در ادامه آن‌ها نسخه جدیدی از روش پرومته^۲ با استفاده از اطلاعات فازی دوقطبی ارائه کردند و آن را به عنوان روش پرومته فازی دوقطبی نامیدند [۵]. در [۱۷]

¹Vikor

²Promethee

ابریگراف فازی با مقدار فاصله دوقطبی برای آشکار کردن رابطه درونی داده‌های فازی و ارائه برخی خصوصیات آن بررسی شد. شبکه مفهومی فازی دوقطبی راهی برای تجزیه و تحلیل عدم قطعیت در مجموعه است و از آنجائی که داده‌های نرم فراتر از فضای تک قطبی داده می‌باشد و در این فرآیند، هنگام برخورد با تعداد زیادی از مفاهیم فازی دوقطبی و اهمیت آن برای فرآیند تصمیم‌گیری کافی، به یک مسئله پرداخته می‌شود و ممکن است به دلیل دوقطبی بودن و وجود آن در بازخورد مشتری یا نظر کارشناسان تصادفی در تصمیم‌گیری ایجاد کند لذا برای غلبه بر این موضوع، تصادفی بودن مفاهیم فازی دوقطبی با استفاده از خواص آنتروپی شانون اندازه‌گیری شد [۲۸].

قنبری و همکاران تابع رتبه‌بندی خطی برای مرتب‌سازی اعداد فازی دوقطبی مطرح و خواص آن را بررسی و با استفاده از این تابع رتبه‌بندی، به حل مسئله برنامه‌ریزی خطی فازی دوقطبی پرداختند [۱۶]. رایاپان^۱ و همکاران مفهوم مجموعه‌های فازی دوقطبی کروی را به عنوان ترکیبی از مجموعه‌های فازی کروی و مجموعه‌های فازی دوقطبی مقدار به همراه ویژگی‌ها و عملیات حسابی روی آن‌ها معرفی و کاربرد آن‌ها در مسئله تصمیم‌گیری چند معیاره را بررسی کردند [۲۷]. اکرم^۲ و همکاران، مفاهیم اعداد فازی دوقطبی، اعداد فازی دوقطبی ذوزنقه‌ای، اعداد فازی دوقطبی مثلثی و متغیرهای زبانی فازی دوقطبی معرفی کرده و تابع رتبه‌بندی روی مجموعه تمام اعداد فازی دوقطبی و رتبه‌بندی اعداد فازی دوقطبی ذوزنقه‌ای و مثلثی را تعریف و روش تصمیم‌گیری گروهی بر اساس روش تاپسیس^۳ فازی دوقطبی ذوزنقه‌ای را پیشنهاد و به مقایسه نظری روش تاپسیس فازی دوقطبی ذوزنقه‌ای پیشنهادی با سایر روش‌های تصمیم‌گیری چند معیاره مانند تاپسیس، تاپسیس فازی دوقطبی و ELECTREI فازی دوقطبی پرداختند [۳]. محمود^۴ و همکاران، مفهوم مسئله برنامه‌ریزی خطی غیرفازی در محیط فازی دوقطبی بر اساس اعداد فازی دوقطبی را گسترش داده و عملیات حسابی اعداد فازی دوقطبی نامحدود و ضرب عدد فازی دوقطبی ذوزنقه‌ای نامحدود (TrBFN) با TrBFN غیرمنفی را تعریف و روشی برای حل مسائل برنامه‌ریزی خطی فازی کاملاً دوقطبی با محدودیت‌های برابری درحالی که ضرایب اعداد فازی دوقطبی مثلثی نامحدود و متغیرهای تصمیم اعداد فازی دوقطبی مثلثی غیرمنفی و حالتی که متغیرهای تصمیم TrBFN نامحدود هستند را بررسی کردند [۲۶]. در [۲۵]، به حل مسائل برنامه‌ریزی خطی فازی کاملاً دوقطبی (FBFLPP) با محدودیت‌های

¹Rayappan

²Akram

³Topsis

⁴Mehmood

برابری پرداخته شد و با تعریف اعداد فازی دوقطبی LR و عملیات حسابی آن‌ها، ضرب اعداد فازی دوقطبی LR بررسی شد. ضمناً روشی برای حل‌های LR FBFLPP با محدودیت‌های برابری شامل اعداد فازی دوقطبی LR به عنوان پارامترها و متغیرها توسعه داده شد و رتبه‌بندی برای اعداد فازی دوقطبی LR تعریف شد که LR FBFLPP را به یک مسئله برنامه‌ریزی خطی واضح تبدیل می‌کرد. کریشناونی^۱ و همکاران مجموعه‌های دوقطبی فازی در سیستم رتبه‌بندی را بررسی کردند [۲۱].

بنابراین با توجه به اینکه بسیاری از تصمیم‌گیری‌های بشر نظیر رقابت، دشمنی، شراکت و غیره مبتنی بر تفکرات دوقطبی یا دوطرفه هستند که از یک سو مثبت و از سوی دیگر منفی می‌باشند و منطق دودویی فقط شامل صفر و یک و منطق فازی یک ابزار برای نمایش ابهام و عدم قطعیت است ولی هر دو دارای نواقصی برای مدل‌سازی روابط دوقطبی می‌باشند و علت آن نیز این است که آن‌ها در بازه‌ی صفر تا یک قرار می‌گیرند که برای نمایش مدل‌های تک قطبی در طبیعت مناسب می‌باشند و مجموعه‌های فازی دوقطبی در واقع ترکیب ابهام و قطب آن می‌باشند که ابزاری برای نمایش موضوعاتی از طبیعت می‌باشد که هر دو قطب مثبت یا منفی را دارند و با توجه به کاربردی بودن اعداد فازی دوقطبی جهت آشنایی هر چه بیشتر پژوهشگران با مجموعه‌های فازی دوقطبی و استفاده از این اعداد در مدل‌سازی‌ها در این مقاله به معرفی و بحث روی این دسته از اعداد می‌پردازیم و سپس یک رتبه‌بندی مبتنی بر مرکز ثقل برای اعداد فازی دوقطبی مثلی همراه با گزاره‌ها و مثال‌های کاربردی ارائه خواهیم کرد. ساختار مقاله به این صورت است که در بخش ۲ انواع اعداد فازی دوقطبی را بررسی می‌کنیم. در بخش ۳ یک رتبه‌بندی جدید برای اعداد فازی دوقطبی مثلی مطرح و ویژگی‌های آن را مورد بررسی قرار خواهیم داد. مثال‌های عددی در بخش ۴ آورده شده و سرانجام در بخش ۵ نتیجه‌گیری پژوهش ارائه می‌گردد.

۲. اعداد فازی دوقطبی و انواع آن

در این بخش به مرور مجموعه‌های فازی دوقطبی و انواع اعداد فازی دوقطبی و برخی اعمال روی آنها می‌پردازیم.

¹Krishnaveni

تعریف ۱.۲ (مجموعه‌ی فازی دوقطبی). [۳] فرض کنید X یک مجموعه‌ی غیرتهی باشد، یک مجموعه‌ی فازی دوقطبی A در X به فرم زیر است:

$$A = \{ \langle x, \lambda_I(x), \lambda_K(x) \rangle \mid x \in X \}$$

که در آن $\lambda_I(x) : X \rightarrow [0, 1]$ و $\lambda_K(x) : X \rightarrow [-1, 0]$.

تعریف ۲.۲ (عدد فازی دو قطبی). [۳] عدد فازی دو قطبی

$$A = \langle I, K \rangle = \langle [l_1, l_2, l_3, l_4], [k_1, k_2, k_3, k_4] \rangle$$

یک زیر مجموعه‌ی فازی دو قطبی از خط حقیقی \mathbb{R} با درجه عضویت λ_I و درجه عدم عضویت λ_K می‌باشد که در فرضیه‌های زیر صدق می‌کنند:

آ. λ_I تابعی قطعه قطعه پیوسته از خط حقیقی به بازه‌ی $[0, 1]$ و λ_K تابعی قطعه قطعه پیوسته از خط حقیقی به بازه‌ی $[-1, 0]$ می‌باشد؛

ب. برای هر $x \in (-\infty, l_1]$ ، $\lambda_I(x) = 0$ و برای هر $x \in (-\infty, k_1]$ ، $\lambda_K(x) = 0$ می‌باشد.

پ. $\lambda_I(x)$ اکیداً افزایشی در بازه‌ی $[l_1, l_2]$ و $\lambda_K(x)$ اکیداً کاهشی در بازه‌ی $[k_1, k_2]$ می‌باشد.

ت. برای هر $x \in [l_2, l_3]$ ، $\lambda_I(x) = 1$ و برای هر $x \in [k_2, k_3]$ ، $\lambda_K(x) = -1$ است.

ث. $\lambda_I(x)$ اکیداً کاهشی در بازه‌ی $[l_3, l_4]$ و $\lambda_K(x)$ اکیداً افزایشی در بازه‌ی $[k_3, k_4]$ می‌باشد.

ج. برای هر $x \in [l_4, \infty]$ ، $\lambda_I(x) = 0$ و برای هر $x \in [k_4, \infty]$ ، $\lambda_K(x) = 0$ است.

برای راحتی درجه عضویت و درجه عدم عضویت به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\lambda_I(x) = \begin{cases} \lambda_I^L(x), & x \in [l_1, l_2], \\ 1, & x \in [l_2, l_3], \\ \lambda_I^R(x), & x \in [l_3, l_4], \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

و

$$\lambda_K(x) = \begin{cases} \lambda_K^L(x), & x \in [k_1, k_2], \\ -1, & x \in [k_2, k_3], \\ \lambda_K^R(x), & x \in [k_3, k_4], \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

که در آن

$$\lambda_I^L : [l_1, l_2] \rightarrow [0, 1], \lambda_I^R(x) : [l_3, l_4] \rightarrow [0, 1],$$

$$\lambda_K^L : [k_1, k_2] \rightarrow [-1, 0], \lambda_K^R(x) : [k_3, k_4] \rightarrow [-1, 0].$$

$\lambda_K^L(x)$ ، $\lambda_I^L(x)$ به ترتیب توابع عضویت چپ برای $\lambda_K(x)$ و $\lambda_I(x)$ می باشند و به طور مشابه $\lambda_K^R(x)$ ، $\lambda_I^R(x)$ به ترتیب توابع عضویت راست برای $\lambda_K(x)$ و $\lambda_I(x)$ می باشند.

تعریف ۳.۲ (عدد فازی دوقطبی ذوزنقه‌ای). [۳] عدد فازی دوقطبی

$$A = \langle I, K \rangle = \langle [l_1, l_2, l_3, l_4], [k_1, k_2, k_3, k_4] \rangle,$$

عدد فازی دوقطبی ذوزنقه‌ای نامیده می شود و با $([l_1, l_2, l_3, l_4], [k_1, k_2, k_3, k_4])$ نمایش داده می شود، هرگاه درجه عضویت λ_I و درجه عدم عضویت λ_K به صورت زیر باشند:

$$\lambda_I = \begin{cases} \frac{x-l_1}{l_2-l_1}, & x \in [l_1, l_2], \\ 1, & x \in [l_2, l_3], \\ \frac{l_4-x}{l_4-l_3}, & x \in [l_3, l_4], \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

و

$$\lambda_K = \begin{cases} \frac{k_1-x}{k_2-k_1}, & x \in [k_1, k_2], \\ -1, & x \in [k_2, k_3], \\ \frac{x-k_4}{k_4-k_3}, & x \in [k_3, k_4], \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

مثال ۴.۲. [۲۰] دو عدد فازی

$$A = \langle I_1, K_1 \rangle = \langle (0/10, 0/20, 0/30, 0/40), (0/50, 0/60, 0/70, 0/80) \rangle,$$

و

$$B = \langle I_2, K_2 \rangle = \langle (0/3, 0/4, 0/5, 0/6), (0/7, 0/8, 0/9, 1) \rangle,$$

اعداد فازی دوقطبی ذوزنقه‌ای هستند.

تعریف ۵.۲ (عدد فازی دوقطبی مثلثی). [۳] عدد فازی دو قطبی زیر یک عدد فازی دوقطبی مثلثی نامیده می‌شود

$$A = \langle I, K \rangle = \langle [l_1, l_2, l_3], [k_1, k_2, k_3] \rangle$$

و با $([l_1, l_2, l_3], [k_1, k_2, k_3])$ نمایش داده می‌شود، هرگاه درجه عضویت λ_I و درجه عدم عضویت λ_K به صورت زیر باشند:

$$\lambda_I = \begin{cases} \frac{x-l_1}{l_2-l_1}, & x \in [l_1, l_2], \\ \frac{l_2-x}{l_3-l_2}, & x \in [l_2, l_3], \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

و

$$\lambda_K = \begin{cases} \frac{k_1-x}{k_2-k_1}, & x \in [k_1, k_2], \\ \frac{x-k_2}{k_3-k_2}, & x \in [k_2, k_3], \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

مثال ۶.۲. [۳] عبارت "منبع ولتاژ کامل است" را در نظر می‌گیریم، بنابراین باید حالتی وجود داشته باشد که در آن منبع ولتاژ نامتعادل (یا ناکامل) باشد که در این صورت مفهوم دوقطبی مطرح می‌شود. هنگامی که اصطلاح "منبع ولتاژ کامل یا متعادل" بیان می‌شود، تداعی‌کننده‌ی دامنه‌ی ولتاژ ۰ تا ۴۶۰ ولت می‌باشد که می‌تواند به عنوان یک دامنه پیوسته در نظر گرفته شود و با یک عدد فازی دوقطبی مثلثی به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$A = \langle (190, 220, 240), (120, 160, 240) \rangle.$$

تعریف ۷.۲ (عدد فازی دوقطبی در فرم پارامتریک). [۱۵] عدد فازی دوقطبی در فرم پارامتریک چهارتایی $A = \langle [t^p(r), \bar{t}^p(r)], [t^N(s), \bar{t}^N(s)] \rangle$ می باشد که توابع $t^p(r), \bar{t}^p(r), t^N(s), \bar{t}^N(s)$ در شرایط زیر صدق می کنند:

- آ. $t^p(r)$ به طور یکنواخت کراندار افزایشی (غیرکاهشی) تابع پیوسته از چپ روی $[0, 1]$ و در نقطه 0 از راست پیوسته است؛
- ب. $\bar{t}^p(r)$ به طور یکنواخت کراندار کاهشی (غیرافزایشی) تابع پیوسته از چپ در $[0, 1]$ و در نقطه 0 از راست پیوسته است؛
- پ. $t^N(s)$ به طور یکنواخت کراندار کاهشی (غیرافزایشی) تابع پیوسته از چپ در $[0, -1]$ و در نقطه -1 از راست پیوسته است؛
- ت. $\bar{t}^N(s)$ به طور یکنواخت کراندار افزایشی (غیرکاهشی) تابع پیوسته از چپ در $[0, -1]$ و از راست پیوسته در نقطه -1 است؛
- ث. $t^p(r) \leq \bar{t}^p(r)$ ؛
- ج. $t^N(s) \leq \bar{t}^N(s)$.

مثال ۸.۲. [۱۵] عدد فازی دوقطبی

$$t = \langle [t^p(r), \bar{t}^p(r)], [t^N(s), \bar{t}^N(s)] \rangle = \langle [-6+r, 10-15r], [-12-6s, -5+s] \rangle$$

یک عدد فازی دوقطبی به فرم پارامتریک می باشد.

تعریف ۹.۲ (متغیر زبانی). [۳] متغیرهای زبانی به متغیرهایی گفته می شود که بجای اعداد جملات و کلمات انسانی یا ماشینی مقادیر قابل قبول را جایگزین می کنند، به عنوان مثال مجموعه S سن جوان، خیلی جوان، نه جوان، ... زبانی است.

تعریف ۱۰.۲ (متغیر فازی دوقطبی). [۳] متغیر فازی دوقطبی با سه تایی $(Y, X, R(Y, x))$ نمایش داده می شود که در آن Y نام متغیر داده شده را نشان می دهد، X دامنه x عددی متغیر است، x نام عمومی برای هر عنصر دلخواه از X را نشان می دهد و $R(Y, x)$ یک مجموعه فازی دوقطبی از X است که محدودیت روی مقادیر x که توسط Y تحمیل شده است را نشان می دهد.

مثال ۱۱.۲. [۳] اگر متغیر جوان با دامنه $[0, 100]$ را در نظر بگیریم، آنگاه متغیر داده شده با مجموعه فازی دوقطبی $R(Y, x)$ به صورت نشان داده شده در جدول ۱ می تواند به صورت یک متغیر فازی دوقطبی در نظر گرفته شود.

جدول ۱: متغیر فازی دوقطبی

متغیر فازی دوقطبی Y	مجموعه‌ی مربع X	مجموعه‌ی فازی دوقطبی $R(Y, x)$
جوان	۱	$(0, -1)$
.	.	.
.	.	$(0/4, -0/5)$
۲۰	۲۰	$(0/5, -0/4)$
.	.	$(0/6, -0/2)$
.	.	.
.	.	$(0/7, -0/1)$
۲۵	۲۵	$(1, 0)$
.	.	$(0/9, -0, 1)$
.	.	.
۵۰	۵۰	$(0/3, -0/7)$
.	.	$(0, -0/9)$
.	.	.
۱۰۰	۱۰۰	$(0, -1)$

تعریف ۱۲.۲ (متغیر زبانی فازی دوقطبی). [۳] یک متغیر زبانی فازی دوقطبی با پنج‌تایی $(y, L(Y), X, P(Y), N(Y))$ نشان داده می‌شود، به‌طوری‌که:

آ) y نام متغیر را نشان می‌دهد.

ب) $L(y)$ مجموعه مقادیر زبانی y است.

پ) Y نام عمومی عناصر $L(y)$ را نمایش می‌دهد.

ت) X دامنه‌ی عددی y را نشان می‌دهد.

ث) $[0, 1]$ و $P(Y) : X \rightarrow [0, 1]$ و $N(Y) : X \rightarrow [-1, 0]$ قوانین معنایی هستند که هر متغیر زبانی در L با نگاشت‌های $P(Y)$ و $N(Y)$ با دامنه‌ی X مرتبط می‌شوند.

مثال ۱۳.۲. [۳] اگر متغیر سن را با مقادیر زبانی به صورت جوان، خیلی جوان، خیلی خیلی جوان در نظر بگیریم که این مقادیر زبانی متغیرهای فازی دوقطبی روی دامنه‌ی $X = [0, 100]$

هستند که در جدول ۲ نشان داده شده‌اند، آنگاه متغیر سن می‌تواند به عنوان متغیر زبانی فازی دوقطبی در نظر گرفته شود.

جدول ۲: متغیر زبانی فازی دوقطبی

$BFLV$	y	سن		
متغیر زبانی	$L(y)$	جوان = Y	خیلی جوان = VY	خیلی خیلی جوان = VVY
X	۱	(۰, -۱)	(۰, -۱)	(۰, -۱)

	۱۸	(۰/۷, -۰/۱)	(۰/۷, -۰/۱)	(۰/۷, -۰/۱)
	۲۰	(۰/۸, -۰/۱)	(۱, ۰)	(۱, -۰/۹)

	۲۵	(۱, ۰)	(۰/۹, ۰/۱)	(۰/۸, -۰/۱)

	۳۰	(۰/۶, -۰/۴)	(۰/۷, -۰/۳)	(۰/۵, -۰/۶)

	۴۰	(۰/۵, -۰/۴)	(۰/۶, -۰/۶)	(۰/۲, -۰/۸)
	۵۰	(۰/۳, -۰/۹)	(۰, -۰/۸)	(۰/۱, -۱)
	۱۰۰	(۰, -۱)	(۰, -۱)	(۰, -۱)

تعریف ۱۴.۲ (مجموعه‌ی نرم فازی). [۱۹] فرض کنید U مجموعه‌ی مرجع و E مجموعه‌ی پارامترها و $P(U)$ مجموعه‌ی توانی U و $A \subseteq E$ و $P(U)$ مجموعه‌ی تمام زیرمجموعه‌های فازی U باشد، آنگاه (F, A) مجموعه‌ی فازی نرم است که $F: A \rightarrow P(U)$.

مثال ۱۵.۲. [۱۹] فرض کنید $U = \{M_1, M_2, M_3, M_4\}$ مجموعه‌ی چهار تلفن همراه تحت بررسی باشد و $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ برنامه‌ها، پشتیبانی باتری، گرانی، زیبایی $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ مجموعه پارامترها باشد، آنگاه مجموعه‌ی فازی نرم برای توصیف "جذابیت موبایل"، $(F, A) = \{F_{e_1}, F_{e_2}, F_{e_3}\}$ می‌باشد که $A = \{e_1, e_2, e_3\} \subseteq E$ و (F, A) می‌تواند به صورت زیر تعریف شود:

$$F_{e_1} = \{(M_1, \cdot/6), (M_2, \cdot/4), (M_3, \cdot/5), (M_4, \cdot/3)\},$$

$$F_{e_2} = \{(M_1, \cdot/7), (M_2, \cdot/6), (M_3, \cdot/5), (M_4, \cdot/4)\},$$

$$F_{e_3} = \{(M_1, \cdot/9), (M_2, \cdot/5), (M_3, \cdot/3), (M_4, \cdot/6)\}.$$

تعریف ۱۶.۲ (مجموعه‌ی نرم فازی دوقطبی). [۱۹] فرض کنید U مجموعه‌ی مرجع و E مجموعه‌ی پارامترها و $A \subset E$ باشند. $B : A \rightarrow BFU$ را تعریف می‌کنیم که در آن BFU مجموعه‌ی همه‌ی زیرمجموعه‌های فازی دوقطبی U است. آنگاه (B, A) مجموعه‌ی نرم فازی دوقطبی روی U نامیده می‌شود و با $(B, A) = B(e_i)$ نمایش داده می‌شود و به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$B(e_i) = \{(x_i, \lambda_I(x_i), \lambda_K(x_i)) | x_i \in U, e_i \in A\}$$

مثال ۱۷.۲. [۱۹] فرض کنید $U = \{M_1, M_2, M_3, M_4\}$ مجموعه‌ی چهار تلفن همراه تحت بررسی باشد و $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ برنامه‌ها، $\{e_3\}$ پشتیبانی باتری، $\{e_2\}$ گرانی، $\{e_1\}$ زیبایی، $\{e_4\}$ جذابیت موبایل، مجموعه پارامترها باشد، آنگاه مجموعه‌ی نرم فازی دوقطبی برای توصیف "جذابیت موبایل"، $(B, A) = \{B_{e_1}, B_{e_2}, B_{e_3}\} \subseteq E$ می‌باشد که در آن $A = \{e_1, e_2, e_3\} \subseteq E$ و $B(e_i)$ می‌تواند به صورت زیر تعریف شود:

$$B_{e_1} = \{(M_1, \cdot/6, -\cdot/2), (M_2, \cdot/4, -\cdot/1), (M_3, \cdot/5, -\cdot/3), (M_4, \cdot/3, -\cdot/1)\},$$

$$B_{e_2} = \{(M_1, \cdot/7, -\cdot/2), (M_2, \cdot/6, -\cdot/1), (M_3, \cdot/5, -\cdot/3), (M_4, \cdot/4, -\cdot/1)\},$$

$$B_{e_3} = \{(M_1, \cdot/9, -\cdot/3), (M_2, \cdot/5, -\cdot/2), (M_3, \cdot/3, -\cdot/1), (M_4, \cdot/6, -\cdot/4)\}.$$

تعریف ۱۸.۲ (مجموعه فازی شهودی). [۱۰] فرض کنید $E (\neq \emptyset)$ مجموعه ثابت باشد. مجموعه فازی شهودی A از E به صورت زیر بیان می‌شود

$$A = \{(x, \mu_A(x), \vartheta_A(x)) | x \in E\},$$

که $\mu_A(x), \vartheta_A(x) : E \rightarrow [0, 1]$ و $0 \leq \mu_A(x) + \vartheta_A(x) \leq 1$ برای هر $x \in E$ عدد $\mu_A(x)$ و $\vartheta_A(x)$ درجه عضویت و درجه عدم عضویت عنصر x به مجموعه A را نشان می‌دهد. A زیرمجموعه‌ی E است.

تعریف ۱۹.۲ (مجموعه فازی شهودی دوقطبی). مجموعه فازی شهودی دوقطبی A در X به صورت

$$I = \{ \langle x, \mu_I^+(x), \vartheta_I^+(x), \mu_I^-(x), \vartheta_I^-(x) \rangle | x \in X \},$$

تعریف می‌گردد که $\mu_I^+(x), \vartheta_I^+(x) : X \rightarrow [0, 1]$ و $\mu_I^-(x), \vartheta_I^-(x) : X \rightarrow [-1, 0]$ و $0 \leq \mu_I^+(x) + \vartheta_I^+(x) \leq 1$ و $-1 \leq \mu_I^-(x) + \vartheta_I^-(x) \leq 0$.

تعریف ۲۰.۲ (مجموعه و اعداد فازی فیثاغورثی). [۳۸] فرض کنید X مجموعه مرجع باشد. مجموعه فازی فیثاغورثی P در X به صورت زیر تعریف می‌گردد

$$P = \{ \langle x, \mu_P(x), \vartheta_P(x) \rangle | x \in X \},$$

که $\mu_P : X \rightarrow [0, 1]$ درجه عضویت و $\vartheta_P : X \rightarrow [0, 1]$ درجه عدم عضویت عنصر $x \in X$ به مجموعه P به طوری که $0 \leq (\mu_P(x))^2 + (\vartheta_P(x))^2 \leq 1$ ، نشان می‌دهند. درجه عدم قطعیت به صورت $\pi_P(x) = \sqrt{1 - (\mu_P(x))^2 - (\vartheta_P(x))^2}$ است. برای راحتی، ژانگ^۱ و خو^۲ [۴۸] را عدد فازی فیثاغورثی نامیدند و با $P = (\mu_P, \vartheta_P)$ نمایش دادند.

تعریف ۲۱.۲ (مجموعه فازی فیثاغورثی دوقطبی). [۲۴] مجموعه فازی فیثاغورثی A در X به صورت زیر تعریف می‌گردد

$$P = \{ \langle x, \mu_P^+(x), \vartheta_P^+(x), \mu_P^-(x), \vartheta_P^-(x) \rangle | x \in X \},$$

که در آن $\mu_P^+(x), \vartheta_P^+(x) : X \rightarrow [0, 1]$ و $\mu_P^-(x), \vartheta_P^-(x) : X \rightarrow [-1, 0]$ و $0 \leq (\mu_P^+(x))^2 + (\vartheta_P^+(x))^2 \leq 1$ و $0 \leq (\mu_P^-(x))^2 + (\vartheta_P^-(x))^2 \leq 1$ در این جا $\mu_P^+(x), \vartheta_P^+(x)$ درجه عضویت و درجه عدم عضویت عنصر $x \in X$ متناظر به مجموعه فازی فیثاغورثی دوقطبی A و $\mu_P^-(x), \vartheta_P^-(x)$ درجه عضویت و عدم عضویت عنصر $x \in X$ به تعدادی ویژگی شمارنده ضمنی^۳ متناظر به مجموعه فازی فیثاغورثی دوقطبی P است.

¹Zhang

²Xu

³Implicit counter-property

مثال ۲۲.۲. [۲۴] فرض کنید $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ ، آنگاه

$$A = \left\{ \begin{array}{l} \langle x_1, 0/6, 0/3, -0/6, -0/4 \rangle \\ \langle x_2, 0/3, 0/3, -0/2, -0/3 \rangle \\ \langle x_3, 0/5, 0/6, -0/5, -0/2 \rangle \end{array} \right\}$$

مجموعه‌ی فازی فیثاغورثی دوقطبی در می‌باشد.

تعریف ۲۳.۲ (مجموعه فازی کروی). [۲۲، ۹] مجموعه فازی کروی \tilde{A}_S از مجموعه مرجع U به صورت زیر تعریف می‌گردد

$$\tilde{A}_S = \{ \langle u, \mu_{\tilde{A}_S}(u), \vartheta_{\tilde{A}_S}(u), \pi_{\tilde{A}_S}(u) \mid u \in U \},$$

که $\mu_{\tilde{A}_S}, \vartheta_{\tilde{A}_S}, \pi_{\tilde{A}_S} : U \rightarrow [0, 1]$ و

$$0 \leq \mu_{\tilde{A}_S}^{\forall}(u) + \vartheta_{\tilde{A}_S}^{\forall}(u) + \pi_{\tilde{A}_S}^{\forall}(u) \leq 1, \forall u \in U$$

برای هر u ، اعداد $\mu_{\tilde{A}_S}(u)$ ، $\vartheta_{\tilde{A}_S}(u)$ و $\pi_{\tilde{A}_S}(u)$ درجه عضویت، عدم عضویت و تردید u در \tilde{A}_S هستند.

تعریف ۲۴.۲ (مجموعه فازی دوقطبی کروی). [۹] مجموعه فازی دوقطبی کروی \tilde{A}_S از مجموعه مرجع U به صورت زیر ارائه می‌شود

$$\tilde{A}_S = \{ \langle u, \mu_{\tilde{A}_S}^+(u), \vartheta_{\tilde{A}_S}^+(u), \pi_{\tilde{A}_S}^+(u), \mu_{\tilde{A}_S}^-(u), \vartheta_{\tilde{A}_S}^-(u), \pi_{\tilde{A}_S}^-(u) \mid u \in U \},$$

که $\mu_{\tilde{A}_S}^+(u), \vartheta_{\tilde{A}_S}^+(u), \pi_{\tilde{A}_S}^+(u) : U \rightarrow [0, 1]$ و

$\mu_{\tilde{A}_S}^-(u), \vartheta_{\tilde{A}_S}^-(u), \pi_{\tilde{A}_S}^-(u) : U \rightarrow [-1, 0]$

$$0 \leq \mu_{\tilde{A}_S}^{+\forall}(u), \vartheta_{\tilde{A}_S}^{+\forall}(u), \pi_{\tilde{A}_S}^{+\forall}(u) \leq 1, \forall u \in U,$$

$$-1 \leq - \left(\mu_{\tilde{A}_S}^{-\forall}(u), \vartheta_{\tilde{A}_S}^{-\forall}(u), \pi_{\tilde{A}_S}^{-\forall}(u) \right) \leq 0, \forall u \in U.$$

برای هر u ، عضویت، اعداد $\mu_{\tilde{A}_S}^+(u)$ ، $\vartheta_{\tilde{A}_S}^+(u)$ ، $\pi_{\tilde{A}_S}^+(u)$ عدم عضویت و تردید مثبت u به \tilde{A}_S و اعداد $\mu_{\tilde{A}_S}^-(u)$ ، $\vartheta_{\tilde{A}_S}^-(u)$ ، $\pi_{\tilde{A}_S}^-(u)$ عدم عضویت و تردید منفی u به \tilde{A}_S هستند.

۳. روش پیشنهادی جدید برای رتبه‌بندی اعداد فازی دوقطبی مثلثی

در این بخش روش جدیدی برای رتبه‌بندی اعداد فازی دوقطبی مثلثی مبتنی بر مرکز ثقل آن‌ها ارائه خواهیم کرد که توسعه‌ی یک روش رتبه‌بندی برای اعداد فازی است که توسط طالبشیان و همکاران ارائه شده است [۳۶] و در انتها در غالب چند قضیه و گزاره، ویژگی روش جدید را بررسی و اثبات خواهیم کرد.

تعریف ۱.۳. فرض کنید $A = ([l_1, l_2, l_3], [k_1, k_2, k_3])$ و $B = ([t_1, t_2, t_3], [s_1, s_2, s_3])$ دو عدد فازی دوقطبی مثلثی هم علامت باشند و $d \in \mathbb{R}^+$ ، آنگاه

$$(1) \quad A \oplus B = ([l_1 + t_1, l_2 + t_2, l_3 + t_3], [k_1 + s_1, k_2 + s_2, k_3 + s_3])$$

$$(2) \quad d * A = ([dl_1, dl_2, dl_3], [dk_1, dk_2, dk_3])$$

تعریف ۲.۳. تابع $\psi : E \rightarrow \{-1, 1\}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\forall A = ([l_1, l_2, l_3], [k_1, k_2, k_3]) \in E$$

$$(1.3) \quad \psi(A) = \begin{cases} 1, & \text{if } l_1 + l_2 + l_3 + k_1 + k_2 + k_3 \geq 0, \\ -1, & \text{if } l_1 + l_2 + l_3 + k_1 + k_2 + k_3 < 0, \end{cases}$$

بنا به [۳۷] مرکز ثقل (G) عدد فازی مثلثی $A = (a_l, a_m, a_u)$ به صورت زیر است:

$$(2.3) \quad G_{\bar{A}}(x_A, y_A) = \left(\frac{a_m + a_l + a_u}{3} \right)$$

به وضوح از رابطه (۲.۳) می‌توان نتیجه گرفت که مرکز ثقل اعداد فازی مثلثی مبتنی بر پارامترهای a_l ، a_m و a_u قابل محاسبه است. بنابراین شاخص جدید NFR^1 برای رتبه‌بندی اعداد فازی دوقطبی مثلثی دلخواه در \mathbb{R}^3 به صورت زیر معرفی می‌شود:

$$(3.3) \quad NFR(A) = \left(\frac{l_1 + l_2 + l_3 + k_1 + k_2 + k_3}{3}, l_2 + k_2, \frac{\psi(A) * ((l_2 - l_1) + (k_2 - k_1))}{2} \right) \in \mathbb{R}^3$$

در روش غیرفازی‌سازی بیشتر روش‌های موجود به هر عدد فازی دوقطبی یک عدد حقیقی اختصاص می‌دهند و مقایسه در مجموعه اعداد فازی را با مقایسه اعداد حقیقی نظیر آن‌ها انجام می‌دهند. این تبدیل باعث از بین رفتن اطلاعات مهمی از اعداد فازی خواهد شد. بنابراین در روش جدید برای ذخیره کردن اطلاعات مهم، به هر عدد فازی مثلثی دوقطبی یک سه‌تایی یکتا NFR در \mathbb{R}^3 نظیر خواهیم کرد.

¹Nemat Fuzzy Ranking

شاخص NFR از مرکز ثقل، هسته و طول تکیه‌گاه هر عدد فازی دوقطبی مثلثی تشکیل شده است که به راحتی و حتی بدون ابزارهای محاسباتی قابل محاسبه است. در واقع شاخص NFR فاقد هرگونه عملگر انتگرال و یا تابع رادیکالی و پیچیده‌ای است که محاسبات را بدون استفاده از ماشین حساب غیرممکن می‌کند.

حالا می‌توانیم اعداد فازی مثلثی را با استفاده از ترتیب الفبایی روی شاخص NFR مرتب کرد.

تعریف ۳.۳. فرض کنید $A = ([l_1, l_2, l_3], [k_1, k_2, k_3])$ و $B = ([t_1, t_2, t_3], [s_1, s_2, s_3])$ دو عدد فازی مثلثی دوقطبی باشند. با توجه به شاخص NFR ، می‌توانیم A و B را به صورت زیر مقایسه کنیم:

$$(۱) \quad NFR(A) <_L NFR(B) \text{ اگر و تنها اگر } A < B$$

$$(۲) \quad NFR(A) =_L NFR(B) \text{ اگر و تنها اگر } A = B$$

در حالی که نماد $<_L$ نشان‌دهنده ترتیب الفبایی است.

برخی از ویژگی‌های مهم روش پیشنهادی در غالب گزاره‌های زیر ارائه و اثبات شده می‌شود.

گزاره ۴.۳. فرض کنید $A = ([l_1, l_2, l_3], [k_1, k_2, k_3])$ یک عدد فازی دوقطبی مثلثی باشد، آنگاه $NFR(-A) = -NFR(A)$.

اثبات. با استفاده از رابطه (۱.۳) و تعریف قرینه یک عدد فازی داریم:

$$\psi(-A) = -\psi(A)$$

هم‌چنین داریم:

$$\begin{aligned} NFR(-A) &= \left(\frac{(-l_1) + (-l_2) + (-l_3) + (-k_1) + (-k_2) + (-k_3)}{۳}, (-l_2) \right. \\ &\quad \left. + (-k_2), \frac{\psi(-A) * (((-l_3) - (-l_1)) + ((-k_3) - (-k_1)))}{۲} \right) \\ &= \left(-\frac{l_1 + l_2 + l_3 + k_1 + k_2 + k_3}{۳}, -(l_2 + k_2), \right. \\ &\quad \left. -\frac{\psi(A) * ((l_3 - l_1) + (k_3 - k_1))}{۲} \right) \\ &= -NFR(A) \end{aligned}$$

□

گزاره ۵.۳. برای دو عدد فازی مثلی $A, B \in E$ ، اگر $A < B$ ، آنگاه $-B < -A$.

اثبات. این گزاره به راحتی با توجه به گزاره ۴.۳ و تعریف شاخص NFR به دست می آید.

□

گزاره بالا ثابت می کند روش پیشنهادی قادر است اعداد فازی دوقطبی مثلی و قرینه آنها را به درستی رتبه بندی کند.

گزاره ۶.۳. فرض کنید $A = ([l_1, l_2, l_3], [k_1, k_2, k_3])$ و $B = ([t_1, t_2, t_3], [s_1, s_2, s_3])$ دو عدد فازی دوقطبی مثلی هم علامت باشند و $d \in \mathbb{R}^+$. روش جدید پیشنهادی، خطی است یعنی:

$$(۴.۳) \quad NFR(d * A \oplus B) = d * NFR(A) + NFR(B).$$

اثبات. با استفاده از عملیات حساب فازی تعریف شده در تعریف ۱.۳ داریم:

$$d * A \oplus B = ([dl_1 + t_1, dl_2 + t_2, dl_3 + t_3], [dk_1 + s_1, dk_2 + s_2, dk_3 + s_3])$$

و با توجه به تعریف شاخص NFR در (۳.۳) داریم:

$$\begin{aligned} NFR(d * A \oplus B) &= \left(\frac{dl_1 + t_1 + dl_2 + t_2 + dl_3 + t_3 + dk_1 + s_1 + dk_2 + s_2 + dk_3 + s_3}{3}, dl_2 + t_2 \right. \\ &\quad \left. + dk_2 + s_2, \frac{\psi(d * A \oplus B) * ((dl_3 + t_3 - dl_1 - t_1) + (dk_3 + s_3 - dk_1 - s_1))}{2} \right) \\ &= \left(\frac{d(l_1 + l_2 + l_3 + k_1 + k_2 + k_3) + t_1 + t_2 + t_3 + s_1 + s_2 + s_3}{3}, d(l_2 + k_2) + t_2 \right. \\ &\quad \left. + s_2, \frac{\psi(d * A \oplus B) * (d(l_3 - l_1 + k_3 - k_1) + (t_3 - t_1 + s_3 - s_1))}{2} \right) \\ &= \left(\frac{d(l_1 + l_2 + l_3 + k_1 + k_2 + k_3)}{3}, d(l_2 k_2), \frac{\psi(d * A \oplus B) * d(l_3 - l_1 + k_3 - k_1)}{2} \right) \\ &\quad + \left(\frac{t_1 + t_2 + t_3 + s_1 + s_2 + s_3}{3}, t_2 + s_2, \frac{\psi(d * A \oplus B) * (t_3 - t_1 + s_3 - s_1)}{2} \right) \end{aligned}$$

(۵.۳)

چون A و B هم علامت هستند و $d \in \mathbb{R}^+$ ، هم چنین با توجه به تعریف ۱.۳ نتیجه می شود:

$$\psi(d * A \oplus B) = \psi(A) = \psi(B)$$

حالا با جایگذاری عبارت بالا در رابطه (۵.۳) داریم:

$$\begin{aligned} NFR(d * A \oplus B) &= d \left(\frac{l_1 + l_r + l_r + k_1 + k_r + k_r}{3}, l_r + k_r, \frac{\psi(A) * (l_r - l_1 + k_r - k_1)}{2} \right) \\ &+ \left(\frac{t_1 + t_r + t_r + s_1 + s_r + s_r}{3}, t_r + s_r, \frac{\psi(B) * (t_r - t_1 + s_r - s_1)}{2} \right) \\ &= d * NFR(A) + NFR(B). \end{aligned}$$

□

گزاره بالا نشان داد روش جدید خطی است عموماً در مسائل کاربرد واقعی، رتبه‌بندی‌های خطی محاسبات کمتری دارند و همچنین در بعضی از کاربردها نیز فقط رتبه‌بندی‌های خطی قابل استفاده هستند.

۴. مثال‌های عددی

مثال ۱۰.۴. سه عدد فازی دوقطبی مثلثی زیر را در نظر بگیرید، که در شکل ۱ نشان داده شده است.

$$A = \langle (3, 4/2, 4/8), (4/2, 5/1, 6) \rangle,$$

$$B = \langle (3/6, 4/8, 4/92), (4/8, 5/7, 6/12) \rangle,$$

$$C = \langle (4/8, 5/1, 5/16), (6, 6, 6/36) \rangle,$$

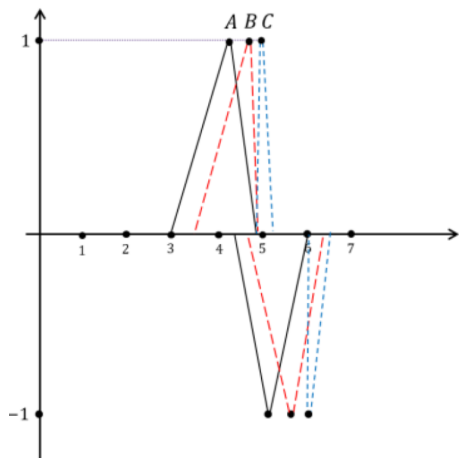
برای اعمال رتبه‌بندی جدید ابتدا شاخص NFR محاسبه می‌شود:

$$NFR(A) = (9/23, 9/3, \frac{1 * 3/6}{2}) = (9/23, 9/3, 1/8),$$

$$NFR(B) = (9/98, 10/5, \frac{1 * 2/64}{2}) = (9/98, 10/5, 1/32),$$

$$NFR(C) = (11/14, 11/1, \frac{1 * 0/72}{2}) = (9/98, 10/5, 0/36)$$

حال با استفاده از تعریف ۳.۳ و محاسبات انجام شده عدد B و C مولفه‌های اول و دوم یکسانی دارند و با توجه به اینکه مولفه سوم B از C کوچکتر است پس داریم: $B < C$ از طرفی مولفه اول A از همه کوچکتر است در نتیجه $A < B < C$.



شکل ۱: اعداد فازی دوقطبی مثلی در مثال ۱.۴

مثال ۲.۴. شش عدد فازی دوقطبی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$A = \langle (30, 50, 60), (30, 50, 60) \rangle,$$

$$B = \langle (40, 60, 70), (40, 60, 70) \rangle,$$

$$C = \langle (10, 20, 30), (10, 20, 30) \rangle,$$

$$D = \langle (1, 2, 3), (1, 2, 3) \rangle,$$

$$E = \langle (50, 70, 90), (50, 70, 90) \rangle,$$

$$F = \langle (20, 50, 70), (20, 50, 70) \rangle.$$

در جدول (۳) نتایج محاسبات روش پیشنهادی و دیگر رتبه‌بندی‌ها ارائه شده است. حال با

جدول ۳: نتایج محاسبات مثال ۳.۴

عدد فازی	روش پیشنهادی	اکرم و ارشد [۳]	جیواراج [۲۰]
A	$NFR(A) = (93/33, 100, 30),$	$R_{f_1}(A) = 0, R_{f_2}(A) = 0$	$R_{f_3}(A) = 78/44,$
B	$NFR(B) = (113/33, 120, 30),$	$R_{f_1}(B) = 0, R_{f_2}(B) = 0$	$R_{f_3}(B) = 87/75,$
C	$NFR(C) = (40, 40, 20),$	$R_{f_1}(C) = 0, R_{f_2}(C) = 0$	$R_{f_3}(C) = 23/9,$
D	$NFR(D) = (4, 4, 2),$	$R_{f_1}(D) = 0, R_{f_2}(D) = 0$	$R_{f_3}(D) = 3/6,$
E	$NFR(E) = (140, 140, 40),$	$R_{f_1}(E) = 0, R_{f_2}(E) = 0$	$R_{f_3}(E) = 114/89,$
F	$NFR(F) = (93/33, 100, 50),$	$R_{f_1}(F) = 0, R_{f_2}(F) = 0$	$R_{f_3}(F) = 106/36.$

استفاده از نتایج و محاسبات جدول (۳) و تعریف ۳.۳ از روش پیشنهادی داریم $D < C < A = B = C = D = E = F$ در روش اکرم و ارشد [۳] ترتیب $A < F < B < E$ حاصل می‌شود. یعنی در همه موارد، رتبه‌بندی یکسان است و مشخصاً غیرشهودی و غیرمنطقی است. روش جیواراج [۲۰] ترتیب $D < C < A < B < F < E$ را ارائه می‌دهد که تقریباً با روش پیشنهادی این مقاله یکسان است و تنها در جایگاه دو عدد فازی F و B متفاوت هستند.

مثال ۳.۴. دو عدد فازی دوقطبی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$A = \langle (1, 1/5, 5), (1, 4, 5) \rangle,$$

$$B = \langle (1/5, 2/5, 4), (1/5, 3/5, 5) \rangle,$$

در جدول (۴) نتایج محاسبات روش پیشنهادی و رتبه‌بندی ارائه شده توسط قنبری و همکاران [۱۶] ارائه شده است. همان‌طور که مشخص است روش قنبری و همکاران تمایز و تفاوتی بین دو عدد فازی قائل نیست در حالی‌که به وضوح این دو عدد یکسان نیستند ولی بر اساس روش پیشنهادی این مقاله به‌درستی ترتیب $B < A$ به‌دست آمده است.

جدول ۴: نتایج محاسبات مثال ۳.۴

عدد فازی	روش پیشنهادی	قنبری و همکاران [۱۶]
A	$NFR(A) = (5/833, 5/5, 4),$	$R^b(A) = 5/75,$
height B	$NFR(B) = (5/666, 6, 2/5),$	$R^b(B) = 5/75,$

۵. نتیجه‌گیری و پژوهشهای آتی

باتوجه به کاربردهای فراوان اعداد فازی دوقطبی در علوم مختلف فیزیک و فلسفه و علوم انسانی و غیره در این مقاله انواع اعداد فازی دوقطبی نظیر ذوزنقه‌ای، مثلثی و مجموعه‌های فازی دوقطبی در حالت پارامتری، نرم فازی دوقطبی و غیره را بررسی کرده و سپس رتبه‌بندی مبتنی بر مرکز ثقل برای اعداد فازی دوقطبی مثلثی را بیان کردیم و به بررسی ویژگی‌های آن پرداختیم و با استفاده از مثال‌های عددی کاربردی بودن رتبه‌بندی را نشان دادیم. در پژوهش‌های بعدی به حل معادلات دیفرانسیل در محیط فازی دوقطبی می‌پردازیم.

مراجع

- [1] Akram, M., Ali, M. and Allahviranloo, T. (2020). Certain methods to solve bipolar fuzzy linear system of equations. *Computational and Applied Mathematics*, 39(3), 213.
- [2] Akram, M., Allahviranloo, T., Pedrycz, W. and Ali, M. (2021). Methods for solving LR-bipolar fuzzy linear systems. *Soft Computing*, 25(1), 85-108.
- [3] Akram, M. and Arshad, M. (2019). A novel trapezoidal bipolar fuzzy TOPSIS method for group decision-making. *Group Decision and Negotiation*, 28, 565-584.
- [4] Akram, M., Muhammad, G. and Allahviranloo, T. (2019). Bipolar fuzzy linear system of equations. *Computational and Applied Mathematics*, 38, 1-29.
- [5] Akram, M., Shumaiza and Rodríguez Alcantud, J. C. (2023). Extended PROMETHEE Method with Bipolar Fuzzy Sets Multi-criteria Decision Making Methods with Bipolar Fuzzy Sets (pp. 151-175): Springer.
- [6] Akram, M., Shumaiza and Rodríguez Alcantud, J. C. (2023). TOPSIS and ELECTRE I Methodologies: Bipolar Fuzzy Formulations Multi-criteria Decision Making Methods with Bipolar Fuzzy Sets (pp. 1-34): Springer.
- [7] Akram, M., Shumaiza and Rodríguez Alcantud, J. C. (2023). VIKOR Method with Trapezoidal Bipolar Fuzzy Sets Multi-criteria Decision Making Methods with Bipolar Fuzzy Sets (pp. 67-91): Springer.
- [8] Alolaiyan, H., Mateen, M. H., Pamucar, D., Mahmmud, M. K. and Arslan, F. (2021). A certain structure of bipolar fuzzy subrings. *Symmetry*, 13(8), 1397.
- [9] Ashraf, S., Abdullah, S., Aslam, M., Qiyas, M. and Kutbi, M. A. (2019). Spherical fuzzy sets and its representation of spherical fuzzy t-norms and t-conorms. *Journal of Intelligent Fuzzy Systems*, 36(6), 6089-6102.
- [10] Atanassov, K. T. and Atanassov, K. T. (1999). *Intuitionistic fuzzy sets*: Springer.
- [11] Babakordi, F. (2022). Market Equilibrium Point Analysis by a Fuzzy Approach. *Journal of Operational Research In Its Applications (Applied Mathematics)-Lahijan Azad University*, 19(3), 17-28.
- [12] Babakordi, F. (2023). An Efficient Method for Solving the Fuzzy AH1N1/09 Influenza Model Using the Fuzzy Atangana-Baleanu-Caputo Fractional Derivative. *Fuzzy Optimization and Modeling Journal*, 4(1), 57-70.
- [13] Babakordi, F. (2023). An Efficient Method for Solving the Fuzzy AH1N1/09 Influenza Model Using the Fuzzy Atangana-Baleanu-Caputo Fractional Derivative. *Fuzzy Optimization and Modeling Journal*, 4(1), 57-70.

- [14] Babakordi, F. and Taghi-Nezhad, N. (2021). Introducing hesitant fuzzy equations and determining market equilibrium price. *Control and Cybernetics*, 50.
- [15] Ghanbari, R., Ghorbani-Moghadam, K. and Mahdavi-Amiri, N. (2018). A Direct Method to Compare Bipolar LR Fuzzy Numbers. *Advances in Fuzzy Systems*.
- [16] Ghanbari, R., Ghorbani-Moghadam, K. and Mahdavi-Amiri, N. (2019). Duality in bipolar fuzzy number linear programming problem. *Fuzzy Information and Engineering*, 11(2), 175-185.
- [17] Gong, S. and Hua, G. (2023). Bipolar interval-valued fuzzy set in graph and hypergraph settings. *Journal of Intelligent Fuzzy Systems*, 44(2), 1755-1767.
- [18] Han, Y., Shi, P. and Chen, S. (2015). Bipolar-valued rough fuzzy set and its applications to the decision information system. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 23(6), 2358-2370.
- [19] Jana, C., Pal, M. and Wang, J. (2019). A robust aggregation operator for multi-criteria decision-making method with bipolar fuzzy soft environment. *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, 16(6), 1-16.
- [20] Jeevaraj, S. (2021). Ranking of Trapezoidal Bipolar Fuzzy Numbers Based on a New Improved Score Function *Fuzzy Systems and Data Mining VII* (pp. 41-53): IOS Press.
- [21] Krishnaveni, J., Rajalakshmi, B. and Santhanaathiveeralakshmi, V. (2022). Fuzzy bipolar sets in rank-ordering system. Paper presented at the AIP Conference Proceedings.
- [22] Kutlu Gündoğdu, F. and Kahraman, C. (2019). Spherical fuzzy sets and spherical fuzzy TOPSIS method. *Journal of Intelligent Fuzzy Systems*, 36(1), 337-352.
- [23] Lu, M. and Busemeyer, J. R. (2014). Do traditional chinese theories of Yi Jing ('Yin-Yang' and Chinese medicine go beyond western concepts of mind and matter. *Mind and Matter*, 12(1), 37-59.
- [24] Mandal, W. A. (2021). Bipolar pythagorean fuzzy sets and their application in Multiattribute decision making problems. *Annals of Data Science*, 1-33.
- [25] Mehmood, M. A., Akram, M., Alharbi, M. G. and Bashir, S. (2021). Optimization of LR-type fully bipolar fuzzy linear programming problems. *Mathematical Problems in Engineering*, 2021, 1-36.
- [26] Mehmood, M. A., Akram, M., Alharbi, M. G. and Bashir, S. (2021). Solution of fully bipolar fuzzy linear programming models. *Mathematical Problems in Engineering* 2021, 1-31.
- [27] Princy, R. and Mohana, K. (2019). Spherical bipolar fuzzy sets and its application in multi criteria decision making problem. *Journal of New Theory*(32), 58-70.
- [28] Singh, P. K. (2022). Bipolar fuzzy concepts reduction using granular-based weighted entropy. *Soft Computing*, 26(19), 9859-9871.
- [29] Sriram, S. and Sivaranjani, K. (2023). Operations on Bipolar Pythagorean Fuzzy Matrix. Paper presented at the 2023 Third International Conference on Advances in Electrical, Computing, Communication and Sustainable Technologies (ICAECT).

- [30] Taghi-Nezhad, N. and Babakordi, F. (2023). Fully hesitant parametric fuzzy equation. *Soft Computing*, 1-12.
- [31] Taghi-nezhad, N., Naseri, H., Khalili Goodarzi, F. and Taleshian Jelodar, F. (2015). Reactive Scheduling Presentation for an Open Shop problem Focused on jobs' due Dates. *Journal of Production and Operations Management*, 6(2), 95-112.
- [32] Taghi-Nezhad, N. A. (2019). The p-median problem in fuzzy environment: proving fuzzy vertex optimality theorem and its application. *Soft Computing*, 23(22), 11399-11407.
- [33] Taghi-Nezhad, N. A. (2022). A revisit of the proposed model for solving fuzzy linear fractional programming problem. *International Journal of Mathematics in Operational Research*, 23(2), 215-231.
- [34] Taghi-Nezhad, N. A. (2023). Fuzzy Linear Fractional Programming for Container Transportation Optimization. *Iranian Journal of Marine Science and Technology*.
- [35] Taleshian, F., Fathali, J. and Allah Taghi-Nezhad, N. (2022). Finding the absolute and vertex center of a fuzzy tree. *Transportation Letters*, 14(6), 591-599.
- [36] Taleshian, F., Fathali, J. and Taghi-Nezhad, N. A. (2018). Fuzzy majority algorithms for the 1-median and 2-median problems on a fuzzy tree. *Fuzzy Information and Engineering*, 10(2), 1-24.
- [37] Wang, Y.-M., Yang, J.-B., Xu, D.-L. and Chin, K.-S. (2006). On the centroids of fuzzy numbers. *Fuzzy Sets and Systems*, 157(7), 919-926. doi:<https://doi.org/10.1016/j.fss.2005.11.006>
- [38] Yager, R. R. (2013). Pythagorean membership grades in multicriteria decision making. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 22(4), 958-965.
- [39] Yiarayong, P. (2021). A new approach of bipolar valued fuzzy set theory applied on semigroups. *International Journal of Intelligent Systems*, 36(8), 4415-4438.
- [40] Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets. *Information and Control*, 8, 338 - 353.
- [41] Zhang, W.-R. (1998). (Yin)(Yang) bipolar fuzzy sets. Paper presented at the 1998 IEEE international conference on fuzzy systems proceedings. IEEE world congress on computational intelligence (Cat. No. 98CH36228).
- [42] Zhang, W.-R. (2013). Bipolar quantum logic gates and quantum cellular combinatorics—a logical extension to quantum entanglement. *Journal of Quantum Information Science*, 3(2), 93.
- [43] Zhang, W.-R. (2016). G-CPT Symmetry of Quantum Emergence and Submergence—An Information Conservational Multiagent Cellular Automata Unification of CPTSymmetry and CP Violation for Equilibrium-Based Many-World Causal Analysis of Quantum Coherence and Decoherence. *Journal of Quantum Information Science*, 6(2), 62.

- [44] Zhang, W.-R., Pandurangi, A. K., Peace, K. E., Zhang, Y.-Q. and Zhao, Z. (2011). MentalSquares: a generic bipolar support vector machine for psychiatric disorder classification, diagnostic analysis and neurobiological data mining. *International journal of data mining and bioinformatics*, 5(5), 532-557.
- [45] Zhang, W.-R. and Peace, K. E. (2014). Causality is logically definable—toward an equilibrium-based computing paradigm of quantum agents and quantum intelligence (QAQI)(Survey and research). *Journal of Quantum Information Science*, 4, 227-268.
- [46] Zhang, W.-R., Zhang, J. H., Shi, Y. and Chen, S.-S. (2009). Bipolar linear algebra and YinYang-N-element cellular networks for equilibrium-based biosystem simulation and regulation. *Journal of Biological Systems*, 17(04), 547-576.
- [47] Zhang, W.-R. and Zhang, L. (2004). YinYang bipolar logic and bipolar fuzzy logic. *Information sciences*, 165(3-4), 265-287.
- [48] Zhang, X. and Xu, Z. (2014). Extension of TOPSIS to multiple criteria decision making with Pythagorean fuzzy sets. *International Journal of Intelligent Systems*, 29(12), 1061-1078.