

## به کارگیری توزیع چوله-نرمال در طراحی نمودارهای کنترل کیفیت فازی میانگین و دامنه

حمیده ایرانمنش، عباس پرچمی\*، وحید امیرزاده و فاطمه قادری

گروه آمار، دانشکده ریاضی و رایانه، دانشگاه شهید باهنر کرمان، کرمان، ایران

تاریخ دریافت: ۱۴۰۴/۰۷/۱۸

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۵/۰۲/۱۳

نوع مقاله: علمی-پژوهشی

**چکیده.** نمودارهای کنترل از ابزارهای کلیدی در پایش و بهبود فرایندهای آماری محسوب می‌شوند. در سال‌های اخیر، رویکرد کیفیت فازی مثلی به‌عنوان جایگزینی برای تعاریف متداول کیفیت در طراحی این نمودارها مطرح شده است. در این مقاله، رویکردی نوین برای طراحی نمودارهای کنترل  $\bar{X}$  و  $R$  مبتنی بر کیفیت فازی مثلی ارائه می‌شود که نوآوری اصلی آن در تلفیق روش‌های گشتاوری و برآورد بیشینه درستی برای برازش توزیع چوله-نرمال بر درجات تعلق فازی است. علاوه بر این، دو نمودار کنترل جدید برای نظارت همزمان بر میانگین و پراکندگی درجات تعلق، مبتنی بر توزیع چوله-نرمال، معرفی می‌گردند. مزیت روش پیشنهادی، افزایش انعطاف‌پذیری و دقت در شناسایی ناپایداری‌های فرایند در مقایسه با روش‌های کلاسیک است. عملکرد این رویکرد در یک مطالعه موردی واقعی در صنعت خودروسازی (رینگ پیستون موتور) و نیز از طریق شبیه‌سازی مورد ارزیابی قرار گرفته است. نتایج مقایسه‌ای نشان می‌دهد که نمودارهای کنترل پیشنهادی (ادامه دارد)

از کارایی بالاتر و قابلیت انطباق بهتری در محیط‌های دارای ابهام برخوردارند.

## ۱. مقدمه

کنترل فرایند آماری<sup>۱</sup> ( $SPC$ ) به‌عنوان روشی شناخته‌شده در ارتقای کیفیت و بهره‌وری صنایع به‌کار می‌رود و بر استفاده از ابزارهای آماری برای پایش و بهبود مستمر تأکید می‌کند [۱۱]، [۱۳]. با این حال، وجود مفاهیم مبهم می‌تواند چالش‌زا باشد. برای نمونه، یانگتینگ [۱۹] در سال ۱۹۹۶ مفهوم کیفیت فازی را با جایگزینی تابع نشانگر  $I_{[LSL, USL]}(x)$  با تابع عضویت مجموعه فازی  $\tilde{\mu}$  معرفی کرد. در این رویکرد، محصولات به‌جای دسته‌بندی دودویی، براساس درجه کیفیت در بازه صفر تا یک ارزیابی می‌شوند که انعطاف‌پذیری بیشتری در مدل‌سازی کیفیت فراهم می‌آورد. مزیت‌های کیفیت فازی توسط پرچمی و همکاران [۱۷] بررسی شده و آزمون‌های کارایی فرایند مبتنی بر این مفهوم در مراجع [۱، ۱۰، ۱۴، ۱۶] برای کاربردهایی نظیر صنایع لوله‌سازی و خودروسازی مطرح شده است.

”نمودارهای کنترل“ از ابزارهای کلیدی کنترل فرایند آماری هستند که نقش مهمی در بهبود کیفیت محصولات ایفا می‌کنند. پرچمی [۲] نمودارهای کنترلی برای تعداد اقلام معیوب، نسبت اقلام معیوب و تعداد نقص‌ها در واحد بازرسی را مبتنی بر کیفیت فازی تعمیم داد. همچنین، امیرزاده و همکاران [۵] نمودار  $p$  فازی را با فرض توزیع نرمال مشخصه کیفیت و براساس میانگین درجه عدم انطباق ارائه کردند و با استفاده از منحنی‌های مشخصه عملکرد و میانگین طول دنباله<sup>۲</sup> ( $ARL$ )، کارایی برتر آن را نسبت به نمودار  $p$  متداول نشان دادند. در ادامه، نمودار کنترل چندجمله‌ای فازی برای متغیرهای زبانی در [۶] طراحی شد. پرچمی و همکاران [۱۵] دو رویکرد ناپارامتری برای طراحی نمودارهای کنترلی  $\bar{X}$  و  $R$  مبتنی بر کیفیت فازی مثلی ارائه کردند، در حالی که قادری و همکاران [۹] دو رویکرد پارامتری برای این منظور پیشنهاد دادند. رویکردهای طراحی نمودارهای کنترل  $\bar{X}$  و  $R$  مبتنی بر کیفیت فازی مثلی در [۳] ارائه شد. در این مقاله، دو رویکرد جدید برای ساخت نمودارهای کنترل میانگین و دامنه برای درجه تعلق مشاهدات به کیفیت فازی مثلی مبتنی بر توزیع چوله-نرمال به همراه کاربرد آن‌ها ارائه می‌شوند.

ادامه مقاله به شرح ذیل سازماندهی شده است. کاربردهای مختلف کیفیت فازی در زمینه‌های مختلف علمی و صنعتی در بخش دوم مورد بحث قرار گرفته است. رویکردهای

<sup>1</sup> Statistical Process Control

<sup>2</sup> Average Run Length

پارامتری برآوردیابی مبتنی بر توزیع چوله-نرمال در بخش سوم ارائه شده است. بخش چهارم، به بحث پیرامون به کارگیری توزیع چوله-نرمال در طراحی نمودارهای کنترل  $\bar{X}$  و  $R$  با استفاده از روش گشتاوری و روش بیشینه درستی برای درجه تعلق مشاهدات به کیفیت فازی مثلی پرداخته است. در بخش پنجم یک مطالعه کاربردی روی رینگ پیستون موتور خودرو، شامل مدل سازی نمودارهای کنترل پیشنهادی، با استفاده از کیفیت فازی مثلی ارائه شده است. مقایسه این دو رویکرد پیشنهادی با رویکردهای پیشین موجود با استفاده از روش شبیه سازی در بخش ششم بررسی شده است. بخش پایانی نتیجه گیری ها را خلاصه کرده و جهت گیری های کارهای آینده را مشخص می کند.

## ۲. کاربرد کیفیت فازی

در کنترل کیفیت آماری، گاه با مفاهیم مبهم و غیردقیقی روبه رو می شویم که مدل سازی آن ها با روش های سنتی دشوار است. در کیفیت معمولی/غیرفازی محصولات به دو رده باکیفیت و بی کیفیت تقسیم بندی می شوند. اما کیفیت فازی این امکان را فراهم می سازد که هر محصول با درجه ای بین صفر و یک متعلق به کالاهای باکیفیت باشد. این نگرش می تواند منجر به قضاوت موجه و عادلانه در خصوص کیفیت یک محصول شود. با طراحی نمودارهای کنترل مبتنی بر کیفیت فازی، تصمیم گیری مبتنی بر تابع عضویت کیفیت فازی مطرح می شود که از انعطاف پذیری بیشتری نسبت به کیفیت معمولی/غیرفازی برخوردار است. در این بخش، مفاهیم اولیه مورد نیاز برای طراحی نمودارهای کنترل میانگین و دامنه مبتنی بر کیفیت فازی مثلی مرور می شوند.

فرض کنید  $\tilde{Q}$  تابع عضویت کیفیت فازی و  $\tilde{Q}(x)$  درجه انطباق با کیفیت استاندارد یا به طور خلاصه درجه کیفیت باشد که در آن  $x$  مقدار اندازه گیری شده مشخصه کیفیت محصول است. حدود مشخصه فنی بالا و پایین<sup>۱</sup> که به ترتیب با  $USL$  و  $LSL$  نشان داده می شوند، بیشینه و کمینه حدود قابل پذیرش فرایند را براساس نیازمندی ها و استانداردهای مشخصه کیفیت  $X$  مشخص می کنند. علاوه بر این، معمولاً یک مقدار هدف<sup>۲</sup> بهینه  $T$  بین حدود مشخصه برای تعیین هدف مشخصه کیفیت در فرایند تولید در نظر گرفته می شود.

جدول ۱ کاربردهای کیفیت فازی را در حوزه های مختلف علمی و صنعتی نشان می دهد و بیان می کند که ارزیابی های سنتی کیفیت، به دلیل تکیه بر حدود مشخصات دقیق، همواره قادر

<sup>1</sup>Upper and Lower Specification Limits

<sup>2</sup>Target Value

به بازتاب کامل تغییرپذیری‌های واقعی نیستند. براساس این جدول، محدودیت‌های مشخصات دقیق در مواجهه با سه جنبه اصلی می‌توانند ناکارآمد شوند:

- (۱) **ذهنیت اندازه‌گیری** (مانند وضوح تصاویر پزشکی)،
  - (۲) **نوسانات محیطی** (مانند فرایند جوانه‌زنی در کشاورزی)،
  - (۳) **برداشت‌های وابسته به کاربر** (مانند راحتی صندلی خودرو یا تطبیق رنگ دندان).
- به‌ویژه در صنایع مراقبت‌های بهداشتی و صناعی که ارتباط مستقیم با مصرف‌کننده دارند، جدول ۱ نشان می‌دهد که حدود مشخصات فنی دقیق اغلب با تنوع زیستی و عوامل انسانی در تضاد قرار می‌گیرند. همچنین در حوزه‌های فنی مانند هوافضا و متالورژی، تغییرات ذاتی فرایندها وجود دارند که محدودیت‌های مشخصات دقیق قادر به پوشش آن‌ها نیستند. در نتیجه، جدول ۱ به‌عنوان یک مرجع جامع، فرایندهایی را شناسایی می‌کند که به‌کارگیری رویکرد کیفیت فازی در آن‌ها می‌تواند به بهبود قابل‌توجه عملکرد و کارایی عملیاتی منجر شود.

جدول ۱: کاربردهای کیفیت فازی در حوزه‌های مختلف علمی و صنعتی

| صنعت           | ویژگی کیفیت    | دلیل در نظر گرفتن کیفیت فازی به جای حدود مشخصات فنی دقیق                             |
|----------------|----------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| صنعت خودروسازی | راحتی صندلی    | ادراک ذهنی بین افراد با توجه به نوع بدن و ترجیحات شخصی متفاوت است                    |
| صنعت چوب       | زبری سطح       | ارزیابی بصری و لمسی به تجربه بازرس و شرایط نور بستگی دارد                            |
| ریخته‌گری      | اندازه ترک     | آستانه‌های آشکارسازی با روش بازرسی (بصری، پرتوگاری، فراصوت) و مهارت بازرس متفاوت است |
| مهندسی عمران   | مقاومت بتن     | به دلیل تغییرات شرایط عمل‌آوری (دما، رطوبت) در محل، تعیین مقدار دقیق امکان‌پذیر نیست |
| پزشکی          | وضوح تصویر     | نیازهای تشخیصی بسته به ویژگی‌های پاتولوژی و آناتومی بیمار متفاوت است                 |
| دامپزشکی       | ضربان قلب      | دامنه طبیعی بین نژادها، اندازه‌ها و سطوح فعالیت حیوانات بسیار متفاوت است             |
| دندانپزشکی     | تطابق رنگ      | درک تطابق به شرایط نوری محیط و ادراک رنگی فرد بستگی دارد                             |
| مکانیک         | لقی یاتاقان    | مقادیر بهینه با کیفیت روانکاری، سرعت کارکرد و ویژگی‌های بار تغییر می‌کند             |
| متالورژی       | حفره‌ها        | حدود قابل قبول به تمرکز تنش و ضریب اطمینان قطعه بستگی دارد                           |
| نساجی          | دقت رنگ        | اثر پدیده متامریسم باعث تفاوت رنگ در شرایط نوری مختلف می‌شود                         |
| هوافضا         | تولرانس ابعادی | انقباض حرارتی با ارتفاع، سرعت و ترکیب مواد تغییر می‌کند                              |
| الکترونیک      | کیفیت لحیم     | ویژگی‌های اتصال قابل قبول با نوع قطعه و شرایط ارتعاش محیط متفاوت است                 |
| صنعت غذا       | پروفایل طعم    | ترجیحات فرهنگی و منطقه‌ای انتظارات متفاوتی ایجاد می‌کند                              |
| نفت و گاز      | سطح خلوص       | نیازهای فرایند با توجه به کاربردهای پایین‌دستی متفاوت است                            |
| کشاورزی        | نرخ جوانه‌زنی  | شرایط مزرعه شامل دمای خاک و رطوبت به‌طور غیرقابل پیش‌بینی تغییر می‌کند               |

### ۳. رویکردهای پارامتری برآوردیابی مبتنی بر توزیع چوله-نرمال

در این بخش، رویکردی نوین برای طراحی نمودارهای کنترل میانگین و دامنه بر مبنای کیفیت فازی مثلثی ارائه می‌گردد. حدود کنترل با استفاده از توزیع چوله-نرمال محاسبه شده و برای طراحی نمودارهای کنترل به‌کار گرفته می‌شوند. بدین منظور، به‌منظور برازش توزیع

چوله-نرمال بر درجات تعلق مشاهدات به کیفیت فازی مثلی، دو رویکرد آماری متداول شامل برآوردهای گشتاوری و برآورد حداکثر درست‌نمایی پیشنهاد می‌گردند. گرچه توزیع مقادیر  $x_{ij}$  معمولاً متقارن در نظر گرفته می‌شود، اما در عمل توزیع درجات تعلق کیفیت فازی مثلی  $\tilde{Q}_{\Delta}(x_{ij})$  اغلب نامتقارن و عمدتاً چوله به چپ است. از این رو، به‌کارگیری توزیع چوله-نرمال برای مدل‌سازی  $\tilde{Q}_{\Delta}(x_{ij})$ ها توجیه‌پذیر است؛ زیرا این توزیع ضمن برخورداری از ساختار محاسباتی ساده، انعطاف‌پذیری لازم برای توصیف داده‌های نامتقارن و چوله را فراهم می‌آورد. شایان ذکر است که مقادیر  $\tilde{Q}_{\Delta}(x_{ij})$ ، که درجات تعلق مشاهدات به کیفیت فازی مثلی را نشان می‌دهند، همواره در بازه  $[0, 1]$  قرار دارند. در این مقاله، با استفاده از آزمون‌های نیکویی برازش<sup>۱</sup>، توزیع چوله-نرمال به‌عنوان مناسب برای این مقادیر شناسایی شد. براساس آذالینی<sup>۲</sup> [۷]، تابع چگالی احتمال ( $p.d.f.$ ) توزیع چوله-نرمال به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(۱.۳) \quad f(x; \mu, \sigma, \lambda) = \frac{2}{\sigma} \phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) \Phi\left(\lambda \frac{x - \mu}{\sigma}\right), \quad -\infty < x < \infty,$$

که در آن با یک مشخصه کیفیتی که یک متغیر است، (به عنوان مثال طول، سطح، وزن یا حجم) سروکار داریم و  $X$  را به عنوان نماینده این مشخصه کیفیت در نظر می‌گیریم، و  $\mu \in \mathbb{R}$ ،  $\sigma > 0$  و  $\lambda \in \mathbb{R}$  به ترتیب نشان‌دهنده پارامترهای مکان، مقیاس و شکل (چولگی)، هستند. نمادهای  $\phi$  و  $\Phi$  به ترتیب مربوط به تابع چگالی احتمال ( $p.d.f.$ ) و تابع توزیع تجمعی ( $c.d.f.$ ) از توزیع نرمال استاندارد هستند. نماد  $X \sim SN(\mu, \sigma, \lambda)$  نشان‌دهنده یک متغیر تصادفی  $X$  است که از معادله (۱.۳) پیروی می‌کند و لازم به ذکر است که تابع توزیع تجمعی آن را با  $F(\cdot; \mu, \sigma, \lambda)$  نمایش می‌دهیم. توزیع چوله-نرمال بسیاری از ویژگی‌های آماری توزیع نرمال را حفظ می‌کند. با این حال، برخلاف توزیع نرمال، توزیع چوله-نرمال انعطاف‌پذیری بیشتری در توصیف الگوهای طبیعی ارائه می‌دهد. یکی از مزایای قابل توجه توزیع چوله-نرمال، توانایی آن در برگرفتن طیف وسیعی از انواع توزیع‌ها از طریق گنجاندن پارامتر چولگی،  $\lambda$ ، است. این توزیع در بسیاری از زمینه‌ها مانند اقتصاد، مهندسی و کنترل کیفیت کاربرد دارد، زیرا داده‌های واقعی اغلب از تقارن برخوردار نیستند.

در ادامه، قصد داریم پارامترهای توزیع چوله-نرمال را با استفاده از یک نمونه تصادفی برآورد کنیم. سه پارامتر ناشناخته این توزیع شامل  $\mu$ ،  $\sigma$  و  $\lambda$  هستند که به‌ترتیب نشان‌دهنده

<sup>۱</sup> Goodness-of-fit tests (GOFs)

<sup>۲</sup> Azzalini

مکان، مقیاس و چولگی هستند. برای برآورد این پارامترها، دو رویکرد متداول مورد استفاده قرار می‌گیرد: روش گشتاوری ( $MM$ ) و روش حداکثر درستنمایی ( $ML$ ).

**۱.۳ روش گشتاوری ( $MM$ ).** ایده اصلی روش گشتاوری، معادل‌سازی گشتاورهای جامعه (بر حسب پارامترهای مجهول) با گشتاورهای تجربی (محاسبه شده از نمونه) است. از آنجا که توزیع سه پارامتر دارد، سه گشتاور اول را معادلسازی می‌کنیم. برای  $X \sim SN(\mu, \sigma, \lambda)$ ، گشتاورهای اول، دوم و سوم به صورت زیر هستند:

$$(۲.۳) \quad \begin{cases} E(X) = \mu + \sigma \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}} \sqrt{\frac{2}{\pi}}, \\ E(X^2) = \sigma^2 \left( 1 - \frac{2}{\pi} \frac{\lambda^2}{1+\lambda^2} \right) + \left( \mu + \sigma \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right)^2, \\ E(X^3) = \mu^3 + 3\mu\sigma^2 + \frac{\sigma^3 \lambda (1+3\lambda^2)}{(1+\lambda^2)^{3/2}}. \end{cases}$$

برای یک نمونه تصادفی  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ، گشتاورهای نمونه تا مرتبه سوم عبارتند از:

$$m_1 = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad m_2 = \overline{x^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2, \quad m_3 = \overline{x^3} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^3.$$

با قرار دادن گشتاورهای جامعه برابر با گشتاورهای نمونه، دستگاه زیر حاصل می‌شود:

$$(۳.۳) \quad \begin{cases} \mu + \sigma \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} = m_1, \\ \sigma^2 \left( 1 - \frac{2}{\pi} \frac{\lambda^2}{1+\lambda^2} \right) + \left( \mu + \sigma \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right)^2 = m_2, \\ \mu^3 + 3\mu\sigma^2 + \frac{\sigma^3 \lambda (1+3\lambda^2)}{(1+\lambda^2)^{3/2}} = m_3. \end{cases}$$

این دستگاه نسبت به پارامترها غیرخطی است و باید با روش‌های عددی (مانند نیوتن-رافسون یا الگوریتم EM) حل شود. برآوردهای حاصل را با  $\hat{\mu}_{MM}$ ،  $\hat{\sigma}_{MM}$  و  $\hat{\lambda}_{MM}$  نشان می‌دهیم.

**۲.۳ روش بیشینه درستنمایی ( $ML$ ).** در این روش، مقادیری از پارامترها جستجو می‌شود که تابع درستنمایی (یا لگاریتم آن) برای داده‌های مشاهده شده بیشینه شود. با فرض نمونه‌ای مستقل و هم‌توزیع از  $SN(\mu, \sigma, \lambda)$ ، تابع درستنمایی به صورت زیر است:

$$(۴.۳) \quad L(\mu, \sigma, \lambda; \mathbf{x}) = \frac{\gamma^n}{\sigma^n} \prod_{i=1}^n \phi\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right) \Phi\left(\lambda \frac{x_i - \mu}{\sigma}\right).$$

لگاریتم تابع درستنمایی عبارت است از:

$$\begin{aligned} \ell(\mu, \sigma, \lambda; \mathbf{x}) &= n \ln \gamma - n \ln \sigma + \sum_{i=1}^n \ln \phi\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right) + \sum_{i=1}^n \ln \Phi\left(\lambda \frac{x_i - \mu}{\sigma}\right) \\ (5.3) \quad &= \text{ثابت} - n \ln \sigma - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 + \sum_{i=1}^n \ln \Phi\left(\lambda \frac{x_i - \mu}{\sigma}\right). \end{aligned}$$

با مشتقگیری جزئی از رابطه (۵.۳) نسبت به هر پارامتر و صفر قرار دادن آنها، معادلات زیر به دست می‌آید (با فرض قرار دادن برآوردها به جای پارامترها):

$$(6.3) \quad \begin{cases} \left. \frac{\partial \ell}{\partial \mu} \right|_{\hat{\mu}, \hat{\sigma}, \hat{\lambda}} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}} - \hat{\lambda} \sum_{i=1}^n \widehat{W}(x_i) = 0, \\ \left. \frac{\partial \ell}{\partial \sigma} \right|_{\hat{\mu}, \hat{\sigma}, \hat{\lambda}} = -n + \sum_{i=1}^n \left( \frac{x_i - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}} \right)^2 - \hat{\lambda} \sum_{i=1}^n \frac{x_i - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}} \widehat{W}(x_i) = 0, \\ \left. \frac{\partial \ell}{\partial \lambda} \right|_{\hat{\mu}, \hat{\sigma}, \hat{\lambda}} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}} \widehat{W}(x_i) = 0, \end{cases}$$

که در آن

$$\widehat{W}(x_i) = \frac{\phi\left(\hat{\lambda} \frac{x_i - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}}\right)}{\Phi\left(\hat{\lambda} \frac{x_i - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}}\right)}.$$

دستگاه (۶.۳) به طور تحلیلی قابل حل نیست و باید با روش‌های عددی بهینه‌سازی (مانند نیوتن-رافسون، الگوریتم EM یا روش‌های شبه-نیوتن) بیشینه‌سازی انجام شود. نرم‌افزارهای آماری مانند R توابعی برای این منظور دارد. برآوردهای حاصل را با  $\hat{\lambda}_{ML}$  و  $\hat{\sigma}_{ML}$ ،  $\hat{\mu}_{ML}$  نشان می‌دهیم.

**ملاحظه ۱.۳.** برآورد  $ML$  به دلیل استفاده از بهینه‌سازی مقید (مثلاً  $\sigma > 0$ ) معمولاً در فضای پارامتر معتبر قرار می‌گیرد. اما ممکن است برای نمونه‌های کوچک یا داده‌های خاص، تابع درستنمایی در مرز فضای پارامتر بیشینه شود (مثلاً  $\lambda \rightarrow \infty$ ) که در این صورت برآورد معتبر نیست. روش گشتاوری از نظر محاسباتی ساده‌تر است، زیرا فقط به حل یک دستگاه معادلات غیرخطی نیاز دارد. اما ممکن است برآوردهای کارایی (از نظر واریانس) نداشته باشد. در مقابل، روش  $ML$  معمولاً برآوردهایی با واریانس کمینه (در نمونه‌های بزرگ) ارائه می‌دهد و از نظر آماری کاراتر است. از نظر یکتایی، ممکن است هر دو روش به چند جواب برسند (به

ویژه روش گشتاوری)، در حالی که در روش  $ML$  معمولاً جواب یکتاست، اما در مرز پارامتر ممکن است چندگانه باشد. روش  $ML$  با اعمال قید در بهینه‌سازی، برآوردهای معتبرتری در فضای پارامتر ارائه می‌دهد. هر دو روش به نمونه وابسته هستند و در نمونه‌های کوچک ممکن است برآوردهای ناپایدار داشته باشند.

در ادامه مقاله، می‌توان نمودارهای کنترل میانگین و دامنه را برای درجه تعلق مشاهدات به کیفیت فازی مثلی  $\tilde{Q}_\Delta$  بررسی کرد. این موضوع به کاربرد توزیع چوله-نرمال در محیط‌های فازی اشاره دارد. برای مثال، ممکن است مشاهدات به جای مقادیر قطعی، با درجه عضویت فازی همراه باشند و بخواهیم فرایند را با استفاده از این درجات پایش کنیم. برآورد پارامترهای توزیع زمینه (مثلاً چوله-نرمال) برای داده‌های فازی نیازمند تعمیم روش‌های برآورد به فضای فازی است. در بخش بعدی، نمودارهای کنترل میانگین و دامنه را برای درجه تعلق مشاهدات به کیفیت فازی مثلی  $\tilde{Q}_\Delta$  بررسی و توسعه خواهیم داد.

#### ۴. به‌کارگیری توزیع چوله-نرمال در طراحی نمودارهای کنترل کیفیت فازی $\bar{X}$ و $R$

در کنترل کیفیت آماری کلاسیک، معمولاً فرض می‌شود که داده‌های فرایند از توزیع نرمال پیروی می‌کنند. اما وقتی داده‌ها به درجات تعلق فازی تبدیل می‌شوند (برای مثال، با استفاده از یک تابع عضویت مثلی)، این درجات لزوماً متقارن نیستند و می‌توانند چولگی داشته باشند. به عبارت دیگر، حتی اگر داده‌های اولیه  $x_{ij}$  نرمال باشند، تبدیل آنها به  $\tilde{Q}(x_{ij})$  می‌تواند توزیعی با چولگی ایجاد کند. بنابراین، فرض تقارن در نمودارهای کنترل معمولی/غیرفازی نقض می‌شود و استفاده از توزیع‌های نامتقارن ضروری می‌گردد. توزیع چوله-نرمال که توسط آذالینی [۷] معرفی شد، یک خانواده انعطاف‌پذیر است که ضمن حفظ بسیاری از ویژگی‌های توزیع نرمال، امکان مدل‌سازی چولگی را از طریق پارامتر  $\lambda$  فراهم می‌کند. همچنین، آزمون‌های نیکویی برازش نشان داده‌اند که این توزیع برای درجات تعلق فازی مثلی برازش مناسبی دارد. از این رو، در این مقاله از این توزیع برای مدل‌سازی  $\tilde{Q}(x_{ij})$  و آماره‌های میانگین و دامنه استفاده می‌شود.

هدف اصلی این بخش، به‌کارگیری توزیع چوله-نرمال در طراحی نمودارهای کنترل  $\bar{X}$  و  $R$  برای درجه کیفیت  $x_{ij}$ ها (یعنی  $\tilde{Q}(x_{ij})$ ها) است. توجه داشته باشید که توزیع  $\tilde{Q}(x_{ij})$ ها به تابع عضویت کیفیت فازی و همچنین توزیع  $x_{ij}$ ها بستگی دارد [۱۵]. فرض کنید  $f$  تابع چگالی احتمال مشخصه کیفیت پیوسته یک بعدی  $X$  باشد که نامعلوم است و  $m$  نمونه تصادفی (هر کدام شامل  $n$  مشاهده) از مشخصه کیفیت  $X$  در دسترس است. به عبارت دیگر

فرض کنید  $x_{ij}$  مشاهده  $j$ ام از نمونه  $j$ ام باشد، در این صورت ماتریس  $\tilde{Q}_{n \times m}$  را برای نمایش درجه کیفیت داده‌های مشاهده‌شده به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\tilde{Q}_{n \times m} = \begin{bmatrix} \tilde{Q}(x_{11}) & \tilde{Q}(x_{12}) & \cdots & \tilde{Q}(x_{1m}) \\ \tilde{Q}(x_{21}) & \tilde{Q}(x_{22}) & \cdots & \tilde{Q}(x_{2m}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{Q}(x_{n1}) & \tilde{Q}(x_{n2}) & \cdots & \tilde{Q}(x_{nm}) \end{bmatrix}$$

بنابراین میانگین و دامنه نمونه  $j$ ام به ترتیب به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$(۱.۴) \quad \overline{\tilde{Q}}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \tilde{Q}(x_{ij}), \quad j = 1, \dots, m,$$

و

$$(۲.۴) \quad R_j^{\tilde{Q}} = \max_{i=1, \dots, n} \tilde{Q}(x_{ij}) - \min_{i=1, \dots, n} \tilde{Q}(x_{ij}), \quad j = 1, \dots, m.$$

همچنین میانگین کل درجات کیفیت را می‌توان به صورت زیر ارائه داد:

$$(۳.۴) \quad \overline{\tilde{Q}} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \overline{\tilde{Q}}_j = \frac{1}{mn} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \tilde{Q}(x_{ij}).$$

نکته کلیدی که باید تصریح شود این است که خودِ مشاهدات اولیه فرایند  $(x_{ij})$  الزاماً چوله نیستند؛ بلکه تبدیل آنها به درجات تعلق کیفیت فازی مثلی  $\tilde{Q}_{\Delta}(x_{ij})$  می‌تواند توزیع‌هایی با چولگی ایجاد کند. به همین دلیل، فرض تقارن که در نمودارهای کنترل متداول مرسوم است، برای درجات تعلق نقض می‌شود و مدل‌سازی ویژه‌ای لازم است. ازاین‌رو، به‌کارگیری توزیع چوله-نرمال برای مدل‌سازی آنها منطقی است. زیرا این توزیع ضمن حفظ سادگی محاسباتی، از انعطاف‌پذیری کافی برای توصیف داده‌های نامتقارن برخوردار است. همچنین، نتایج آزمون‌های نیکویی برازش ( $GOFs$ ) نشان داد که توزیع چوله-نرمال برازش مناسبی برای درجات تعلق کیفیت فازی مثلی  $\tilde{Q}_{\Delta}(x_{ij})$  دارد. بر این اساس، در این مقاله برآوردهای بیشینه درستی و گشتاوری توزیع چوله-نرمال برای طراحی نمودارهای کنترل مورد استفاده قرار می‌گیرند. در ادامه این بخش دو رویکرد جدید برای ساخت نمودارهای کنترل میانگین و دامنه برای درجه تعلق مشاهدات به کیفیت فازی مثلی ( $\tilde{Q}_{\Delta}(x_{ij})$ ) پیشنهاد شده است.

۱.۴. رویکرد  $MM$ -محور. در این رویکرد، ابتدا سه گشتاور اول نمونه از هر آماره (میانگین و دامنه) محاسبه می‌شود. سپس با معادل‌سازی آن‌ها با گشتاورهای نظری توزیع چوله-نرمال (که بر حسب پارامترهای مجهول بیان می‌شوند)، دستگاه معادلاتی به دست می‌آید که حل عددی آن برآوردگرهای گشتاوری را به دست می‌دهد. در این رویکرد با در نظر گرفتن برآوردهای گشتاوری پارامترها در توزیع‌های  $\bar{Q}_{\Delta j}$  و  $R_j^{\bar{Q}_{\Delta}}$ ، حدود کنترل نمودارهای  $\bar{X} - R$  طراحی می‌شود.

۱.۱.۴. نمودار کنترل  $MM$ -محور  $\bar{X}$ . حد کنترل پایین، خط مرکزی و حد کنترل بالای نمودار  $\bar{X}$  مبتنی بر درجات تعلق داده‌ها به کیفیت فازی مثلی  $\bar{Q}_{\Delta}$  به ترتیب برابرند با:

$$(۴.۴) \quad \begin{cases} LCL_{\bar{Q}}^{MM} = \max \left\{ 0, F^{-1} \left( \alpha/2; \hat{\mu}_{MM}^{\bar{Q}}, \hat{\sigma}_{MM}^{\bar{Q}}, \hat{\lambda}_{MM}^{\bar{Q}} \right) \right\} \\ CL_{\bar{Q}}^{MM} = F^{-1} \left( 0.5; \hat{\mu}_{MM}^{\bar{Q}}, \hat{\sigma}_{MM}^{\bar{Q}}, \hat{\lambda}_{MM}^{\bar{Q}} \right) \\ UCL_{\bar{Q}}^{MM} = \min \left\{ 1, F^{-1} \left( 1 - \alpha/2; \hat{\mu}_{MM}^{\bar{Q}}, \hat{\sigma}_{MM}^{\bar{Q}}, \hat{\lambda}_{MM}^{\bar{Q}} \right) \right\} \end{cases}$$

که در آن‌ها  $\hat{\mu}_{MM}^{\bar{Q}}$ ،  $\hat{\sigma}_{MM}^{\bar{Q}}$  و  $\hat{\lambda}_{MM}^{\bar{Q}}$  برآوردگرهای گشتاوری پارامترهای توزیع چوله-نرمال هستند و با استفاده از حل معادلات (۳.۳) حاصل می‌شوند و  $F^{-1}(\cdot; \mu, \sigma, \lambda)$  وارون تابع توزیع چوله-نرمال است (به عبارت دیگر  $F^{-1}(\alpha; \mu, \sigma, \lambda)$ ،  $\alpha$  اُمین چنک از توزیع چوله-نرمال با پارامترهای  $\mu$ ،  $\sigma$  و  $\lambda$  است). لازم به ذکر است که شرط استفاده از فرمول‌های (۴.۴) آن است که  $\bar{Q}_{\Delta j}$ ‌ها دارای توزیع چوله-نرمال با پارامترهای  $\hat{\mu}_{MM}^{\bar{Q}}$ ،  $\hat{\sigma}_{MM}^{\bar{Q}}$  و  $\hat{\lambda}_{MM}^{\bar{Q}}$  باشند. ۲.۱.۴. نمودار کنترل  $MM$ -محور  $R$ . حدود کنترل و خط مرکزی نمودار  $R$  مبتنی بر درجات تعلق داده‌ها به کیفیت فازی مثلی  $\bar{Q}_{\Delta}$  برابرند با:

$$(۵.۴) \quad \begin{cases} LCL_R^{MM} = \max \left\{ 0, F^{-1} \left( \alpha/2; \hat{\mu}_{MM}^R, \hat{\sigma}_{MM}^R, \hat{\lambda}_{MM}^R \right) \right\} \\ CL_R^{MM} = F^{-1} \left( 0.5; \hat{\mu}_{MM}^R, \hat{\sigma}_{MM}^R, \hat{\lambda}_{MM}^R \right) \\ UCL_R^{MM} = \min \left\{ 1, F^{-1} \left( 1 - \alpha/2; \hat{\mu}_{MM}^R, \hat{\sigma}_{MM}^R, \hat{\lambda}_{MM}^R \right) \right\} \end{cases}$$

که در آن‌ها  $\hat{\mu}_{MM}^R$ ،  $\hat{\sigma}_{MM}^R$  و  $\hat{\lambda}_{MM}^R$  برآوردگرهای گشتاوری پارامترهای توزیع چوله-نرمال هستند و با استفاده از حل معادلات (۳.۳) حاصل می‌شوند. لازم به ذکر است که شرط استفاده از فرمول‌های (۵.۴) آن است که  $R_j^{\bar{Q}_{\Delta}}$ ‌ها دارای توزیع چوله-نرمال با پارامترهای  $\hat{\mu}_{MM}^R$ ،  $\hat{\sigma}_{MM}^R$  و  $\hat{\lambda}_{MM}^R$  باشند.

**۲.۴. رویکرد  $ML$  - محور.** با در نظر گرفتن برآوردهای حداکثر درستی پاراترها در توزیع‌های  $\bar{Q}_{\Delta j}$  و  $R_j^{\bar{Q}_{\Delta}}$ ، نوع دیگری از حدود کنترل  $\bar{X} - R$  را برای نمودار درجه‌تعلق مشاهدات به کیفیت فازی مثلی معرفی می‌کنیم.

**۱.۲.۴.** نمودار کنترل  $ML$  - محور  $\bar{X}$ . حد کنترل پایین، خط مرکزی و حد کنترل بالای نمودار  $\bar{X}$  مبتنی بر درجات تعلق داده‌ها به کیفیت فازی مثلی  $\bar{Q}_{\Delta}$  به ترتیب برابرند با:

$$(۶.۴) \quad \begin{cases} LCL_{\bar{Q}}^{ML} = \max \left\{ 0, F^{-1} \left( \alpha/2; \hat{\mu}_{ML}^{\bar{Q}}, \hat{\sigma}_{ML}^{\bar{Q}}, \hat{\lambda}_{ML}^{\bar{Q}} \right) \right\} \\ CL_{\bar{Q}}^{ML} = F^{-1} \left( 0.5; \hat{\mu}_{ML}^{\bar{Q}}, \hat{\sigma}_{ML}^{\bar{Q}}, \hat{\lambda}_{ML}^{\bar{Q}} \right) \\ UCL_{\bar{Q}}^{ML} = \min \left\{ 1, F^{-1} \left( 1 - \alpha/2; \hat{\mu}_{ML}^{\bar{Q}}, \hat{\sigma}_{ML}^{\bar{Q}}, \hat{\lambda}_{ML}^{\bar{Q}} \right) \right\} \end{cases}$$

که در آن  $\hat{\mu}_{ML}^{\bar{Q}}$ ،  $\hat{\sigma}_{ML}^{\bar{Q}}$  و  $\hat{\lambda}_{ML}^{\bar{Q}}$  به ترتیب برآوردهای حداکثر درستی برای پاراترهای  $\mu$ ،  $\sigma$  و  $\lambda$  براساس داده‌های توزیع شده چوله-نرمال  $\bar{Q}_{\Delta j}$ ‌ها به ازای  $j = 1, \dots, m$  هستند که با استفاده از حل معادلات در رابطه (۶.۳) حاصل می‌شوند.

**۲.۲.۴.** نمودار کنترل  $ML$  - محور  $R$ . حدود کنترل و خط مرکزی نمودار  $R$  مبتنی بر درجات تعلق داده‌ها به کیفیت فازی مثلی  $\bar{Q}_{\Delta}$  برابرند با:

$$(۷.۴) \quad \begin{cases} LCL_R^{ML} = \max \left\{ 0, F^{-1} \left( \alpha/2; \hat{\mu}_{ML}^R, \hat{\sigma}_{ML}^R, \hat{\lambda}_{ML}^R \right) \right\} \\ CL_R^{ML} = F^{-1} \left( 0.5; \hat{\mu}_{ML}^R, \hat{\sigma}_{ML}^R, \hat{\lambda}_{ML}^R \right) \\ UCL_R^{ML} = \min \left\{ 1, F^{-1} \left( 1 - \alpha/2; \hat{\mu}_{ML}^R, \hat{\sigma}_{ML}^R, \hat{\lambda}_{ML}^R \right) \right\} \end{cases}$$

که در آن  $\hat{\mu}_{ML}^R$ ،  $\hat{\sigma}_{ML}^R$  و  $\hat{\lambda}_{ML}^R$  به ترتیب برآوردهای حداکثر درستی برای پاراترهای  $\mu$ ،  $\sigma$  و  $\lambda$  براساس داده‌های توزیع شده چوله-نرمال  $R_j^{\bar{Q}_{\Delta}}$ ‌ها به ازای  $j = 1, \dots, m$  هستند.

**ملاحظه ۱.۴.** معمولاً احتمال ارتکاب خطای نوع اول در نمودارهای کنترل  $\alpha = 0.027$  در نظر گرفته می‌شود، چون  $1 - \alpha = 0.9973$  و  $P(-3 \leq Z \leq 3) = 1 - \alpha$  که در آن  $Z$  متغیر تصادفی نرمال استاندارد است [۱۱].

**ملاحظه ۲.۴.** درجات تعلق مشاهدات به کیفیت فازی مثلی، یعنی  $\bar{Q}_{\Delta}(x_{ij})$ ‌ها، همواره بین صفر و یک هستند و لذا انتخاب توزیع بتا برای برازش به  $\bar{Q}_{\Delta}(x_{ij})$ ‌ها در ابتدا می‌تواند معقول به نظر برسد. قادری و همکاران [۴، ۹] تحت فرض اینکه  $\bar{Q}_{\Delta j}$ ‌ها از توزیع بتا با پاراترهای نامعلوم  $a^{\bar{Q}}$  و  $b^{\bar{Q}}$  و  $R_j$ ‌ها نیز از توزیع بتا با پاراترهای نامعلوم  $a^R$  و  $b^R$  پیروی می‌کنند، دو رویکرد پارامتری مبتنی بر دو روش برآوردهای گشتاوری و حداکثر درستی برای طراحی

نمودارهای کنترل  $\bar{X}$  و  $R$  برای درجه‌تعلق مشاهدات به کیفیت فازی مثلی ارائه نمودند و علاقمندان برای توضیحات بیشتر می‌توانند به آن‌ها رجوع کنند.

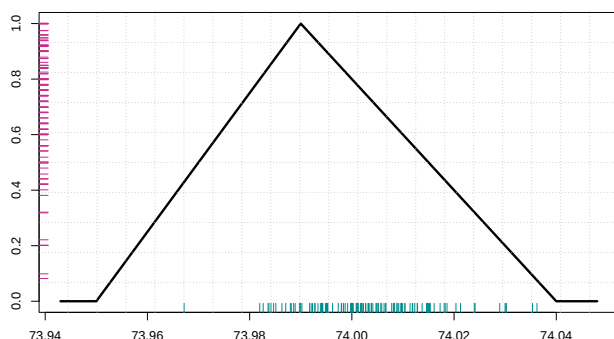
به منظور درک بهتر رویکردهای پیشنهادی، یک مثال کاربردی در بخش بعد ارائه می‌گردد.

## ۵. مطالعه موردی براساس داده‌های رینگ پیستون موتور خودرو

رینگ‌های پیستون موتور خودرو در یک فرایند آهنگری تولید می‌شوند. ۴۰ نمونه (هر کدام به حجم پنج) از طول قطر داخلی رینگ‌های پیستون بر حسب میلی‌متر جمع‌آوری شده است [۱۱]. به منظور کنترل قطر داخلی رینگ‌های تولید شده، قصد داریم از نمودارهای کنترل  $\bar{X}$  و  $R$  مبتنی بر کیفیت فازی مثلی استفاده کنیم. گفتنی است که محاسبات عددی و رسم نمودارها در این مطالعه موردی با نرم‌افزار  $R$  انجام شده و همچنین داده‌های قطر داخلی رینگ پیستون موتور خودرو در بسته  $qcc$  از نرم‌افزار  $R$  قابل دسترسی است [۱۸]. با در نظر گرفتن حدود مشخصه فنی  $[۷۳/۹۵, ۷۴/۰۴]$  و مقدار هدف  $T = ۷۳/۹۹$  برای مشخصه کیفیت  $X$  در فرایند تولید، کیفیت فازی مثلی پیشنهادی قادری و همکاران [۹] را به صورت

$$(۱.۵) \quad \tilde{Q}_{\Delta}(x_{ij}) = \begin{cases} \frac{x_{ij}-73.95}{73.99-73.95} & \text{اگر } 73.95 \leq x_{ij} < 73.99 \\ \frac{74.04-x_{ij}}{74.04-73.99} & \text{اگر } 73.99 \leq x_{ij} < 74.04 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

نمایش می‌دهیم (شکل ۱). لازم به ذکر است که تابع عضویت مثلی به‌کاررفته در این تعریف، برگرفته از رویکرد کیفیت فازی مثلی پیشنهادی قادری و همکاران [۹] است. در این رویکرد، هرچه مقدار مشخصه کیفیت  $x_{ij}$  به مقدار هدف  $T$  نزدیک‌تر باشد، درجه عضویت (کیفیت) بالاتری کسب می‌کند و با فاصله گرفتن از هدف تا مرزهای ترانس ( $USL$  و  $LSL$ )، درجه عضویت به‌صورت خطی کاهش می‌یابد. در خارج از بازه  $[LSL, USL]$ ، کیفیت صفر در نظر گرفته می‌شود که با مفهوم عدم انطباق در کنترل کیفیت کلاسیک (غیرفازی) مطابقت دارد. نماد  $\tilde{Q}_{\Delta}$  معرف میزان کیفیت فازی مثلی بوده و با هدف تأکید بر خاستگاه فازی این معیار و تمایز آن از نمادهای کلاسیک کیفیت (مانند  $Q$  یا  $\hat{Q}_{\Delta}$ ) انتخاب شده است. شایان ذکر است که این مجموعه کیفیت فازی، بسته به میزان حساسیت کاربر، قابلیت تعریف انعطاف‌پذیرتری نیز دارد. مبانی نظری کامل و روش محاسبه این معیار در مرجع [۹] به تفصیل تشریح شده است.



شکل ۱: تابع عضویت کیفیت فازی مثلی  $\tilde{Q}_\Delta$  در مطالعه موردی

بافت‌نگار درجات تعلق داده‌ها مبتنی بر کیفیت فازی مثلی (یعنی،  $\tilde{Q}_\Delta(x_{ij})$  ها) و منحنی برازش آن‌ها در شکل ۲ ارائه شده است. برای مثال، اولین نمونه از داده‌های قطر داخلی رینگ پیستون برابر با  $x_1 = (74/0.30, 74/0.02, 74/0.19, 73/992, 74/0.08)$  است. بنابراین با در نظر گرفتن کیفیت فازی مثلی  $\tilde{Q}_\Delta$  رابطه (۱.۵)، درجات تعلق کیفیت مربوط به نمونه اول، به صورت زیر قابل محاسبه هستند:

$$\tilde{Q}_{\Delta 1} = (0/20, 0/76, 0/42, 0/96, 0/64),$$

که به عنوان مثال محاسبات مربوط به درایه اول آن به صورت زیر است:

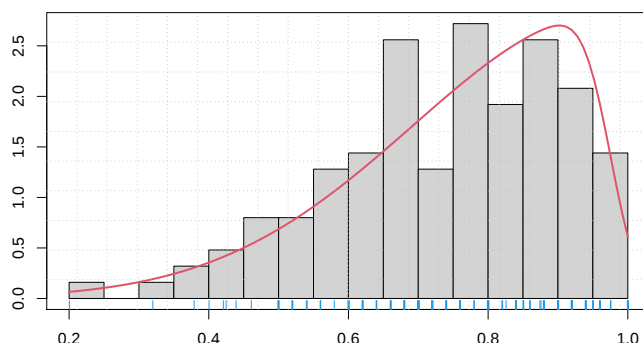
$$\tilde{Q}_\Delta(x_{11}) = \frac{74/0.4 - x_{11}}{74/0.4 - 73/99} = \frac{74/0.4 - 74/0.30}{74/0.4 - 73/99} = 0/20,$$

لذا میانگین و دامنه برای درجه کیفیت اولین نمونه به آسانی به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\bar{\tilde{Q}}_{\Delta 1} = \frac{0/20 + 0/76 + 0/42 + 0/96 + 0/64}{5} = 0/596,$$

و

$$\begin{aligned} R_1^{\tilde{Q}_\Delta} &= \max\{0/20 + 0/76 + 0/42 + 0/96 + 0/64\} \\ &\quad - \min\{0/20 + 0/76 + 0/42 + 0/96 + 0/64\} \\ &= 0/760. \end{aligned}$$



شکل ۲: بافت‌نگار مربوط به درجات تعلق داده‌ها مبتنی بر کیفیت فازی مثلی به همراه منحنی چولهٔ برازش‌یافته.

با توجه به اینکه درجات تعلق کیفیت فازی مثلی  $\tilde{Q}_{\Delta}(x_{ij})$  در عمل اغلب نامتقارن و عمدتاً دارای چولگی به چپ هستند، از توزیع چوله-نرمال برای مدل‌سازی آن‌ها بهره می‌گیریم. بر این اساس، برآوردهای گشتاوری و حداکثر درستی برای سه پارامتر توزیع چوله-نرمال برازش‌یافته به سه نوع مجموعه داده، یعنی  $\tilde{Q}_{\Delta}(x_{ij})$  ها،  $\bar{Q}_{\Delta j}$  ها و  $R_j^{\tilde{Q}_{\Delta}}$  ها در جدول ۲ ارائه شده است.

جدول ۲: برآوردهای گشتاوری و بیشینه درستی برای سه پارامتر توزیع چوله-نرمال برازش داده شده به سه نوع مجموعه داده (یعنی  $\tilde{Q}_{\Delta}(x_{ij})$  ها،  $\bar{Q}_{\Delta j}$  ها و  $R_j^{\tilde{Q}_{\Delta}}$  ها) در مطالعه موردی

| برآورد بیشینه درستی |        |        | برآورد گشتاوری |        |        | نوع مجموعه داده                 |
|---------------------|--------|--------|----------------|--------|--------|---------------------------------|
| چولگی               | مقیاس  | مکان   | چولگی          | مقیاس  | مکان   |                                 |
| -۸/۸۵۵۸             | ۰/۲۸۲۴ | ۰/۹۷۵۲ | -۰/۰۱۴۱        | ۰/۱۵۷۲ | ۰/۷۴۸۰ | ها $\tilde{Q}_{\Delta}(x_{ij})$ |
| -۱/۲۴۱۲             | ۰/۰۹۴۷ | ۰/۸۰۵۱ | -۰/۰۰۰۵        | ۰/۰۷۳۸ | ۰/۷۴۶۳ | ها $\bar{Q}_{\Delta j}$         |
| ۲/۱۷۸۱              | ۰/۱۹۶۴ | ۰/۲۳۲۲ | ۰/۰۴۰۳۷        | ۰/۱۴۸۸ | ۰/۳۶۸۸ | ها $R_j^{\tilde{Q}_{\Delta}}$   |

اکنون با استفاده از آزمون نیکویی برازش و در نظر گرفتن آزمون فرضیه‌های زیر، به بررسی مناسب بودن توزیع چوله-نرمال برای برازش مشاهدات مربوط به درجات کیفیت  $(\tilde{Q}_{\Delta}(x_{ij})$  ها) و برازش میانگین و دامنهٔ درجات کیفیت، می‌پردازیم:

$$(۲.۵) \quad \begin{cases} H_0 : \tilde{Q}_{\Delta}(x_{11}), \dots, \tilde{Q}_{\Delta}(x_{540}) \sim SN(\hat{\mu}, \hat{\sigma}, \hat{\lambda}) \\ H_1 : \sim H. \end{cases}$$

$$(۳.۵) \quad \begin{cases} H_0 : \bar{Q}_{\Delta 1}, \dots, \bar{Q}_{\Delta 25} \sim SN(\hat{\mu}, \hat{\sigma}, \hat{\lambda}) \\ H_1 : \sim H_0. \end{cases}$$

و

$$(۴.۵) \quad \begin{cases} H_0 : R_1^{\bar{Q}_{\Delta}}, \dots, R_{25}^{\bar{Q}_{\Delta}} \sim SN(\hat{\mu}, \hat{\sigma}, \hat{\lambda}) \\ H_1 : \sim H_0. \end{cases}$$

نتایج این سه آزمون کلموگروف اسمیرنوف<sup>۱</sup> (K-S) در جدول ۳ ارائه شده است، که مبین برازش معنی دار توزیع چوله-نرمال مشاهدات مربوط به درجات کیفیت  $(\bar{Q}_{\Delta}(x_{ij}))$  ها، میانگین و دامنه درجات کیفیت در سطوح معنی داری ۱٪ و ۵٪ است.

جدول ۳: نتایج تصمیم گیری و  $p$ -مقادارها در آزمون K-S برای برازش توزیع چوله-نرمال به درجات تعلق میانگین و دامنه درجات کیفیت در مطالعه موردی

| مجموعه داده                   | آماره آزمون براساس رویکرد $MM$ -محور | $p$ -مقدار براساس رویکرد $MM$ -محور | آماره آزمون براساس رویکرد $ML$ -محور | $p$ -مقدار براساس رویکرد $ML$ -محور | تصمیم گیری                                            |
|-------------------------------|--------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------------------------|
| $\bar{Q}_{\Delta}(x_{ij})$ ها | ۰/۱۱۳۸                               | ۰/۰۷۸۴                              | ۰/۵۷۱۳                               | ۰/۰۷۰۱                              | شواهد آماری برای رد توزیع چوله-نرمال مشاهده نشده است* |
| $\bar{Q}_{\Delta j}$ ها       | ۰/۰۹۵۹                               | ۰/۹۵۸۶                              | ۰/۹۸۹۶                               | ۰/۰۸۳۰                              | شواهد آماری برای رد توزیع چوله-نرمال مشاهده نشده است* |
| $R_j^{\bar{Q}_{\Delta}}$ ها   | ۰/۱۲۷۱                               | ۰/۸۱۳۴                              | ۰/۹۶۱۱                               | ۰/۱۰۰۹                              | شواهد آماری برای رد توزیع چوله-نرمال مشاهده نشده است* |

\*نتیجه گیری برای سطوح معنی داری ۱٪ و ۵٪.

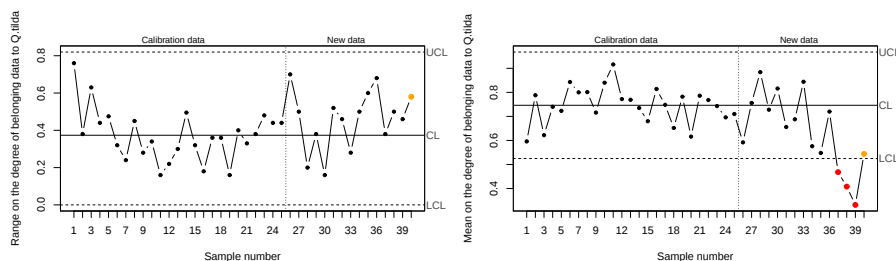
حدود کنترل و خط مرکزی نمودارهای  $\bar{X} - R$  مبتنی بر توزیع چوله-نرمال پیشنهادی با استفاده از روابط (۴.۴) تا (۷.۴) در جدول ۴ محاسبه شده اند. همچنین نمودارهای کنترل  $\bar{X}$  و  $R$  پیشنهادی در شکل های ۳ و ۴ با استفاده از بسته  $qcc$  در R رسم شده اند. لازم به ذکر است

جدول ۴: حدود کنترل و خط مرکزی نمودارهای  $\bar{X} - R$  مبتنی بر توزیع چوله-نرمال پیشنهادی در بخش ۴

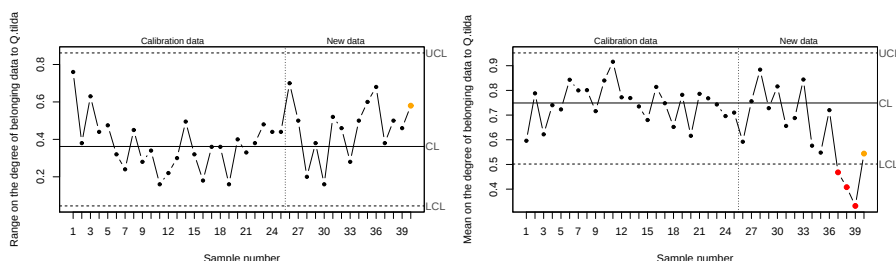
| نوع نمودار کنترل                  | $LCL$ | $CL$  | $UCL$ |
|-----------------------------------|-------|-------|-------|
| نمودار کنترل $MM$ -محور $\bar{X}$ | ۰/۵۲۵ | ۰/۷۴۶ | ۰/۹۶۸ |
| نمودار کنترل $MM$ -محور $R$       | ۰/۰۰۰ | ۰/۳۷۴ | ۰/۸۲۰ |
| نمودار کنترل $ML$ -محور $\bar{X}$ | ۰/۵۰۲ | ۰/۷۴۹ | ۰/۹۵۲ |
| نمودار کنترل $ML$ -محور $R$       | ۰/۰۴۴ | ۰/۳۶۲ | ۰/۸۶۲ |

۲۵ نمونه اولیه که در مرحله  $I$  برای برآورد حدود کنترل مورد استفاده قرار گرفتند، تحت کنترل بودند. همانند آنچه در سایر نمودارهای کنترل مرسوم است، اگر هر یک از این نقاط خارج

<sup>1</sup> Kolmogorov-Smirnov



شکل ۳: نمودارهای کنترل  $MM$  - محور  $\bar{X}$  و  $R$  مبتنی بر توزیع چوله-نرمال (مرحله  $I$  و مرحله  $II$ ) در مطالعه موردی



شکل ۴: نمودارهای کنترل  $ML$  - محور  $\bar{X}$  و  $R$  مبتنی بر توزیع چوله-نرمال (مرحله  $I$  و مرحله  $II$ ) در مطالعه موردی

از کنترل بود، حذف می‌شد و یک نمودار کنترل جدید با نقاط باقی‌مانده رسم می‌شد. سپس، اگر تمام نقاط نمودار جدید تحت کنترل بودند، برای برآورد حدود کنترل یک بار دیگر از آن‌ها استفاده می‌شد. به عبارت دیگر، اگر هر نقطه‌ای خارج از کنترل بود، حذف می‌شد و این فرایند تا زمانی که تمام نقاط نمونه بین حدود کنترل قرار می‌گرفتند، تکرار می‌شد. پس از برآورد حدود کنترل و اتمام مرحله  $I$ ، مرحله  $II$  با ۱۵ نمونه اضافی (هر کدام به اندازه پنج) شروع می‌شود. هر نقطه نمونه‌ای که خارج از حدود کنترل باشد، خارج از کنترل در نظر گرفته می‌شود. اگر همه نقاط بین حدود کنترل قرار گیرند ولی رفتار سیستماتیک/غیر تصادفی از خود نشان دهند، این شواهدی مبنی بر خارج از کنترل بودن فرایند است. نقاط قرمز و زرد در نمودارهای کنترل  $\bar{X}$  و  $R$  در شکل‌های ۳ و ۴ به ترتیب نقاط خارج از کنترل و حالت سیستماتیک/غیرتصادفی را نشان می‌دهند. معمولاً برای الگوهای غیرتصادفی که در نمودارهای کنترل ظاهر می‌شود دلیلی وجود دارد و اگر بتوان این دلیل را پیدا و حذف کرد، عملکرد فرایند بهبود پیدا می‌کند. از

مقایسه شکل‌های ۳ و ۴ در این مطالعه نتیجه می‌شود که هر دو نوع نمودار  $\bar{X} - R$  حساسیت یکسانی در شناسایی نقاط خارج از کنترل از خود نشان داده‌اند.

## ۶. شبیه‌سازی و مقایسه نمودارهای کنترل پیشنهادی با روش‌های پیشین

در این بخش قصد داریم با انجام یک مطالعه شبیه‌سازی براساس داده‌های قطر داخلی رینگ پیستون موتور خودرو، نمودارهای کنترل  $\bar{X} - R$  پیشنهادی را با انواع دیگر این نمودارها که در مراجع [۹] و [۱۵] ارائه شده‌اند، مقایسه کنیم.

۱.۶. شبیه‌سازی. با توجه به ۲۵ نمونه اولیه از مشاهدات رینگ پیستون، زمانی که به نظر می‌رسد فرایند تحت کنترل است، میانگین و انحراف استاندارد فرایند به ترتیب با  $\hat{\mu} = 74/001$  و  $\hat{\sigma} = 0/01$  برآورد می‌شوند. ابتدا حدود کنترل توسط ۲۵ نمونه اولیه با استفاده از هر دو رویکرد پیشنهادی در بخش ۴ و همچنین رویکردهای ارائه‌شده در مراجع [۹] و [۱۵] براساس کیفیت فازی مثلی معرفی شده

$$\tilde{Q}_{\Delta}(x_{ij}) = \begin{cases} \frac{x_{ij}-73/95}{73/99-73/95} & \text{اگر } 73/95 \leq x_{ij} < 73/99 \\ \frac{74/04-x_{ij}}{74/04-73/99} & \text{اگر } 73/99 \leq x_{ij} < 74/04 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

محاسبه می‌شوند. نتایج برای نمودارهای کنترل پیشنهادی قبلاً در جدول ۴ ارائه شده است. لازم به ذکر است با توجه به ملاحظه ۱.۴ احتمال وجود یک نقطه بین حدود کنترل در فرایند تحت کنترل را  $\alpha = 0/9973 - 1$  در نظر می‌گیریم. به منظور شبیه‌سازی این احتمال،  $m = 10^6$  نمونه (هر کدام به حجم پنج) به طور مستقل از توزیع نرمال با میانگین  $\hat{\mu}$  و انحراف استاندارد  $\hat{\sigma}$  شبیه‌سازی شده است. در اینجا قصد داریم از شبیه‌سازی مونت کارلو برای شبیه‌سازی احتمال ارتکاب خطای نوع اول ( $\alpha$ ) زمانی که فرایند تحت کنترل قرار دارد استفاده کنیم. احتمالات قرار گرفتن یک نقطه تصادفی زیر  $LCL$ ، بالای  $UCL$  و بین حدود کنترل در جدول ۵ محاسبه شده‌اند. نماد • در جدول ۵ نشان‌دهنده نقطه تصادفی است که در نمودار کنترل بطور تصادفی رسم می‌شود. به عنوان مثال، احتمال قرار گرفتن یک نقطه تصادفی  $R\tilde{Q}_{\Delta}$  بین حدود کنترل نمودار  $ML - \bar{R}$  برای فرایند تحت کنترل با فرمول نسبت زیر شبیه‌سازی شده است:

$$\hat{\alpha} = \hat{P}\left(LCL_R^{ML} < R\tilde{Q}_{\Delta} < UCL_R^{ML}\right) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m I\left(LCL_R^{ML} < R_j^{\tilde{Q}_{\Delta}} < UCL_R^{ML}\right)$$

جدول ۵: نتایج شبیه‌سازی انواع نمودارهای کنترل  $\bar{X} - R$  مبتنی بر کیفیت فازی در مطالعه موردی

| $\hat{\alpha}$ | $\hat{P}(UCL \leq \bullet)$ | $\hat{P}(LCL < \bullet < UCL)$ | $\hat{P}(\bullet \leq LCL)$ | نوع رویکرد و نمودار کنترل                                    |
|----------------|-----------------------------|--------------------------------|-----------------------------|--------------------------------------------------------------|
| ۰/۰۰۱۳         | ۰/۰۰۰۲                      | ۰/۹۹۸۷                         | ۰/۰۰۱۱                      | نمودار کنترل $ML$ - محور $\bar{X}$ مبتنی بر توزیع چوله-نرمال |
| ۰/۰۰۱۳۱۸       | ۰/۰۰۱۰۴۷                    | ۰/۹۹۸۶۸۲                       | ۰/۰۰۰۳                      | نمودار کنترل $ML$ - محور $R$ مبتنی بر توزیع چوله-نرمال       |
| ۰/۰۰۲۶         | ۰                           | ۰/۹۹۷۴                         | ۰/۰۰۲۶                      | نمودار کنترل $MM$ - محور $\bar{X}$ مبتنی بر توزیع چوله-نرمال |
| ۰/۰۰۲۳         | ۰/۰۰۲۳                      | ۰/۹۹۷۷                         | ۰                           | نمودار کنترل $MM$ - محور $R$ مبتنی بر توزیع چوله-نرمال       |
| ۰/۰۲۹۲         | ۰/۰۰۴۴                      | ۰/۹۷۰۸                         | ۰/۰۲۴۷                      | نمودار کنترل داده-محور $\bar{X}$ [۳]                         |
| ۰/۰۴۵۸         | ۰/۰۰۶۳                      | ۰/۹۵۴۲                         | ۰/۰۳۹۵                      | نمودار کنترل داده-محور $R$ [۳]                               |
| ۰/۰۱۱۰         | ۰/۰۰۰۵                      | ۰/۹۸۹۰                         | ۰/۰۱۰۵                      | نمودار کنترل چگالی-محور $\bar{X}$ [۳]                        |
| ۰/۰۱۰۱         | ۰/۰۰۲۶                      | ۰/۹۸۹۹                         | ۰/۰۰۷۴۸۲                    | نمودار کنترل چگالی-محور $R$ [۳]                              |
| ۰/۰۰۲۹         | ۰/۰۰۲۳                      | ۰/۹۹۷۱                         | ۰/۰۰۰۶                      | نمودار کنترل $ML$ - محور $\bar{X}$ مبتنی بر توزیع بتا [۹]    |
| ۰/۰۰۵۴         | ۰/۰۰۴۲                      | ۰/۹۹۴۶                         | ۰/۰۰۱۲                      | نمودار کنترل $ML$ - محور $R$ مبتنی بر توزیع بتا [۹]          |
| ۰/۰۰۳۱         | ۰/۰۰۲۵                      | ۰/۹۹۶۹                         | ۰/۰۰۰۶                      | نمودار کنترل $MM$ - محور $\bar{X}$ مبتنی بر توزیع بتا [۹]    |
| ۰/۰۰۴۵         | ۰/۰۰۳۷                      | ۰/۹۹۵۵                         | ۰/۰۰۰۸                      | نمودار کنترل $MM$ - محور $R$ مبتنی بر توزیع بتا [۹]          |

که در آن  $UCL_R^{ML}$  و  $LCL_R^{ML}$  حدود کنترل محاسبه شده نمودار  $ML$  - محور  $R$  در جدول ۴ هستند و  $R_{1,\epsilon}^{\bar{Q}\Delta}, \dots, R_{1,\epsilon}^{\bar{Q}\Delta}$  به طور مستقل شبیه‌سازی شده‌اند.

**ملاحظه ۱.۶.** در کنترل فرایند آماری،  $\alpha$  نشان‌دهنده احتمال هشدار نادرست (خروج نقطه‌ای از حدود کنترل در شرایطی که فرایند تحت کنترل است) می‌باشد. این مقدار معمولاً توسط طراح نمودار کنترل و براساس الزامات فرایند، مقداری مشخص و از پیش تعیین شده ( $\alpha$  اسمی) است. برای نمونه، براساس ملاحظه ۱.۴ در نمودارهای مرسوم ۳-سیگما،  $\alpha$  اسمی برابر ۰/۰۲۷/۰ در نظر گرفته می‌شود. آنچه در ارزیابی عملکرد نمودارهای کنترل اهمیت دارد نزدیکی  $\alpha$  واقعی (برآوردشده از شبیه‌سازی) به  $\alpha$  اسمی است، نه صرفاً کوچک بودن  $\alpha$  واقعی. دلایل این امر عبارتند از:

(۱) اگر  $\alpha$  واقعی بسیار کوچکتر از  $\alpha$  اسمی باشد، به این معناست که حدود کنترل بیش از حد باز طراحی شده‌اند. در این حالت، اگرچه هشدارهای نادرست کاهش می‌یابد، اما توان تشخیص فرایند خارج از کنترل نیز به شدت افت می‌کند (افزایش خطای نوع دوم) و نمودار در شناسایی تغییرات واقعی فرایند ناکارآمد خواهد بود.

(۲) اگر  $\alpha$  واقعی بسیار بزرگتر از  $\alpha$  اسمی باشد، هشدارهای نادرست افزایش یافته و هزینه‌های بازرسی و توقف غیرضروری خط تولید را به دنبال دارد.

بنابراین، یک نمودار کنترل ایده‌آل باید  $\alpha$  واقعی را تا حد امکان به  $\alpha$  اسمی نزدیک کند تا تعادلی میان خطای نوع اول و دوم برقرار سازد. در شبیه‌سازی ارائه‌شده در جدول ۵، روش پیشنهادی (نمودارهای کنترل  $MM$  - محور براساس توزیع چوله-نرمال) توانسته است  $\alpha$  واقعی را با مقادیر  $0.026/0$  و  $0.023/0$  به  $\alpha$  اسمی  $0.027/0$  نزدیک‌تر کند. سایر روش‌ها ممکن است  $\alpha$  واقعی دورتری از مقدار اسمی داشته باشند (چه کوچکتر و چه بزرگتر) که نشان‌دهنده‌ی ایایی در برآورد حدود کنترل و عملکرد ضعیف‌تر آنهاست. لازم به ذکر است که حدود کنترل نمودارهای داده-محور و چگالی-محور، به ترتیب با چندک‌های داده‌ها و چندک‌های چگالی کرنل برآوردشده محاسبه می‌شوند و برای آشنایی دقیق‌تر و توضیحات کامل‌تر به مراجع [۱۵، ۹، ۴، ۳] رجوع کنید.

۲.۶. مقایسه رویکردهای پیشنهادی با روش‌های پیشین. میانگین طول دنباله ( $ARL$ ) یکی از مهم‌ترین معیارهای ارزیابی کارایی نمودارهای کنترل در شناسایی تغییرات فرایند است. این شاخص به‌صورت میانگین تعداد نمونه‌هایی تعریف می‌شود که تا اعلام اولین هشدار خارج از کنترل، در فاصله بین حدود کنترل قرار می‌گیرند. به عبارت دیگر، اگر فرایند تحت کنترل باشد،  $ARL$  نشان‌دهنده‌ی متوسط تعداد نمونه‌هایی است که تا دریافت یک هشدار اشتباه گرفته می‌شود و اگر فرایند خارج از کنترل باشد، نشان‌دهنده‌ی سرعت تشخیص تغییر است. رابطه‌ی زیر بیانگر تعریف  $ARL$  است:

$$(۱.۶) \quad ARL = \frac{1}{Pr(\text{یک نقطه خارج از حدود کنترل رسم شود})}$$

هرچه مقدار  $ARL$  برای حالت خارج از کنترل کوچک‌تر باشد نشان‌دهنده‌ی قدرت بیشتر نمودار در تشخیص سریع‌تر تغییرات است [۱۱].

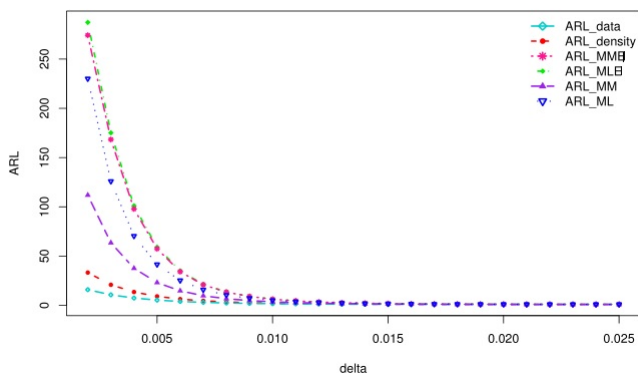
در این مقاله، عملکرد شش نوع نمودار کنترل  $\bar{X}$  و  $R$  براساس رویکردهای مختلف برآورد توزیع، شامل رویکردهای داده‌محور و چگالی‌محور پیشنهادی پرجمی و همکاران [۱۵]، دو رویکرد مبتنی بر توزیع بتا ( $MLB$  و  $MMB$ ) [۹]، و دو رویکرد مبتنی بر توزیع چوله-نرمال ( $MM$  و  $ML$ )، در حالت‌های مختلف تغییرات میانگین و انحراف معیار بررسی و مقایسه شده است. برای این منظور، شبیه‌سازی گسترده‌ای با  $10^6$  تکرار برای هر حالت انجام

شده و مقادیر  $ARL$  تحت تغییرات کنترل‌شده در میانگین ( $\delta$ ) و انحراف معیار ( $k$ ) محاسبه گردیده است. تغییرات  $\delta$  در بازه  $0/002$  تا  $0/025$  با گام  $0/001$  و تغییرات  $k$  در بازه  $1/2$  تا  $3/5$  با گام  $0/1$  اعمال شده است.

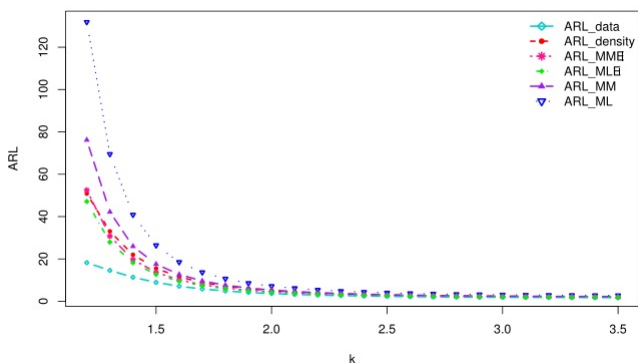
لازم به ذکر است که مقادیر  $ARL$  مربوط به نمودارهای کنترل  $\bar{X}$  براساس چهار رویکرد پیشین معرفی شده در مراجع [۳، ۴، ۹، ۱۵] و دو رویکرد پیشنهادی، به ترتیب با نمادهای  $ARL_{\bar{X}_{ML}}$ ،  $ARL_{\bar{X}_{MM}}$ ،  $ARL_{\bar{X}_{MLB}}$ ،  $ARL_{\bar{X}_{MMB}}$ ،  $ARL_{\bar{X}_{density}}$ ،  $ARL_{\bar{X}_{data}}$  مشخص شده‌اند و به ترتیب مربوط به نمودار کنترل داده-محور، نمودار کنترل چگالی-محور، نمودار کنترل  $MM$ -محور مبتنی بر توزیع بتا، نمودار کنترل  $ML$ -محور مبتنی بر توزیع بتا، نمودار کنترل  $MM$ -محور مبتنی بر توزیع چوله-نرمال و نمودار کنترل  $ML$ -محور مبتنی بر توزیع چوله-نرمال هستند.

نتایج شبیه‌سازی در جدول‌های ۶ و ۷ و همچنین منحنی‌های  $ARL$  در شکل‌های ۵ و ۶ ارائه شده‌اند. تحلیل دقیق این منحنی‌ها حاوی نکات مهمی است که در ادامه به آن‌ها پرداخته می‌شود. در شکل ۵، منحنی‌های  $ARL$  بر حسب  $\delta$  برای شش رویکرد مختلف رسم شده‌اند. همان‌طور که انتظار می‌رود، با افزایش  $\delta$ ، مقدار  $ARL$  در تمامی روش‌ها کاهش می‌یابد، اما سرعت و شیب این کاهش در رویکردهای مختلف متفاوت است. رویکردهای داده‌محور و چگالی‌محور پیشنهادی پرچمی و همکاران [۱۵]، به‌ویژه در محدوده تغییرات کوچک میانگین ( $\delta$  کوچک) عملکرد بهتری از خود نشان می‌دهند؛ به این معنا که زودتر تغییر را تشخیص می‌دهند. در مقابل، دو رویکرد مبتنی بر توزیع بتا ( $MLB$  و  $MMB$ )، در تغییرات بسیار کوچک ضعیف‌تر عمل می‌کند اما در تغییرات بزرگ‌تر، عملکردی مشابه سایر روش‌ها پیدا می‌کند.

به‌طور مشابه، مقادیر  $ARL$  مربوط به نمودارهای کنترل  $R$  با استفاده از همان شش رویکرد، به ترتیب با نمادهای  $ARL_{R_{MLB}}$ ،  $ARL_{R_{MMB}}$ ،  $ARL_{R_{density}}$ ،  $ARL_{R_{data}}$ ،  $ARL_{R_{ML}}$  و  $ARL_{R_{MM}}$  مشخص شده‌اند. این نمادها به ترتیب مربوط به نمودار کنترل داده-محور، نمودار کنترل چگالی-محور، نمودار کنترل  $MM$ -محور مبتنی بر توزیع بتا، نمودار کنترل  $ML$ -محور مبتنی بر توزیع بتا، نمودار کنترل  $MM$ -محور مبتنی بر توزیع چوله-نرمال و نمودار کنترل  $ML$ -محور مبتنی بر توزیع چوله-نرمال هستند. این مقادیر در جدول ۷ و شکل ۶ ارائه شده‌اند. در شکل ۶ منحنی‌های  $ARL$  برای نمودارهای  $R$  تحت تغییرات انحراف معیار ( $k$ ) ترسیم شده‌اند. مشاهده می‌شود که با افزایش انحراف معیار، تمامی روش‌ها کاهش  $ARL$  را تجربه می‌کنند. نکته قابل تأمل آن است که در این حالت نیز رویکرد



شکل ۵: منحنی‌های میانگین طول دنباله بر حسب تغییرات میانگین به ازای  $\delta = 0.002(0.001)0.025$  برای انواع نمودار کنترل  $\bar{X}$



شکل ۶: منحنی‌های میانگین طول دنباله بر حسب تغییرات انحراف معیار به ازای  $k = 1.5(0.5)3.5$  برای انواع نمودار کنترل  $R$

داده‌محور در مقایسه با رویکردهای دیگر حساسیت بیشتری نسبت به تغییرات کوچک  $k$  از خود نشان می‌دهند. این موضوع می‌تواند به دلیل ساختار داده‌های خام در مدل‌سازی دامنه تغییرات باشد.

از جامع عملکرد رویکردهای مختلف در طراحی نمودارهای کنترل  $\bar{X} - R$  می‌توان نتیجه گرفت که انتخاب روش بهینه به وضعیت فرایند (تحت کنترل یا خارج از کنترل) وابسته است. برای فرایندهای تحت کنترل، که هدف اصلی کاهش هشدارهای نادرست است، نمودارهای

$MM - R - \bar{X}$  محوری مبتنی بر توزیع چوله-نرمال عملکرد بهتری از خود نشان می‌دهند. این برتری را می‌توان به برازش دقیق‌تر این توزیع‌ها به ساختار داده‌ها و در نتیجه، تعیین حدود کنترلی مناسب‌تر نسبت داد که موجب کاهش خطای نوع اول می‌شود. در مقابل، برای فرایندهای خارج از کنترل، که سرعت تشخیص تغییر اولویت اصلی است، نمودارهای داده-محور پیشنهادی پرچمی و همکاران [۱۵]، عملکرد برتری دارند. علت این برتری در آن است که در روش داده-محور، فاصله بین حدود کنترل نسبت به سایر روش‌ها کوتاه‌تر است. این ویژگی ناشی از وابستگی مستقیم این روش به مشاهدات خام و عدم استفاده از برازش توزیع‌های نظری است که ممکن است موجب هموارسازی بیش از حد تغییرات شود. حدود کنترلی کوتاه‌تر، اگرچه ممکن است احتمال هشدارهای اشتباه را اندکی افزایش دهد، اما در شرایط خارج از کنترل باعث می‌شود که نمودار بتواند تغییرات فرایند را سریع‌تر شناسایی کرده و زودتر زنگ هشدار را فعال کند. بنابراین، انتخاب بین دقت در حالت تحت کنترل و سرعت در حالت خارج از کنترل، یک تصمیم مهندسی مبتنی بر اولویت‌های کیفی فرایند خواهد بود.

## ۷. نتیجه‌گیری و کارهای آینده

در این مقاله، روشی نوین برای طراحی نمودارهای کنترل میانگین ( $\bar{X}$ ) و دامنه ( $R$ ) با هدف پایش درجات تعلق کیفیت فازی مثلی ارائه شد. نکته محوری که باید مورد تأکید قرار گیرد این است که اگرچه مشاهدات اولیه فرایند ممکن است از توزیع نرمال پیروی کنند، اما تبدیل آنها به درجات تعلق فازی (با استفاده از توابع عضویت مثلی) می‌تواند منجر به ایجاد توزیع‌هایی با چولگی قابل توجه شود. بنابراین، فرض تقارن که در نمودارهای کنترل کلاسیک (نظیر نمودارهای کنترل شوهارت) اساسی است، برای درجات تعلق کیفیت فازی نقض می‌گردد و ضرورت به‌کارگیری مدل‌های انعطاف‌پذیرتری مانند توزیع چوله-نرمال اجتناب‌ناپذیر می‌نماید. در این پژوهش، برای مدل‌سازی نامتقارنی درجات تعلق کیفیت فازی، از گشتاورهای توزیع چوله-نرمال و برآوردگر بیشینه درست‌نمایی استفاده شد. بر پایه این برآوردها، حدود کنترلی نمودارهای  $\bar{X}$  و  $R$  برای پایش گرایش مرکزی و پراکندگی درجات کیفیت فازی محاسبه گردید. نتایج شبیه‌سازی و تحلیل‌های عددی نشان داد که رویکرد پیشنهادی نسبت به روش‌های مرسوم (که مبتنی بر فرض نرمال بودن هستند) عملکرد بهتری از نظر نزدیکی سطح خطای نوع اول تجربی به مقدار اسمی  $\alpha$  دارد و از این رو، برای کاربردهای عملی در محیط‌های تولیدی که کیفیت به صورت فازی تعریف می‌شود، گزینه‌ای مناسب‌تر است.

جدول ۶: شبیه‌سازی میانگین طول دنباله برای نمودار کنترل  $\bar{X}$  مبتنی بر ۶ رویکرد مختلف

| $ARL_{\bar{X}_{ML}}$ | $ARL_{\bar{X}_{MM}}$ | $ARL_{\bar{X}_{MLB}}$ | $ARL_{\bar{X}_{MMB}}$ | $ARL_{\bar{X}_{density}}$ | $ARL_{\bar{X}_{data}}$ | $\delta$ |
|----------------------|----------------------|-----------------------|-----------------------|---------------------------|------------------------|----------|
| ۲۳۰/۰۹۶۶۴۱           | ۱۱۱/۸۹۴۳۷۲           | ۲۸۷/۲۷۳۷۷۲            | ۲۷۴/۱۹۷۹۷۱            | ۳۳/۳۴۲۲۲۵                 | ۱۵/۹۴۶۱۶۶              | ۰/۰۰۲    |
| ۱۲۵/۹۷۶۳۱۶           | ۶۳/۵۲۸۳۶۵            | ۱۷۵/۱۶۲۰۲۵            | ۱۶۸/۴۰۶۸۷۱            | ۲۰/۹۱۸۳۱۴                 | ۱۰/۷۴۶۹۱۰              | ۰/۰۰۳    |
| ۷۰/۴۵۲۳۰۴            | ۳۷/۶۴۲۰۹۹            | ۱۰۱/۰۸۱۵۷۳            | ۹۷/۸۷۶۰۸۹             | ۱۳/۶۱۰۰۷۱                 | ۷/۴۷۴۰۶۵               | ۰/۰۰۴    |
| ۴۱/۵۷۴۸۵۶            | ۲۳/۱۷۷۶۵۷            | ۵۹/۱۲۹۶۱۲             | ۵۷/۴۵۱۴۵۴             | ۹/۱۸۰۸۸۲                  | ۵/۳۹۸۳۷۳               | ۰/۰۰۵    |
| ۲۵/۳۵۱۷۵۶            | ۱۴/۷۹۵۰۸۸            | ۳۵/۰۶۰۶۵۵             | ۳۴/۲۰۶۷۴۶             | ۶/۴۲۳۷۶۳                  | ۴/۰۱۰۴۲۷               | ۰/۰۰۶    |
| ۱۵/۸۹۸۲۵۱            | ۹/۷۹۳۱۶۸             | ۲۱/۴۴۶۳۴۱             | ۲۰/۹۱۹۶۲۷             | ۴/۶۶۴۴۸۴                  | ۳/۰۸۸۷۳۶               | ۰/۰۰۷    |
| ۱۰/۵۳۸۱۸۵            | ۶/۸۰۱۰۰۹             | ۱۳/۷۹۸۴۳۲             | ۱۳/۵۰۶۹۴۳             | ۳/۵۱۸۰۵۵                  | ۲/۴۶۲۲۳۵               | ۰/۰۰۸    |
| ۷/۲۵۳۷۳۶             | ۴/۰۶۷۴۷              | ۹/۲۶۳۱۱۹              | ۹/۰۸۱۰۰۳              | ۲/۷۵۲۵۵۴                  | ۲/۰۲۵۵۰۵               | ۰/۰۰۹    |
| ۵/۱۵۵۷۲۹             | ۳/۶۱۷۵۵۶             | ۶/۴۱۴۸۲۱              | ۶/۳۰۱۷۹۳              | ۲/۲۲۰۳۳۷                  | ۱/۷۱۸۱۳۹               | ۰/۰۱۰    |
| ۳/۸۳۸۳۵۹             | ۲/۸۴۳۱۶۳             | ۴/۶۴۸۵۰۳              | ۴/۵۷۸۷۱۳              | ۱/۸۵۵۹۳۵                  | ۱/۵۰۲۱۶۲               | ۰/۰۱۱    |
| ۲/۹۶۴۵۴۴             | ۲/۲۹۰۰۵۹             | ۳/۴۹۴۷۴۴              | ۳/۴۴۸۸۵۹              | ۱/۶۰۱۴۱۴                  | ۱/۳۴۸۱۹۴               | ۰/۰۱۲    |
| ۲/۳۶۹۴۶۶             | ۱/۹۰۴۹۹۴             | ۲/۷۳۵۰۵۸              | ۲/۷۰۳۸۲۱              | ۱/۴۱۸۶۹۵                  | ۱/۲۳۷۹۰۶               | ۰/۰۱۳    |
| ۱/۹۵۶۵۶۰             | ۱/۶۳۲۱۱۲             | ۲/۲۰۹۵۷۴              | ۲/۱۸۷۷۴۳              | ۱/۲۸۶۱۹۵                  | ۱/۱۵۸۷۲۸               | ۰/۰۱۴    |
| ۱/۶۷۰۳۸۹             | ۱/۴۳۸۸۲۲             | ۱/۸۴۸۳۰۲              | ۱/۸۳۳۰۰۲              | ۱/۱۹۳۸۳۲                  | ۱/۰۴۲۳۲                | ۰/۰۱۵    |
| ۱/۴۶۵۷۱۳             | ۱/۳۰۲۰۵۳             | ۱/۵۹۱۲۵۲              | ۱/۵۸۰۸۱۰              | ۱/۱۲۷۹۴۶                  | ۱/۰۶۶۳۶۱               | ۰/۰۱۶    |
| ۱/۳۲۱۱۶۱             | ۱/۲۰۳۷۷۸             | ۱/۴۱۰۳۱۲              | ۱/۴۰۲۸۶۷              | ۱/۰۸۲۹۷۳                  | ۱/۰۴۰۶۹۹               | ۰/۰۱۷    |
| ۱/۲۱۹۴۸۷             | ۱/۱۳۶۷۶۳             | ۱/۲۸۳۳۴۸              | ۱/۲۷۷۸۶۱              | ۱/۰۵۲۲۰۴                  | ۱/۰۲۴۳۵۸               | ۰/۰۱۸    |
| ۱/۱۴۴۹۹۹             | ۱/۰۸۷۳۸۸             | ۱/۱۹۰۳۰۸              | ۱/۱۸۶۵۰۱              | ۱/۰۳۰۹۱۳                  | ۱/۰۱۳۹۴۴               | ۰/۰۱۹    |
| ۱/۰۹۴۱۶۶             | ۱/۰۵۵۱۷۶             | ۱/۱۲۵۴۰۲              | ۱/۱۲۲۶۶۸              | ۱/۰۱۸۲۰۰                  | ۱/۰۰۷۷۱۳               | ۰/۰۲۰    |
| ۱/۰۵۹۳۹۶             | ۱/۰۳۳۵۳۳             | ۱/۰۸۰۳۶۳              | ۱/۰۷۸۵۳۲              | ۱/۰۱۰۲۷۷                  | ۱/۰۰۳۹۹۹               | ۰/۰۲۱    |
| ۱/۰۳۶۱۸۴             | ۱/۰۱۹۴۶۵             | ۱/۰۵۰۱۸۹              | ۱/۰۴۸۹۸۷              | ۱/۰۰۵۴۹۷                  | ۱/۰۰۱۹۱۸               | ۰/۰۲۲    |
| ۱/۰۲۱۳۰۵             | ۱/۰۱۱۰۰۵             | ۱/۰۳۰۳۹۶              | ۱/۰۲۹۵۵۵              | ۱/۰۰۲۸۴۹                  | ۱/۰۰۱۰۰۱               | ۰/۰۲۳    |
| ۱/۰۱۲۱۰۸             | ۱/۰۰۵۹۴۲             | ۱/۰۱۷۵۶۶              | ۱/۰۱۷۰۶۲              | ۱/۰۰۱۳۷۴                  | ۱/۰۰۰۴۱۵               | ۰/۰۲۴    |
| ۱/۰۰۶۵۷۰             | ۱/۰۰۳۱۰۳             | ۱/۰۰۹۹۵۳              | ۱/۰۰۹۶۴۴              | ۱/۰۰۰۶۳۷                  | ۱/۰۰۰۱۸۹               | ۰/۰۲۵    |

محدودیت‌های پژوهش. پذیرفتن هر رویکرد نوینی مستلزم شناخت محدودیت‌های آن

است. محدودیت‌های اصلی مقاله حاضر عبارتند از:

۱. وابستگی به انتخاب تابع عضویت: رویکرد ارائه‌شده مبتنی بر تابع عضویت مثلی است. اگرچه این تابع به دلیل سادگی و کاربرد گسترده انتخاب شده، اما در عمل ممکن است توابع عضویت دیگر (نظیر دوزنقه‌ای یا گوسی) برای برخی فرایندها مناسب‌تر باشند. تعمیم نتایج به سایر توابع عضویت نیازمند بررسی جداگانه است.

۲. فرضیات توزیعی: اگرچه توزیع چوله-نرمال انعطاف‌پذیری بیشتری نسبت به نرمال دارد، اما همچنان یک خانواده پارامتری خاص است. در مواردی که چولگی ناشی از درجات تعلق

جدول ۷: شبیه‌سازی میانگین طول دنباله برای نمودار کنترل  $R$  مبتنی بر ۶ رویکرد مختلف

| $ARL_{R_{ML}}$ | $ARL_{R_{MM}}$ | $ARL_{R_{MLB}}$ | $ARL_{R_{MMB}}$ | $ARL_{R_{density}}$ | $ARL_{R_{data}}$ | $k$ |
|----------------|----------------|-----------------|-----------------|---------------------|------------------|-----|
| ۱۳۱/۸۵۶۵۴۰     | ۷۶/۱۹۰۴۷۶      | ۴۷/۱۳۸۶۸۲       | ۵۲/۴۹۰۶۸۳       | ۵۰/۸۷۲۴۶۳           | ۱۸/۲۳۵۱۹۸        | ۱/۲ |
| ۶۹/۵۱۲۰۲۶      | ۴۲/۲۰۸۳۴۰      | ۲۷/۹۸۳۷۶۹       | ۳۰/۷۲۱۹۶۶       | ۳۳/۰۵۵۶۶۶           | ۱۴/۵۸۵۱۲۶        | ۱/۳ |
| ۴۰/۸۷۱۳۷۸      | ۲۵/۹۵۳۱۲۹      | ۱۸/۲۱۷۲۵۹       | ۱۹/۷۱۳۷۵۶       | ۲۲/۰۰۳۱۶۸           | ۱۱/۳۷۶۶۹۴        | ۱/۴ |
| ۲۶/۴۳۹۶۳۸      | ۱۷/۵۷۵۳۱۰      | ۱۲/۷۱۲۹۴۲       | ۱۳/۶۴۴۲۴۰       | ۱۵/۵۷۹۴۷۹           | ۸/۹۲۱۶۴۱         | ۱/۵ |
| ۱۸/۵۰۹۲۶۴      | ۱۲/۶۷۴۵۹۳      | ۹/۴۸۶۵۸۶        | ۱۰/۱۱۱۵۳۰       | ۱۱/۵۳۳۲۲۷           | ۷/۱۴۶۳۲۸         | ۱/۶ |
| ۱۳/۶۷۷۴۵۸      | ۹/۶۱۹۲۶۹       | ۷/۳۷۶۸۰۷        | ۷/۸۰۷۹۲۵        | ۸/۸۷۸۴۷۱            | ۵/۲۶۵۲۱          | ۱/۷ |
| ۱۰/۶۶۵۳۰۲      | ۷/۶۴۳۷۴۱       | ۵/۹۷۸۹۳۰        | ۶/۳۰۶۴۰۳        | ۷/۱۳۹۰۸۴            | ۴/۸۹۲۷۲۷         | ۱/۸ |
| ۸/۵۷۲۶۵۳       | ۶/۲۶۴۰۹۴       | ۴/۹۷۹۷۳۲        | ۵/۲۳۱۵۴۸        | ۵/۸۹۴۸۳۶            | ۴/۱۸۲۰۵۳         | ۱/۹ |
| ۷/۱۵۴۷۶۵       | ۵/۳۱۲۱۹۸       | ۴/۲۸۹۴۵۲        | ۴/۴۹۱۲۱۳        | ۵/۰۲۸۳۳۵            | ۳/۶۶۰۸۳۱         | ۲   |
| ۶/۱۶۶۴۴۵       | ۴/۶۱۷۰۴۰       | ۳/۷۶۲۶۵۲        | ۳/۹۲۹۷۹۸        | ۴/۳۸۳۵۴۲            | ۳/۲۶۳۷۶۱         | ۲/۱ |
| ۵/۳۸۵۳۳۹       | ۴/۰۸۳۳۴۹       | ۳/۳۵۹۳۸۰        | ۳/۴۹۹۳۵۴        | ۳/۸۸۸۲۳۷            | ۲/۹۴۵۲۷۴         | ۲/۲ |
| ۴/۸۰۹۵۴۲       | ۳/۶۷۴۶۰۶       | ۳/۰۵۰۳۶۱        | ۳/۱۷۲۶۸۹        | ۳/۵۰۸۹۴۴            | ۲/۶۹۷۰۰۳         | ۲/۳ |
| ۴/۳۷۶۵۹۷       | ۳/۳۶۵۹۹۵       | ۲/۸۱۰۱۷۳        | ۲/۹۱۸۳۴۵        | ۳/۲۲۰۲۷۰            | ۲/۵۰۴۶۸۴         | ۲/۴ |
| ۴/۰۱۵۸۲۲       | ۳/۱۱۲۶۹۵       | ۲/۶۱۷۴۱۷        | ۲/۷۱۳۸۰۰        | ۲/۹۸۴۹۵۹            | ۲/۳۴۸۱۰۷         | ۲/۵ |
| ۳/۷۴۲۸۵۱       | ۲/۹۱۹۷۳۴       | ۲/۴۶۵۵۶۸        | ۲/۵۵۴۲۹۱        | ۲/۸۰۱۳۰۱            | ۲/۲۲۰۷۸۶         | ۲/۶ |
| ۳/۵۱۹۳۱۸       | ۲/۷۵۶۶۲۸       | ۲/۳۳۹۳۸۹        | ۲/۴۲۰۲۸۸        | ۲/۶۴۸۸۰۳            | ۲/۱۱۷۹۸۴         | ۲/۷ |
| ۳/۳۵۱۶۱۱       | ۲/۶۳۴۳۷۳       | ۲/۲۴۲۰۲۲        | ۲/۳۱۶۸۸۰        | ۲/۵۳۳۱۵۳            | ۲/۰۳۶۴۱۹         | ۲/۸ |
| ۳/۲۱۰۷۲۶       | ۲/۵۳۱۵۱۷       | ۲/۱۶۱۹۸۰        | ۲/۲۳۲۷۵۶        | ۲/۴۳۶۳۹۸            | ۱/۹۶۸۲۳۳         | ۲/۹ |
| ۳/۰۹۲۶۶۲       | ۲/۴۴۶۵۴۳       | ۲/۰۹۴۱۶۲        | ۲/۱۶۲۱۷۶        | ۲/۳۵۵۱۸۰            | ۱/۹۱۲۲۶۵         | ۳   |
| ۲/۹۹۴۵۵۹       | ۲/۳۷۷۵۹۰       | ۲/۰۳۹۴۵۱        | ۲/۱۰۳۹۰۸        | ۲/۲۸۹۸۹۶            | ۱/۸۶۵۶۶۱         | ۳/۱ |
| ۲/۹۱۷۴۰۸       | ۲/۳۱۹۶۲۱       | ۱/۹۹۶۶۱۰        | ۲/۰۵۸۷۹۹        | ۲/۲۳۵۴۶۶            | ۱/۸۲۷۵۳۲         | ۳/۲ |
| ۲/۸۶۴۲۴۶       | ۲/۲۷۸۰۳۹       | ۱/۹۶۰۱۰۰        | ۲/۰۲۰۳۱۲        | ۲/۱۹۴۷۱۰            | ۱/۷۹۸۴۹۳         | ۳/۳ |
| ۲/۸۱۰۹۶۳       | ۲/۲۴۴۵۵۳       | ۱/۹۳۴۳۵۹        | ۱/۹۹۴۰۶۶        | ۲/۱۶۲۷۳۷            | ۱/۷۷۵۳۸۵         | ۳/۴ |
| ۲/۷۶۰۲۱۲       | ۲/۲۰۶۴۱۹       | ۱/۹۰۵۶۱۹        | ۱/۹۶۲۹۴۰        | ۲/۱۲۶۴۴۳            | ۱/۷۴۹۵۹۱         | ۳/۵ |

بسیار شدید باشد یا دم‌های سنگین‌تری وجود داشته باشد، ممکن است توزیع‌های دیگری مانند  $t$  - چوله عملکرد بهتری داشته باشند.

۳. **حجم نمونه:** برآوردگرهای بیشینه درست‌نمایی در نمونه‌های کوچک ممکن است دچار اریبی شوند. در این مطالعه، عملکرد روش برای حجم‌های نمونه متفاوت بررسی شد، اما برای نمونه‌های بسیار کوچک (کمتر از ۵)، احتیاط در استفاده توصیه می‌شود.

۴. **فرض کنترل‌پذیری فرایند:** مشابه سایر روش‌های کنترل فرایند، این رویکرد نیز فرض می‌کند که داده‌های فاز اول (فاز برآورد) نماینده فرایند تحت کنترل هستند. هرگونه انحراف در این مرحله می‌تواند بر دقت حدود کنترل تأثیر بگذارد.

**پیشنهاد برای پژوهش‌های آتی.** در راستای رفع محدودیت‌های پژوهش حاضر و گسترش دامنه کاربرد روش پیشنهادی، چندین مسیر پژوهشی برای کارهای آتی قابل طرح است. در گام نخست، با توجه به اینکه در این مطالعه از نمودار  $R$  به دلیل سادگی محاسباتی استفاده شد، پیشنهاد می‌شود نمودار  $S$  (انحراف معیار) برای پایش پراکندگی در فرایندهای با درجات کیفیت چوله‌شده طراحی و ارزیابی گردد. نمودار  $S$  به‌ویژه در نمونه‌های با حجم بیشتر (معمولاً  $n > 10$ ) کارایی بالاتری داشته و در برابر مشاهدات پرت مقاوم‌تر است [۱۱]. استخراج حدود کنترل این نمودار براساس توزیع چوله-نرمال و با به‌کارگیری روش‌های چندکی می‌تواند مبنای نظری این توسعه باشد و عملکرد آن از نظر معیارهایی چون میانگین طول دنباله ( $ARL$ ) با نمودار  $R$  مقایسه شود. علاوه بر این، بررسی کارایی توزیع‌های انعطاف‌پذیرتری مانند  $t$ -چوله برای مدل‌سازی درجات تعلق کیفیت فازی و طراحی نمودارهای کنترل مبتنی بر آنها، می‌تواند به انعطاف‌پذیری بیشتر روش بیفزاید.

در ادامه، توسعه نسخه‌های تطبیقی نمودارهای  $\bar{X}$  و  $R$  (همچون نمودارهای با حدود متغیر یا نمونه‌گیری متغیر) متناسب با ماهیت فازی کیفیت و نیز تعمیم روش به توابع عضویت غیرخطی یا نامتقارن و بررسی حساسیت عملکرد نمودارها به شکل تابع عضویت، از دیگر زمینه‌های پژوهشی ارزشمند هستند. علیرغم محدودیت‌های ذکر شده، رویکرد ارائه‌شده گامی مهم در جهت یکپارچه‌سازی مفاهیم کیفیت فازی و روش‌های کنترل فرایند آماری با فرضیات توزیعی انعطاف‌پذیر محسوب می‌شود. نتایج این پژوهش می‌تواند برای صنایعی که کیفیت محصولات در آنها به صورت ذاتی فازی ارزیابی می‌شود (مانند صنایع غذایی، پزشکی، نساجی و شیمیایی) مفید واقع شود و انتظار می‌رود توسعه‌های آتی دامنه کاربرد این روش را گسترش داده و محدودیت‌های فعلی را کاهش دهند.

## مراجع

- [۱] ایرانمنش، ح.، پرچمی، ع.، جبّاری نوقابی، م. (۱۴۰۰). کاربرد کیفیت فازی دوزنقه‌ای در صنعت خودروسازی، سیستم‌های فازی و کاربردها، ۲۱-۴۲، (۲)۴.
- [۲] پرچمی، ع. (۱۳۹۷). نمودارهای کنترل شوهارت براساس کیفیت فازی، سیستم‌های فازی و کاربردها، ۵۵-۷۲، (۱)۱.
- [۳] قادری، ف.، پرچمی، ع.، ایرانمنش، ح.، امیرزاده، و. (۱۴۰۴). نمودارهای کنترل کیفیت فازی  $\bar{X}$  و  $R$ ، سیستم‌های فازی و کاربردها، ۳۹-۵۹، (۱)۸.
- [۴] قادری، ف. (۱۴۰۳). نمودارهای کنترل  $\bar{X}$  و  $R$  مبتنی بر کیفیت فازی، پایان‌نامه کارشناسی ارشد آمار ریاضی، دانشکده ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه شهید باهنر کرمان.

- [5] Amirzadeh, V., Mashinchi, M., Parchami, A. (2009). Construction of p-charts using degree of non-conformity. *Information Sciences*, 179(1-2), 150-160.
- [6] Amirzadeh, V., Mashinchi, M., Yaghoobi, M. A. (2008). Construction of control charts using fuzzy multinomial quality, *Journal of Mathematics and Statistics*, 4(1), 26-31.
- [7] Azzalini, A. (1985). A class of distributions which includes the normal ones, *Scand. J. Statist*, 12 , 171-178.
- [8] Chen, Y. C. (2017). A tutorial on kernel density estimation and recent advances, *Biostatistics Epidemiology*, 1, 161-187.
- [9] Ghaderi, F., Parchami, A., Amirzadeh, V., Iranmanesh, H. (2025). Construction of  $\bar{X} - R$  control charts using beta distribution for triangular fuzzy quality, *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, 22(1), 49-69.
- [10] Iranmanesh, H., Parchami, A., Sadeghpour Gildeh, B. (2022). Statistical testing quality and its Monte Carlo simulation based on fuzzy specification limits, *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, 19(3), 1-17.
- [11] Montgomery, D. C. (2020). *Introduction to Statistical Quality Control*, John Wiley & Sons.
- [12] Moss, J., Tveten, M. (2019). kdensity: An R package for kernel density estimation with parametric starts and asymmetric kernels. *Journal of Open Source Software*, 4(42), 1566.
- [13] Oakland, J. S. (2007). *Statistical Process Control*, (6th ed.). Amsterdam; London: Elsevier Butterworth-Heinemann.
- [14] Parchami, A., Iranmanesh, H., Sadeghpour Gildeh, B. (2022). Monte Carlo statistical test for fuzzy quality. *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, 19(1), 115-124.
- [15] Parchami, A., Amirzadeh, V., Iranmanesh, H., Ghaderi, F. (2024). Percentile-based  $\bar{X}$  and  $R$  control charts for triangular fuzzy quality, *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, 21(3), 91-101.
- [16] Parchami, A., Iranmanesh, H., Sadeghpour Gildeh, B. (2021). Simulation testing of fuzzy quality with a case study in pipe manufacturing industries, *International Conference on Intelligent and Fuzzy Systems*, Istanbul, Turkey, 630-635.
- [17] Parchami, A., Sadeghpour, B., Mashinchi, M. (2016). Why fuzzy quality?, *International Journal for Quality Research*, 10(3), 457-470.
- [18] Scrucca, L. (2004). qcc: an R package for quality control charting and statistical process control, *R News*, 4(1), 11-17.
- [19] Yongting, C. (1996). Fuzzy quality and analysis on fuzzy probability, *Fuzzy Sets and Systems*, 83, 283-290.