

چارچوبی برای تحلیل توان در آزمون فرضیه های فازی با تلفیق آزمون های بازه ای

زهره فرهی، رحیم چینی پرداز و جلال چاچی*

گروه آمار، دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه شهید چمران اهواز، اهواز، ایران

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۵/۰۵/۱۲

تاریخ دریافت: ۱۴۰۵/۰۳/۳۰

نوع مقاله: علمی-پژوهشی

چکیده. این مقاله، آزمون کلاسیک اثر حداقلی (هم ارزی) را به فرضیه های فازی بسط می دهد. در این چارچوب، فرضیه صفر فازی به صورت مبهم و با یک مجموعه فازی نمایش داده می شود. سپس با بهره گیری از α -برش های خود به مجموعه ای از فرضیه های بازه ای دقیق تجزیه می شود. به ازای هر $\alpha \in [0, 1]$ ، یک فاصله اطمینان با سطح $(1 - 2\delta)$ برای پارامتر مورد آزمون ساخته می شود؛ سپس فرضیه صفر بازه ای تجزیه شده، در سطح δ پذیرفته می شود، مشروط بر آنکه فاصله اطمینان متناظر درون بازه α -برش مفروض قرار گیرد. نوآوری اصلی این پژوهش، تعریف و تحلیل صوری تابع توان بازه ای برای روش آزمون یاد شده است. گرچه تحلیل توان پایه و اساس آزمون های فرض کلاسیک به شمار می رود اما تعمیم آن به فرضیه های فازی تاکنون به ندرت مورد بررسی قرار گرفته است. از این رو، تابع توان بازه ای ارائه می شود که احتمال پذیرش صحیح فرضیه صفر فازی را در تمامی سطوح مفروض α کمی می کند. این تابع، ابتدا با محاسبه توان کلاسیک برای هر آزمون بازه ای مربوط به یک α -برش مشخص، و سپس با (ادامه دارد)

تلفیق این نتایج در سراسر بازه $\alpha \in [0, 1]$ حاصل می‌گردد و در نتیجه معیاری یکپارچه از کارایی آزمون برای فرضیه فازی به دست می‌دهد. در مجموع، روش پیشنهادی پلی منسجم میان آزمون هم‌ارزی بازه‌ای استاندارد، استنباط آماری مبتنی بر اطلاعات فازی و تحلیل توان آزمون ایجاد می‌نماید. کارایی روش پیشنهادی در یک مطالعه کاربردی در علوم خاک، با استفاده از داده‌های واقعی منطقه‌ی سیلاخور (لرستان) نشان داده شده است. نتایج این مثال، توانایی روش را در ارائه‌ی تصمیم‌گیری فازی با درجه‌ای از پذیرش/رد، فراتر از تصمیمات دوگانه‌ی کلاسیک، به خوبی تأیید می‌کند.

۱. مقدمه

استنباط آماری به‌طور بنیادین بر آزمون فرضیه متکی است تا مفروضات مربوط به توزیع‌های احتمال حاکم بر متغیرهای تصادفی را ارزیابی کند. روش‌های کلاسیک (غیرفازی)، مدل‌هایی با مشخصات پارامتری دقیق برای توزیع‌های زمینه‌ای را الزامی می‌دانند. با این حال، این مکتب مبتنی بر داده‌های دقیق (غیرفازی)، اغلب در کاربردهای واقعی ناکارآمد است و پژوهشگران را به‌سوی چارچوب‌های تصمیم‌گیری سوق می‌دهد که از واقع‌گرایی عملی دورند. در نتیجه، آزمون فرضیه‌ی کلاسیک نمی‌تواند مفروضاتی با مرزهای تدریجی یا عدم قطعیت‌های معرفت‌شناختی ذاتی در سیستم‌های پیچیده را پوشش دهد. ضرورت در نظر گرفتن عدم اطمینان امکانی در حل مسائل آماری و همچنین کاربردپذیری آمار فازی در حل مسائل عملی اخیراً در ادبیات موضوعی تحقیق مورد توجه واقع شده است. آزمون فرضیه‌ی کلاسیک با فرضیه‌های صفر و جانشین دقیق سروکار دارد که در آن، توان آزمون مفهومی بنیادین برای ارزیابی حساسیت آزمون و طراحی آزمایش‌هاست [۲۴]. با این حال، در بسیاری از موقعیت‌های عملی، خود فرضیه‌ها ذاتاً دوگانه نیستند، بلکه شامل درجه‌بندی یا عدم‌دقت هستند [۲۴]. گزاره‌ای که یک پارامتر «تقریباً صفر» یا «عملاً معادل» با یک معیار است، یک فرضیه‌ی فازی محسوب می‌شود. آزمون چنین فرضیه‌هایی نیازمند روش‌هایی است که بتوانند این ابهام ذاتی را مدیریت کنند. رویکردهای موجود اغلب از آماره‌های آزمون فازی یا p -مقدارهای فازی استفاده می‌کنند و عمدتاً بر قواعد تصمیم‌گیری متمرکزند [۹].

با این حال، به‌ویژه در چارچوب این مقاله، بر ضرورت در نظر گرفتن فرضیه‌های آماری فازی تأکید می‌کنیم. آزمون فرضیه‌ی فازی با بهره‌گیری از نظریه‌ی مجموعه‌های فازی – که زیربنایی ریاضی برای صوری‌سازی گزاره‌های ذهنی و غیردقیق است [۴۴] – این محدودیت‌ها را برطرف می‌کند. این رویکرد، مدل‌سازی واقع‌گرایانه‌ای از فرضیه‌ها را از طریق توابع عضویت امکان‌پذیر می‌سازد. چنین

صورتبندی‌هایی، به‌طور ذاتی از ادغام قضاوت خبرگی، عوامل عدم اطمینان امکانی در رویه‌های آزمون فرضیه پشتیبانی می‌کنند.

این مقاله، روشی مستقیم برای آزمون فرضیه‌های فازی با تطبیق چارچوب آزمون اثر حداقلی [۲۶] ارائه می‌دهد. ایده‌ی اصلی، بهره‌گیری از نمایش α -برش‌های یک مجموعه‌ی فازی برای تبدیل یک آزمون فرضیه‌ی فازی واحد، به پیوستاری از آزمون‌های فرضیه‌ی بازه‌ای دقیق است. این امر، استفاده از رویه‌های فاصله‌ی اطمینان استاندارد را در هر سطح α امکان‌پذیر می‌سازد. اگرچه ایجاد رویه‌ی آزمون ضروری است، اما یک چارچوب آماری جامع باید به عملکرد آزمون نیز بپردازد. این موضوع، به نوآوری اصلی و محوری این پژوهش منجر می‌شود، که عبارت است از: معرفی تابع توان برای آزمون‌های فرضیه‌ی فازی. با این حال، بسط این مفهوم حیاتی به حوزه‌ی فرضیه‌های فازی، در ادبیات تحقیق کمتر مورد توجه قرار گرفته است [۸]. طی سه دهه، پژوهشگران به‌طور سیستماتیک چارچوب‌های تثبیت‌شده‌ای از جمله آزمون‌های نیمن-پیرسون، بیزی و مینی‌ماکس را برای گنجاندن فرضیه‌های فازی بسط داده‌اند.

از آنجا که استنباط آماری به‌طور فزاینده‌ای ادعان دارد که داده‌های دنیای واقعی اغلب حاوی عدم‌دقت ذاتی هستند، آمار فازی تکنیک‌های ضروری برای مدیریت عدم‌قطعیت در هر دو بخش مشخصات فرضیه و مشاهدات تجربی فراهم می‌آورد که بطور ویژه در برخورد با اطلاعات کیفی یا ذهنی بسیار ارزشمند است. تلاش‌های اخیر، مانند مرور سیستماتیک چوخوا و یوهانسن [۹]، رده‌بندی‌ها و منابع کتاب‌شناسی ضروری را برای تجمع رویکردهای رو به گسترش پژوهش در زمینه‌ی آزمون فرضیه‌های فازی ارائه داده‌اند. در این راستا، اگرچه مطالعات متعددی به آزمون فرضیه‌ی فازی نیمن-پیرسون با داده‌های دقیق پرداخته‌اند، سه چارچوب روش‌شناختی غالب برای حل مسائل آزمون تعمیم‌یافته وجود دارد:

رویکرد نخست، آزمون کلاسیک را از طریق اصل گسترش تعمیم می‌دهد و به تصمیمات آزمون فازی منجر می‌شود [۱۷، ۱۸]. چارچوب دوم، فرضیه‌های فازی را برای استخراج راه‌حل‌های منحصربه‌فرد با استفاده از احتمالات فازی دربرمی‌گیرد و تصمیمات صریح ارائه می‌دهد [۲، ۳]. به‌عنوان نمونه، سون و همکاران [۳۶] یک مسئله‌ی تصمیم‌گیری فازی مبتنی بر معیار نیمن-پیرسون تعمیم‌یافته ارائه دادند. سعاد [۳۵] به آزمون فرضیه‌ی فازی با داده‌های ترکیبی پرداخت. طاهری و عارفی [۴۰] آماره‌های آزمون فازی را از طریق تبدیل برش‌های α فواصل اطمینان توسعه دادند. هرینویس [۲۰، ۲۱] مروری جامع بر تفاسیر امکان‌شناختی آزمون‌های آماری (که در آن فرضیه‌ها

و/یا داده‌ها فازی هستند) و تصمیمات آماری ارائه داد. هرنیوتس [۲۳] مروری جامع بر ویژگی‌های آماری رویکردهای مختلف برای محاسبه p -مقادیر فازی انجام داد. میلوناس و پاپادوپولوس [۲۸] آزمون‌های فرضیه‌ی فازی را برای داده‌های دقیق با استفاده از برآوردهای فازی غیرمجانبی، مقادیر بحرانی فازی و درجه‌ای از رد یا پذیرش پیشنهاد کردند. تاویسایا و همکاران [۴۱] روش فازی را برای رویه‌ی آزمون فرضیه‌های چندگانه به‌کار بردند. پارواتی و سوفیا [۳۳] به آزمون فرضیه‌ی ناپارامتری در نظریه‌ی مجموعه‌های نرم پرداختند. الشریف و همکاران [۱۲] چارچوب آزمون فرضیه‌ی فازی را معرفی کردند که تصمیم‌گیری در شرایط عدم قطعیت را با ترکیب نمایش‌های داده‌ی دقیق و فازی بهبود می‌بخشد. طاهری و بهبودیان [۳۷] لم نیمن-پیرسون را برای آزمون فرضیه‌های فازی پیشنهاد کردند. ترابی و همکاران [۴۲] لم نیمن-پیرسون را برای آزمون فرضیه‌های فازی با داده‌های مبهم ارائه دادند. حالت فرضیه‌ی صفر فازی توسط پرچمی و همکاران [۲۹] برای آزمون با داده‌های دقیق و در [۳۰] برای هر دو حالت فرضیه‌ها و داده‌های فازی در نظر گرفته شد. پرچمی [۳۲] بسته‌های «R» را برای آزمون فرضیه در محیط‌های فازی با استفاده از p -مقدار فازی در تصمیم‌گیری معرفی کرد. چاچی و همکاران [۷] آزمون فرضیه‌های آماری را بر اساس فواصل اطمینان فازی پیشنهاد کردند. حسامیان و چاچی [۱۵] رویکرد p -مقدار را برای آزمون علامت فازی در کمیت‌های فازی ارائه دادند. حسامیان و چاچی [۱۶] آزمون فازی کولموگروف-اسمیرف دو نمونه‌ای را برای متغیرهای تصادفی فازی پیشنهاد کردند. چاچی و طاهری [۸] آزمون آماری بهینه‌ای مبتنی بر متغیرهای تصادفی فازی در محیط فازی ارائه دادند. عارفی [۱] با استفاده از فاصله‌ی علامت‌دار جدید، آزمونی برای میانگین توزیع نرمال ارائه کرد. یوسفی و همکاران [۴۳] رویکردی جدید برای آزمون فرضیه‌های فازی مبتنی بر آماره‌ی نسبت درست‌نمایی بررسی کردند. هرنیوتس [۲۲] از مفهوم آزمون فرضیه‌های بازه‌ای معرفی‌شده توسط لهن و رومانو [۲۵] استفاده کرده و توزیع‌های احتمالی مرتبط با p -مقادیر فازی را در نظر گرفت. برکاچی و لوران [۵] به آزمون فرضیه‌ها با روش‌های فازی پرداخته و مقایسه‌ای با رویکرد کلاسیک ارائه دادند.

تعمیم‌های بیزی و مینی‌ماکس، سومین چارچوب در این زمینه است که انعکاسی از این دو م محسوب می‌شود. در این راستا، دلگادو و همکاران [۱۱] فرضیه‌های صفر فازی را با استفاده از استنباط بیزی به خانواده‌هایی از فرضیه‌های دقیق α -برش تبدیل کردند. طاهری و بهبودیان [۳۸] رویکردی بیزی برای آزمون فرضیه‌های فازی ارائه دادند. پرچمی و همکاران [۳۱] آزمون مینی‌ماکس را برای فرضیه‌های فازی در نظر گرفتند. ذوالفقاری و همکاران [۴۶] به سازگاری عددی معیار بیزی

و p -مقدار در فرضیه‌های بازه‌ای پرداختند. برای مطالعه بیشتر در زمینه آزمون فرضیه در محیط فازی به مقالات مروی که در این زمینه وجود دارند، مراجعه کنید [۹، ۱۴، ۳۹].

اگرچه ادبیات موجود، چارچوب‌های مستحکمی برای آزمون فرضیه‌ی فازی فراهم می‌کند، این مقاله رویکردی نوین و ریاضیاتی دقیق ارائه می‌دهد که به‌طور خاص به چالش آزمون فرضیه‌های فازی با داده‌های دقیق می‌پردازد. روش اصلی توسعه‌ی یک تابع توان بازه‌ای تعمیم‌یافته است که از طریق تجزیه‌ی سیستماتیک α -برش‌های از فرضیه‌های بازه‌ای ساخته شده، که به‌طور بنیادین از چارچوب تعیین‌شده توسط لهن و رومانو [۲۵] استفاده می‌کند. با معرفی تابع آزمون فازی که درجه‌ای از پذیرش را برای فرضیه‌ی صفر به‌دست می‌دهد، نشان داده می‌شود و فراتر از تصمیمات دوگانه (رد و یا پذیرش)، تفسیری منعطف ارائه می‌کند. کاربردپذیری و انعطاف‌پذیری این رویکرد با اعمال آن به آزمون فرضیه‌های فازی برای پارامترهای مهم، بررسی می‌شود. بدین منظور، این مقاله آزمون فرضیه‌ی فازی را با داده‌های دقیق، با تأکید بر تابع توان بازه‌ای و فرضیه‌های دارای عناصر فازی مفروض، معرفی می‌کند. این روش، آزمون‌های کلاسیک را برای مدیریت مرزهای تدریجی و عدم قطعیت‌ها با مدل‌سازی فرضیه‌ها به‌صورت مجموعه‌های فازی با توابع عضویت، توسعه می‌دهد. در این رویکرد از α -برش‌های برای اتصال به چارچوب‌های آزمون بازه‌ای، مانند رویکرد لهن و رومانو، استفاده می‌کند [۴، ۲۵].

ساختار مقاله به‌صورت زیر تنظیم شده است. بخش ۲ به ارائه مفاهیمی از مجموعه‌های فازی می‌پردازد. بخش ۳ به معرفی تابع آزمون فازی و تابع توان بازه‌ای می‌پردازد. در بخش ۴، کاربردپذیری در داده‌های دقیق و فرضیه‌ی فازی ارائه خواهد شد. بخش ۵ به نتیجه‌گیری می‌پردازد.

۲. مفاهیم مقدماتی

۱.۲. نظریه‌ی مجموعه‌های فازی. یک مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ بر روی مجموعه‌ی مرجع $\mathbb{X}$ با تابع عضویت $[\cdot, 1] \rightarrow \mathbb{X} : \tilde{A}(x)$ معرفی می‌شود [۴۴]. در این مقاله، $\mathbb{X} = \mathbb{R}$ (خط حقیقی) در نظر گرفته می‌شود. α -برش یک مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ به صورت $\tilde{A}_\alpha = \{x \in \mathbb{R} : \tilde{A}(x) \geq \alpha\}$ ، برای $\alpha \in (0, 1]$ تعریف می‌شود. برای $\alpha = 0$ ، A_α را به‌عنوان بستار مجموعه‌ی $\{x \in \mathbb{R} : \tilde{A}(x) > 0\}$ تعریف می‌شود. یک مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ از $\mathbb{R}$ را عدد فازی می‌نامیم اگر A_α برای هر $\alpha \in [0, 1]$ ، یک بازه‌ی فشرده‌ی ناتهی باشد. چنین بازه‌ای با $\tilde{A}_\alpha = [A_\alpha^l, A_\alpha^r]$ نمایش داده می‌شود. نوع خاصی از اعداد فازی، عدد فازی LR نام دارد که با $\tilde{N} = (n, l, r)_{LR}$ نشان داده

می‌شود، و دارای تابع عضویت و α -برش زیر است [۴۵]

$$\tilde{N}(x) = \begin{cases} L\left(\frac{n-x}{l}\right) & \text{اگر } x \leq n, \\ R\left(\frac{x-n}{r}\right) & \text{اگر } x > n. \end{cases}$$

$$N_\alpha = [n - L^{-1}(\alpha)l, n + R^{-1}(\alpha)r], \quad \alpha \in [0, 1].$$

که در آن $n \in \mathbb{R}$ مقدار مرکزی، $l, r \in \mathbb{R}^+$ ، مقادیر پهناهای چپ و راست، $L, R : \mathbb{R}^+ \rightarrow [0, 1]$ توابع شکل چپ و راست نزولی هستند که $L(0) = R(0) = 1$ در عمل و در کاربرد، از اشکال ساده برای توابع L و R استفاده می‌شود، مانند مثلی، که در آن $L = R$ و $L(t) = \max\{1 - t, 0\}$ است، یا نرمال که در آن $L = R$ و $L(t) = \exp\{-t^2\}$

۲.۲. نمایش فازی γ برای پارامتر دقیق θ . خانواده‌ای از نمایش‌های فازی از مقدار دقیق θ ، به نام نمایش فازی γ از θ ، توسط [۱۳] ارائه شده است. در این نمایش، داده‌های صریح را با نگاشت $\gamma : \Theta \Rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R})$ به یک مجموعه فازی تبدیل می‌شود، به عبارتی هر مقدار θ به یک عدد فازی LR مانند $\tilde{\gamma}_\theta$ نگاشت می‌شود که تابع عضویت و α -برش آن به صورت زیر است [۱۳]

$$\tilde{\gamma}_\theta(t) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{f_L(\theta) - t}{g_L(\theta)}\right)^{h_L(\theta)} & \text{اگر } t \in [f_L(\theta) - g_L(\theta), f_L(\theta)] \\ 1 & \text{اگر } t \in [f_L(\theta), f_R(\theta)] \\ 1 - \left(\frac{t - f_R(\theta)}{g_R(\theta)}\right)^{h_R(\theta)} & \text{اگر } t \in [f_R(\theta), f_R(\theta) + g_R(\theta)] \\ 0 & \text{o.w.,} \end{cases}$$

$$(\tilde{\gamma}_\theta)_\alpha = \left[f_L(\theta) - g_L(\theta)(1 - \alpha)^{1/h_L(\theta)}, f_R(\theta) + g_R(\theta)(1 - \alpha)^{1/h_R(\theta)} \right],$$

که در آن، برای هر $\theta \in \Theta$ داریم $f_L(\theta) \leq f_R(\theta)$ توابع بول-اندازه‌پذیر هستند، و

$$f_L : \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}, f_R : \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R},$$

$$g_L : \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}^+, g_R : \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}^+,$$

$$h_L : \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}^+, h_R : \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}^+.$$

یک انتخاب از خانواده‌ی عملگرهای فازی γ ، مربوط به حالتی است که $f_L(\theta) = f_R(\theta) = \theta$ برای همه‌ی θ ، $g_L(\theta) = g_R(\theta) = 1$ و

$$h_L(x) = \begin{cases} \frac{1}{1 + \frac{\theta - \theta_0}{a}} & \text{اگر } \theta \geq \theta_0 \\ 1 - \frac{\theta - \theta_0}{a} & \text{اگر } \theta < \theta_0 \end{cases}$$

$$h_R(\theta) = \frac{1}{h_L(x)} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

به‌ازای $\theta_0 \in \Theta$ و $a \in \mathbb{R}^+$.

۳. چارچوب آزمون فرضیه‌های فازی

در این بخش، روشی منسجم و عملی برای آزمون فرضیه‌های آماری فازی ارائه می‌دهیم که با تجزیه‌ی آنها از طریق α -برش‌ها و اعمال منطق آزمون اثر حداقلی با استفاده از فواصل اطمینان در هر سطح، انجام می‌شود [۳۴]. این رویکرد، از ابزارهای استنباط بازه‌ای موجود بهره می‌گیرد و در عین حال، یک خروجی فازی ارائه می‌دهد که با درجه‌ی امکان رد یا پذیرش فرضیه‌ی صفر را نشان می‌دهد [۱۰].

۱.۳. ساختار فرضیه‌های فازی. در اینجا، بنیانی ریاضیاتی منسجمی برای فضاهای پارامتری فازی فرضیه‌های صفر و مقابل معرفی و مرور می‌کنیم.

تعریف ۱.۳ ([۷، ۸]). فرض کنید $\tilde{\Theta} = \mathcal{F}(\Theta)$ خانواده‌ای از اعداد فازی روی Θ باشد و $\tilde{\theta}_0 \in \mathcal{F}(\Theta)$ یک عدد فازی معلوم باشد. آنگاه

(۱) هر فرضیه به‌صورت " $H_0: \tilde{\theta} = \tilde{\theta}_0$ " یک فرضیه‌ی ساده نامیده می‌شود.

(۲) هر فرضیه به‌صورت " $H_1: \tilde{\theta} \neq \tilde{\theta}_0$ " یک فرضیه‌ی دوطرفه نامیده می‌شود.

تعریف ۲.۳. آزمون فرضیه‌های

$$H_0: \tilde{\theta} = \tilde{\theta}_0 \quad \text{در برابر} \quad H_1: \tilde{\theta} \neq \tilde{\theta}_0.$$

را در نظر بگیرید. این فرضیه معادل است با

$$H_0: \tilde{\theta} = \tilde{\theta}_0 \quad \text{در برابر} \quad H_1: \tilde{\theta} \in \tilde{\Theta}_1$$

چارچوبی برای تحلیل توان در آزمون فرضیه‌های فازی با تلفیق آزمون‌های بازه‌ای _____ ۱۲۲

که در آن فضای پارامتری فازی فرضیه‌ی H_1 ، با نماد $\tilde{\Theta}_1$ ، معادل مجموعه‌ی زیر از تمام اعداد فازی روی $\tilde{\Theta}$ است:

$$\tilde{\Theta}_1 = \bigcup_{\alpha \in (0, 1]} \tilde{\Theta}_\alpha$$

که به‌ازای هر $\alpha \in (0, 1]$

$$(۱۰۳) \quad \tilde{\Theta}_\alpha = \left\{ \tilde{\theta} \in \tilde{\Theta} \mid [\theta_{\alpha}^l, \theta_{\alpha}^r] \cap [\theta_{\alpha}^l, \theta_{\alpha}^r] = \emptyset \right\}.$$

۲.۳. روش رد دو آزمون یک‌طرفه برای فرضیه‌های فازی: کاربرد آزمون اثر حداقلی. اکنون، آزمون فرضیه‌های بازه‌ای و نیز آزمون اثر حداقلی را بر اساس رویکرد شناخته‌شده‌ی برگر و دلامپدی [۴] و هاجز و لهمن [۱۹] ارائه می‌دهیم. این رویکرد از چارچوب برگر و دلامپدی [۴] و لهمن و رومانو [۲۵] برای آزمون فرضیه‌های بازه‌ای بهره گرفته و الگوی آن را به حالاتی از قبیل داده‌های دقیق، پارامتر(های) فازی و فرضیه‌ی فازی تعمیم می‌دهد.

در این چارچوب، کلاس فرضیه‌های بازه‌ای سطح α که از تبدیل مستقیم فرضیه‌ی فازی در تعریف ۲.۳ به‌دست می‌آید، با فرضیه‌ی بازه‌ای تعریف‌شده توسط برگر و دلامپدی [۴] (نیز نگاه کنید به لهمن و رومانو [۲۵] و ذوالفقاری و همکاران [۴۶]) مطابقت دارد. در چنین آزمون فرضیه‌ی بازه‌ای، برای هر $\alpha \in (0, 1]$ ، فرضیه‌های صفر و مقابل را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$(۲۰۳) \quad H_{\alpha} : \theta \in [\theta_{\alpha}^l, \theta_{\alpha}^r] \quad \text{در برابر} \quad H_{1\alpha} : \theta \notin [\theta_{\alpha}^l, \theta_{\alpha}^r].$$

آزمون اثر حداقلی که ابتدا توسط هاجز و لمن [۱۹] ارائه شد، فرضیه‌های صفر و مقابل را به‌صورت (۲.۳) دارد:

$$H_0 : \theta_{\alpha}^l \leq \theta \leq \theta_{\alpha}^r; \quad H_1 : (\theta < \theta_{\alpha}^l) \cup (\theta_{\alpha}^r < \theta),$$

هاجز و لمن [۱۹] انجام آزمون‌های یک‌طرفه‌ی جداگانه برای دو فرضیه‌ی یک‌طرفه را پیشنهاد می‌کنند: یعنی

$$\begin{aligned} & \bullet \quad H'_{1\alpha} : \theta \leq \theta_{\alpha}^r \quad \text{در برابر} \quad H'_{0\alpha} : \theta > \theta_{\alpha}^r, \text{ و} \\ & \bullet \quad H''_{1\alpha} : \theta \geq \theta_{\alpha}^l \quad \text{در برابر} \quad H''_{0\alpha} : \theta < \theta_{\alpha}^l. \end{aligned}$$

در اینجا فرضیه H_0 داده‌شده در (۲.۳) رد می‌شود اگر حداقل یکی از این آزمون‌های جداگانه در بالا رد شود. اندازه‌ی این آزمون ترکیبی، جمع اندازه‌های جداگانه‌ی آنهاست. توان آزمون باید به

توان آزمون‌های یک‌طرفه منفرد مرتبط با آن وابسته باشد. تصمیم‌گیری درباره فرض صفر (۲.۳) همچنین می‌تواند با استفاده از فاصله‌ی اطمینان انجام شود: فرضیه‌ی صفر اثر حداقلی داده‌شده در (۲.۳) در سطح معنی‌داری δ رد نمی‌شود، اگر فاصله‌ی اطمینان دوطرفه با سطح $(1 - 2\delta)$ برای θ به‌طور کامل درون بازه‌ی $[\theta_{\alpha}^l, \theta_{\alpha}^r]$ قرار گیرد [۱۹].

آزمون کلاسیک اثر حداقلی برای فرضیه‌ی صفر بازه‌ای دقیق $\theta \in [\theta_l, \theta_r] : H_0$ از یک فاصله‌ی اطمینان دوطرفه با سطح $(1 - 2\alpha^*)$ ، یعنی $CI(\alpha^*)$ ، برای سطح معنی‌داری انتخاب‌شده‌ی α^* استفاده می‌کند. قاعده‌ی تصمیم‌گیری به‌صورت زیر است: پذیرش H_0 اگر $CI(\alpha^*) \subseteq [\theta_l, \theta_r]$.

ما این منطق را با اعمال آن به هر آزمون فرضیه‌ی بازه‌ای مبتنی بر α -برش از (۲.۳)، به حالت فازی تعمیم می‌دهیم. فرض کنید $\tilde{H}_0$ یک فرضیه‌ی صفر فازی با α -برش‌های به‌صورت $[L(\alpha), U(\alpha)]$ باشد. همچنین فرض کنید X یک نمونه‌ی تصادفی از توزیعی وابسته به θ باشد.

(۱) انتخاب مقدار ثابت δ و تشکیل فاصله‌ی اطمینان: بر اساس نمونه‌ی X ، یک فاصله‌ی اطمینان با سطح $(1 - 2\delta)$ برای θ ، که با $[\hat{L}_\delta, \hat{U}_\delta] = CI(1 - 2\delta)$ نشان داده می‌شود، محاسبه کنید.

(۲) انتخاب مقدار α : سطح فرض $\alpha \in [0, 1]$ را انتخاب کنید و α -برش فرضیه‌ی فازی را تشکیل دهید.

(۳) اعمال قاعده‌ی شمول بازه‌ای: برای α اختیار شده، فرضیه‌ی صفر بازه‌ای دقیق (۲.۳) را آزمون کنید. بر اساس اصل آزمون اثر حداقلی:

$$H_{\alpha} = \begin{cases} \text{«پذیرش»} & \text{اگر } [\hat{L}_\delta, \hat{U}_\delta] \subseteq [\theta_{\alpha}^l, \theta_{\alpha}^r] \\ \text{«رد»} & \text{در غیر این صورت.} \end{cases}$$

(۴) ذخیره‌ی نتیجه: مجموعه‌ی پذیرش A را با تابع نشانگر $\phi_A(\alpha)$ به‌صورت زیر تعریف کنید:

$$\phi_A(\alpha) = \mathbb{I}([\hat{L}_\alpha, \hat{U}_\alpha] \subseteq [\theta_{\alpha}^l, \theta_{\alpha}^r]).$$

(۵) تکرار روی سطوح α : مراحل ۲ تا ۴ را برای یک مجموعه‌ی به‌اندازه‌ی کافی مترام از مقادیر α در $[0, 1]$ تکرار کنید.

۳.۳. تابع آزمون پذیرش فازی. مجموعه‌ی نتایج $\{(\alpha, \phi_A(\alpha)) : \alpha \in [0, 1]\}$ می‌تواند برای تعریف تابع آزمون پذیرش فازی $\tilde{\varphi}(\cdot)$ استفاده شود. به‌طور دقیق‌تر، A مجموعه‌ای از سطوح فرض α است که فرضیه‌ی صفر در آنها پذیرفته می‌شود. تکیه‌گاه A ، یعنی: $\{\alpha \in [0, 1] : \phi_A(\alpha) = 1\}$ ، نشان‌دهنده‌ی تمام سطوح فرضی است که داده‌ها با فرضیه‌ی صفر فازی در تناقض نیستند. سوپریم این مجموعه، $\alpha_{\max}^* = \sup\{\alpha : \phi(\alpha) = 1\}$ ، را می‌توان به‌عنوان بیشترین سطح فرضی که در آن H_0 قابل پذیرش است، تفسیر کرد. این مقدار، به‌عنوان آماره‌ای خلاصه‌کننده‌ی صریح برای نتیجه‌ی آزمون عمل می‌کند.

رویکرد ما، فرضیه را فازی در نظر می‌گیرد، اما از فواصل اطمینان استاندارد برای پارامتر صریح θ استفاده می‌کند. این امر، کاربرد را ساده‌تر کرده و به‌طور مستقیم، رویه‌ی آزمون صریح به‌خوبی شناخته‌شده را تعمیم می‌دهد.

روش پیشنهادی، تفسیری روشن ارائه می‌دهد. تابع آزمون پذیرش فازی $\tilde{\varphi}(\cdot)$ این ایده را کمی می‌کند: «ما می‌توانیم فرضیه‌ی صفر فازی را تا سطح فرض $\alpha_{\max}^*$ بپذیریم، اما نه فراتر از آن.» این موضوع، نسبت به تصمیم دوگانه‌ی رد/عدم رد، اطلاعات بیشتری را ارائه می‌دهد.

تعریف ۳.۳ ([۷، ۸]). تابع با مقدار فازی

$$\tilde{\varphi} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{F} \left(\left\{ H_0(\tilde{\theta}_0), H_0(\tilde{\theta}_0) \text{ پذیرش} \right\} \right)$$

یک تابع آزمون فازی نامیده می‌شود.

تعریف ۴.۳. فرض کنید $X_1, \dots, X_n$ نمونه‌ای تصادفی از $f_{\tilde{\theta}}(\cdot)$ باشند، برای آزمون $H_0 : \tilde{\theta} = \tilde{\theta}_0$ در برابر $H_1 : \tilde{\theta} \neq \tilde{\theta}_0$ تابع آزمون فازی $\tilde{\varphi}(\mathbf{X}; \tilde{\theta}_0)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tilde{\varphi}(\mathbf{X}; \tilde{\theta}_0) = \left\{ \frac{\alpha_{\max}^*}{H_0(\tilde{\theta}_0) \text{ پذیرش}}, \frac{1 - \alpha_{\max}^*}{H_0(\tilde{\theta}_0) \text{ رد}} \right\}.$$

توجه داشته باشید که تابع آزمون فازی $\tilde{\varphi}(\mathbf{X}; \tilde{\theta}_0)$ با یک مجموعه‌ی فازی مشخص می‌شود که فرضیه‌ی صفر را با درجه‌ی $\alpha_{\max}^*$ می‌پذیرد و آن را با درجه‌ی $1 - \alpha_{\max}^*$ رد می‌کند.

ملاحظه ۵.۳. در تابع آزمون فازی $\tilde{\varphi}(\mathbf{X}; \tilde{\theta}_0)$ ، مقادیر $\alpha_{\max}^*$ و $1 - \alpha_{\max}^*$ به‌ترتیب، با درجه‌های پذیرش فرضیه‌ی صفر و فرضیه‌ی مقابل مطابقت دارند که می‌توانند به‌عنوان درجه‌های امکان برای پذیرش یا رد فرضیه‌ی صفر تفسیر شوند. چنین تابع آزمون فازی، برخلاف آزمون دقیق کلاسیک،

به تصمیم دوگانه (پذیرش یا رد فرضیه‌ی صفر) منجر نمی‌شود، بلکه به تصمیمی فازی ختم می‌شود. بنابراین، در شرایطی که $\alpha_{\max}^* \neq 0$ است و نه ۱، کاربر باید تصمیم بگیرد که آیا فرضیه‌ی داده‌شده را بپذیرد یا رد کند، اگرچه مقدار $\alpha_{\max}^*$ از تصمیم پشتیبانی می‌کند؛ یعنی برای مقادیر بزرگتر $\alpha_{\max}^*$ ، امکان بیشتری برای پذیرش فرضیه‌ی صفر وجود دارد [۷، ۸].

ملاحظه ۶.۳. اگر فرضیه‌ی فازی $\tilde{H}_0$ به یک بازه‌ی صریح $[\theta_l, \theta_u]$ تنزل یابد، آنگاه برش‌های α آن برای تمام $\alpha > 0$ یکسان خواهند بود. رویه‌ی ما، برای هر $\alpha^* > 0$ ثابت، دقیقاً به آزمون اثر حداقلی استاندارد برای آن بازه‌ی دقیق، تقلیل می‌یابد [۱۹، ۲۵].

۴.۳. ساخت تابع توان بازه‌ای از طریق تجزیه و تلفیق آزمون فرضیه‌های بازه‌ای. بر اساس چارچوب کلاسیک برای آزمون‌های فرضیه‌ی اثر حداقلی (بازه‌ای) [۱۹]، روش نوینی برای ساخت تابع توان بازه‌ای-مقدار به صورت زیر معرفی می‌کنیم.

(۱) برای هر یک از دو آزمون یک‌طرفه‌ی مرتبط با یک α -برش معین (۲.۳)، توابع توان کلاسیک، $\pi'_\alpha(\theta)$ و $\pi''_\alpha(\theta)$ ، به‌ترتیب برای آزمون $H'_\alpha: \theta \leq \theta_\alpha^r$ در برابر $H''_\alpha: \theta \geq \theta_\alpha^l$ در برابر $H''_\alpha: \theta < \theta_\alpha^l$ محاسبه می‌شوند.

(۲) توابع توان $\pi'_\alpha(\theta)$ و $\pi''_\alpha(\theta)$ ترکیب می‌شوند تا یک تابع توان بازه‌ای-مقدار برای هر $\theta \in \text{supp}(\tilde{\theta}) = \{\theta | \tilde{\theta}(\theta) > 0\}$ به‌صورت زیر تشکیل دهند:

$$\Pi_{\tilde{\theta}}(\theta) = \begin{cases} [\inf_{\alpha \in \mathcal{A}} \pi'_\alpha(\theta), \sup_{\alpha \in \mathcal{A}} \pi'_\alpha(\theta)] & \text{اگر } \mathcal{A} = \{\alpha | \theta_\alpha^r \leq \theta\} \neq \emptyset \\ [\inf_{\alpha \in \mathcal{A}} \pi''_\alpha(\theta), \sup_{\alpha \in \mathcal{A}} \pi''_\alpha(\theta)] & \text{اگر } \mathcal{A} = \{\alpha | \theta \leq \theta_\alpha^l\} \neq \emptyset. \end{cases}$$

(۳) در نهایت، برای هر مقدار پارامتر فازی $\tilde{\theta} \in \tilde{\Theta}$ ، $\Pi_{\tilde{\theta}}$ یک تابع با مقدار بازه‌ای روی $\text{supp}(\tilde{\theta})$ است که مقادیر هدف آن دقیقاً بازه‌های بین $[0, 1]$ هستند.

۴. مثال عددی: کاربرد در علوم خاک

آزمون فرضیه‌ها گاهی می‌تواند از بافت فازی داده‌ها یا از عدم‌دقت در مشخص‌کردن فرضیه‌ها تاثیر بپذیرند. بنابراین، رویکردی فازی برای انعکاس تصمیم‌گیری صحیح در مورد این فرضیه‌ها لازم است. بر اساس رویکرد پیشنهادی، قصد داریم نحوه‌ی اجرای یک آزمون فازی را نشان دهیم. همان‌طور که در این مقاله بررسی کردیم، در نظر داریم که به آزمون فرضیه‌های فازی با داده‌های دقیق

بپردازیم. نتایج عددی خود را با توضیح چگونگی فازی‌سازی تصمیم آزمون توسط γ -نمایش فازی [۱۳] از پارامتر مورد آزمون، شروع می‌کنیم تا تصمیم‌گیری در محیط فازی امکان‌پذیر شود. رویه‌ی محاسبات به صورت دقیق و با نتایج عددی مفصل در مثال زیر ارائه شده است.

مثال ۱۰۴. یکی از مسائل کلاسیک در علوم خاک، اندازه‌گیری برخی از ویژگی‌های فیزیکی، شیمیایی و/یا زیستی خاک است [۲۷]. این مسئله ناشی از دشواری و زمان‌بر بودن اندازه‌گیری‌هایی است که مشاهدات غیردقیقی را به دنبال دارند. در مطالعه‌ی سامانه‌های طبیعی مانند سامانه‌های خاک، که با مشاهدات غیردقیق مواجه می‌شویم، باید تلاش کنیم تا رفتار چنین سامانه‌هایی را واقع‌بینانه‌تر تحلیل کنیم. به منظور تحلیل برخی از ویژگی‌های خاک، به‌ویژه SP (که نشان‌دهنده‌ی اشباع شدن خاک از آب است)، مطالعه‌ی در بخشی از دشت سیلاخور واقع در استان لرستان (غرب ایران)، بین شهرهای بروجرد و دورود، انجام شده است. برای مطالعه کامل درباره مجموعه‌ی داده‌ها به محمدی و طاهری [۲۷] مراجعه کنید. می‌توان فرض کرد که بر اساس مطالعه‌ی مقدماتی، چنین داده‌هایی از توزیع نرمال با انحراف معیار $\sigma = 9$ پیروی می‌کنند. با این حال، به دلیل برخی دشواری‌ها در اندازه‌گیری‌ها، از صریح بودن مشاهدات و/یا پارامترها مطمئن نیستیم. بنابراین، مناسب است که پارامتر مورد نظر را به عنوان یک عنصر با مقدار فازی در نظر بگیریم. برای تبدیل پارامتر مورد نظر به یک مقدار فازی، از γ -نمایش فازی، که در بخش ۲ معرفی شد، استفاده کنیم. بنابراین، تابع عضویت و مجموعه‌ی سطح α از $\tilde{\gamma}_{\theta_*}$ به صورت زیر داده می‌شوند:

$$\tilde{\gamma}_{\theta_*}(t) = \begin{cases} 1 - (\theta_* - t)^{h_L(\theta_*)} & \text{اگر } t \in [\theta_* - 1, \theta_*] \\ 1 - (t - \theta_*)^{h_R(\theta_*)} & \text{اگر } t \in [\theta_*, \theta_* + 1] \\ 0 & \text{در غیر این صورت،} \end{cases}$$

$$(\tilde{\gamma}_{\theta_*})_\alpha = \left[\theta_* - (1 - \alpha)^{1/h_L(\theta_*)}, \theta_* + (1 - \alpha)^{1/h_R(\theta_*)} \right], \quad \forall \alpha \in (0, 1].$$

که در آن

$$h_L(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{1 + \frac{\theta - \theta_*}{a}} & \text{اگر } \theta \geq \theta_* \\ 1 - \frac{\theta - \theta_*}{a} & \text{اگر } \theta < \theta_* \end{cases}$$

$$h_R(\theta) = \frac{1}{h_L(\theta)} \quad \forall \theta \in \mathbb{R}$$

به ازای $\theta_* \in \mathbb{R}$ و $a \in \mathbb{R}^+$ [۱۳].

ملاحظه ۲.۴. توجه داشته باشید که چنین نمایشی به‌ویژه برای ثبت عدم قطعیت اندازه‌گیری ذاتی در محیط فازی مناسب است. بنابراین، می‌توان روشن کرد که چگونه پارامترهای شکل انعطاف‌پذیر (h_L و h_R) امکان سفارشی‌سازی بر اساس دانش حوزه در مورد جهت و بزرگی عدم قطعیت را فراهم می‌کنند. در ادامه، $a = 1$ را در محاسبات در نظر می‌گیریم.

اکنون، مقدار $\tilde{\gamma}_\theta : \Theta \rightarrow \mathcal{F}(\Theta)$ ، γ -نمایش فازی از θ است. با γ -نمایش فازی از چنین فرضیه‌هایی، به آزمون فرضیه‌های زیر می‌پردازیم

$$H_0 : \tilde{\theta} = \tilde{\gamma}_{44/25} \text{ در برابر } H_1 : \tilde{\theta} \neq \tilde{\gamma}_{44/25}$$

که در آن $\tilde{\gamma}_{44/25}$ ادراک فازی از $\theta_0 = 44/25$ است. اکنون، مطابق رویکرد بیان شده در بخش ۳، فرضیه‌های زیر را برای هر $\alpha \in [0, 1]$ آزمون می‌کنیم

$$\begin{cases} H_{0\alpha} : \theta_{0\alpha} \in [44/25 - (1 - \alpha)^{1/h_L(44/25)}, 44/25 + (1 - \alpha)^{1/h_R(44/25)}] \\ H_{1\alpha} : \theta_{0\alpha} \notin [44/25 - (1 - \alpha)^{1/h_L(44/25)}, 44/25 + (1 - \alpha)^{1/h_R(44/25)}]. \end{cases}$$

برای این کار، آزمون‌های یک‌طرفه‌ی جداگانه‌ای به صورت زیر انجام می‌شود

$$\begin{aligned} \text{(i). } & \begin{cases} H'_{0\alpha} : \theta \leq 44/25 + (1 - \alpha)^{1/h_R(44/25)} \\ H'_{1\alpha} : \theta > 44/25 + (1 - \alpha)^{1/h_R(44/25)} \end{cases} \\ \text{(ii). } & \begin{cases} H''_{0\alpha} : \theta \geq 44/25 - (1 - \alpha)^{1/h_L(44/25)} \\ H''_{1\alpha} : \theta < 44/25 - (1 - \alpha)^{1/h_L(44/25)} \end{cases} \end{aligned}$$

از آنجا که $\bar{x} = 46/98$ ، یک فاصله‌ی اطمینان ۹۵٪ برای پارامتر θ به صورت

$$CI(1 - 2 \times 0.025) = [43/95, 50/51]$$

به دست می‌آید. بنابراین

$$\begin{aligned} \phi_A(\alpha) &= \mathbb{I}\left([43/95, 50/51] \subseteq \left[44/25 - (1 - \alpha)^{1/h_L(44/25)}, 44/25 + (1 - \alpha)^{1/h_R(44/25)}\right]\right) \\ &= \begin{cases} 1 & \text{اگر } \alpha \in \emptyset \\ 0 & \text{اگر } \alpha \notin [0, 1] \end{cases}. \end{aligned}$$

در نهایت، تابع آزمون فازی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\tilde{\varphi}(\mathbf{x}; \tilde{\theta}_\circ) = \left\{ \frac{\circ}{H_\circ(\tilde{\theta}_\circ) \text{ پذیرش}}, \frac{۱}{H_\circ(\tilde{\theta}_\circ) \text{ رد}} \right\}.$$

به عبارت دیگر، بر اساس چنین مشاهداتی و در سطح فازی $\tilde{\alpha}$ ، امکان اینکه میانگین واقعی جامعه $\tilde{\gamma}_{\theta_\circ}$ باشد، برابر با صفر است. بنابراین، فرضیه $\tilde{\theta} = \tilde{\gamma}_{\theta_\circ}$: $H_\circ$ در برابر فرضیه $\tilde{\theta} \neq \tilde{\gamma}_{\theta_\circ}$: $H_۱$ با درجه‌ی صفر پذیرفته می‌شود، در حالی که با درجه‌ی ۱ رد می‌شود. (i): آزمون

H'_α در برابر H'_α

تابع آزمون به صورت $\varphi'_\alpha(\mathbf{X}) = \mathbb{I} \left(\frac{\circ}{9} (\bar{X} - ۴۴/۲۵ - (1 - \alpha)^{1/h_R(۴۴/۲۵)}) > ۱۹۶ \right)$ است. چون $\bar{X} = ۴۶/۹۸$ ، بنابراین، $\varphi'_\alpha(\mathbf{x}) = \mathbb{I} \left(\frac{\circ}{9} (۲/۷۳ - (1 - \alpha)^{1/h_R(۴۴/۲۵)}) > ۱۹۶ \right)$ تابع توان $\pi_{\varphi'_\alpha(\mathbf{x})}(\theta)$ به صورت زیر است:

$$\pi_{\varphi'_\alpha(\mathbf{x})}(\theta) = \Phi \left(-۱۹۶ + \frac{\circ}{9} (\theta - ۴۴/۲۵ - (1 - \alpha)^{1/h_R(۴۴/۲۵)}) \right),$$

$$\forall \theta > ۴۴/۲۵ + (1 - \alpha)^{1/h_R(۴۴/۲۵)}, \alpha \in [0, 1].$$

(ii): آزمون H''_α در برابر H''_α

تابع آزمون به صورت $\varphi''_\alpha(\mathbf{X}) = \mathbb{I} \left(\frac{\circ}{9} (\bar{X} - ۴۴/۲۵ + (1 - \alpha)^{1/h_L(۴۴/۲۵)}) < -۱۹۶ \right)$ است. از آنجا که $\bar{X} = ۴۶/۹۸$ داریم

$$\varphi'_\alpha(\mathbf{x}) = \mathbb{I} \left(\frac{\circ}{9} (۲/۷۳ + (1 - \alpha)^{1/h_L(۴۴/۲۵)}) < -۱۹۶ \right)$$

$$\pi_{\varphi''_\alpha(\mathbf{x})}(\theta) = \Phi \left(-۱۹۶ + \frac{\circ}{9} (۴۴/۲۵ - (1 - \alpha)^{1/h_L(۴۴/۲۵)} - \theta) \right),$$

$$\forall \theta > ۴۴/۲۵ - (1 - \alpha)^{1/h_L(۴۴/۲۵)}, \alpha \in [0, 1].$$

در نهایت، تابع توان بازه‌ای در نقطه‌ی فازی $\tilde{\theta}$ قابل‌حصول است. برای مثال، فرض کنید $\tilde{\theta} = T(0.5, 0.43, 0.43)$ ، بنابراین $\Pi_{\tilde{\theta}}(\theta)$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید

$$\begin{aligned} \Pi_{\tilde{\theta}}(\theta) &= \left[\inf_{\alpha \in [0, 1]} \Phi \left(-1.96 + \frac{5}{9} \left(44.25 - (1 - \alpha)^{1/h_L(44.25)} - \theta \right) \right), \right. \\ &\quad \left. \sup_{\alpha \in [0, 1]} \Phi \left(-1.96 + \frac{5}{9} \left(44.25 - (1 - \alpha)^{1/h_L(44.25)} - \theta \right) \right) \right] \\ &= \left[\Phi \left(22.06 - \frac{5}{9} \theta \right), \Phi \left(22.62 - \frac{5}{9} \theta \right) \right], \quad \forall \theta \in \text{supp}(\tilde{\theta}) = (42.5, 43.5). \end{aligned}$$

۵. نتیجه‌گیری و پیشنهادات برای پژوهش‌های آینده

این پژوهش، چارچوبی نوین و منسجم برای آزمون فرضیه‌های آماری فازی ارائه کرده است که پلی معنادار بین روش‌های کلاسیک و نظریه‌ی مجموعه‌های فازی ایجاد می‌کند. اساس رویکرد معرفی شده، در تجزیه‌ی سیستماتیک یک فرضیه‌ی فازی به پیوستاری از فرضیه‌های بازه‌ای دقیق از طریق α -برش‌های آن است. با اعمال منطق تثبیت‌شده‌ی آزمون اثر حداقلی در هر سطح α ، این رویه از تکنیک فاصله‌ی اطمینان برای رسیدن به یک تابع آزمون فازی بهره می‌گیرد. تابع آزمون فازی، خروجی منعطفی در قالب درجه‌های پذیرش و رد ارائه می‌دهد و فراتر از تصمیمات دوگانه‌ی آزمون‌های کلاسیک، تدریجی‌بودن تصمیم مبتنی بر پذیرش یا رد فرضیات را بهتر منعکس می‌کند. نوآوری‌های روش معرفی شده در این پژوهش، دوگانه است. نخست، رویه‌ی آزمون فازی جدیدی را معرفی می‌کند که هم از نظر ریاضیاتی دقیق است و هم به‌صورت عملی قابل‌پیاده‌سازی. این روش، به‌صراحت فرضیه‌های فازی غیرمکمل را از طریق شرط ناهم‌جایی برش‌های α آنها مدیریت می‌کند و سازگاری منطقی را تضمین می‌نماید - جنبه‌ای که اغلب در کارهای پیشین نادیده گرفته شده است. همچنین این پژوهش چارچوبی یکپارچه و قابل‌تعمیم ارائه می‌دهد که آزمون فرضیه‌ی بازه‌ای کلاسیک را به‌عنوان حالت خاصی دربر می‌گیرد. دوم، و شاید مهم‌تر از همه، این مقاله به‌طور صوری تابع توان بازه‌ای-مقدار، را معرفی می‌کند. در حالی‌که توسعه‌ی قواعد تصمیم‌گیری برای فرضیه‌های فازی توجه قابل‌توجهی را به خود جلب کرده است، تحلیل عملکرد یک آزمون از طریق مفهوم توان تعمیم‌یافته تا حد زیادی بررسی‌نشده باقی مانده است. تا جایی که نویسندگان اطلاع دارند، تابع توان فازی جامعی که از طریق تلفیق توابع توان بازه‌ای در سراسر α -برش‌های

چارچوبی برای تحلیل توان در آزمون فرضیه‌های فازی با تلفیق آزمون‌های بازه‌ای _____ ۱۳۰

ساخته شده باشد، تلاشی پیشگامانه محسوب می‌شود و تنها کارهای مقدماتی محدودی، مانند [۸]، به مفاهیم مرتبط اشاره کرده‌اند.

در پایان، تعمیم چارچوب پیشنهادی به آزمون‌های یک‌طرفه، که در این پژوهش صرفاً به آزمون دوطرفه پرداخته شده است، می‌تواند کارایی روش را به‌طور چشمگیری افزایش داده و دامنه کاربرد آن را در مسائل عملی گسترش دهد؛ از این رو، این موضوع به‌عنوان یکی از مهم‌ترین جهت‌گیری‌های پژوهش‌های آتی پیشنهاد می‌گردد. همچنین، تعمیم روش معرفی‌شده به مسئله مقایسه میانگین‌های دو جامعه با به‌کارگیری آزمون‌های بازه‌ای مبتنی بر آماره t دو نمونه‌ای، به‌عنوان یکی از مهم‌ترین جهت‌گیری‌های پژوهش‌های آتی پیشنهاد می‌گردد.

مراجع

- [1] Arefi, M. (2018). Testing statistical hypotheses under fuzzy data and based on a new signed distance. *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, 15(3), 153-176.
- [2] Arnold, B. F. (1996). An approach to fuzzy hypothesis testing. *Metrika*, 44(1), 119-126.
- [3] Arnold, B. F. (1998). Testing fuzzy hypotheses with crisp data. *Fuzzy Sets and Systems*, 94(3), 323-333.
- [4] Berger, J., Delampady, M. (1987). Testing precise hypotheses. *Statistical Science*, 317-335.
- [5] Berkachy, R., Donzé, L. (2019). Testing hypotheses by fuzzy methods: A comparison with the classical approach. In *Applying fuzzy logic for the digital economy and society* (pp. 1-22). Springer.
- [6] Chachi, J., Taheri, S. M. (2011). Fuzzy confidence intervals for mean of Gaussian fuzzy random variables. *Expert Systems with Applications*, 38(5), 5240-5244.
- [7] Chachi, J., Taheri, S. M., Viertl, R. (2012). Testing statistical hypotheses based on fuzzy confidence intervals. *Austrian Journal of Statistics*, 41(4), 267-286.
- [8] Chachi, J., Taheri, S. M. (2018). Optimal statistical tests based on fuzzy random variables. *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, 15(5), 27-45.
- [9] Chukhrova, N., Johannssen, A. (2021). Fuzzy hypothesis testing: Systematic review and bibliography. *Applied Soft Computing*, 106, 107331.
- [10] Cole, D. A., Abitante, G., Kan, H., Liu, Q., Preacher, K. J., Maxwell, S. E. (2025). Practical problems estimating and reporting power when hypotheses are embedded in complex statistical models. *Advances in Methods and Practices in Psychological Science*, 8(1), 1-17.
- [11] Delgado, M., Verdegay, J. L., Vila, M. A. (1985). Testing fuzzy hypotheses: A Bayesian approach. In *Approximate reasoning in expert systems* (pp. 307-316). Elsevier Science Publishers.

- [12] Elsherif, A. K., Hanan, H. A., Mohamed, A., Basma, M. (2025). Fuzzy Hypothesis Testing for Radar Detection: A Statistical Approach for Reducing False Alarm and Miss Probabilities. *Mathematics*, 13(14), 2299.
- [13] González-Rodríguez, G., Colubi, A., Gil, M. Á. (2006). A fuzzy representation of random variables: an operational tool in exploratory analysis and hypothesis testing. *Computational Statistics & Data Analysis*, 51(1), 163-176.
- [14] Grzegorzewski, P., Hryniewicz, O. (2001). Soft methods in hypotheses testing. In *Soft Computing for Risk Evaluation and Management* (pp. 55-72). Springer.
- [15] Hesamian, G., Chachi, J. (2014). Fuzzy Sign test for imprecise quantities: A p-value approach. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, 27(6), 3159-3167.
- [16] Hesamian, G., Chachi, J. (2015). Two-sample Kolmogorov–Smirnov fuzzy test for fuzzy random variables. *Statistical Papers*, 56(1), 61-82.
- [17] Holeña, M. (1998). Fuzzy hypotheses for GUHA implications. *Fuzzy Sets and Systems*, 98(1), 101-125.
- [18] Holeña, M. (2004). Fuzzy hypotheses testing in the framework of fuzzy logic. *Fuzzy Sets and Systems*, 145(2), 229-252.
- [19] Hodges, J. J., Lehmann, E. L. (1954). Testing the approximate validity of statistical hypotheses. *Journal of the Royal Statistical Society Series B: Statistical Methodology*, 16(2), 261-268.
- [20] Hryniewicz, O. (2006). Possibilistic decisions and fuzzy statistical tests. *Fuzzy Sets and Systems*, 157(19), 2665-2673.
- [21] Hryniewicz, O. (2006). On testing fuzzy independence. In *Soft Methods for Integrated Uncertainty Modelling* (pp. 29-36). Springer.
- [22] Hryniewicz, O. (2016). Probability distributions related to fuzzy p-values. In *Soft Methods for Data Science* (pp. 277-284). Springer.
- [23] Hryniewicz, O. (2018). Statistical properties of the fuzzy p-value. *International Journal of Approximate Reasoning*, 93, 544-560.
- [24] Kumam, P., Saqlain, M., Merigo, J. M., Thounthong, P., Edalatpanah, S. A. (2025). From Foundations to frontiers: Half a century of fuzzy logic research in Iran. *Journal of Fuzzy Extension and Applications*, e228889.
- [25] Lehmann, E. L., Romano, J. P. (2005). *Testing statistical hypotheses*. Springer.
- [26] Meyners, M. (2012). Equivalence tests—A review. *Food Quality and Preference*, 26(2), 231-245.

- [27] Mohammadi, J., Taheri, S. M. (2004). Pedomodels fitting with fuzzy least squares regression. *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, 1(2), 45-61.
- [28] Mylonas, N., Papadopoulos, B. (2021). Fuzzy hypotheses tests for crisp data using non-asymptotic fuzzy estimators, fuzzy critical values and a degree of rejection or acceptance. *Evolving Systems*, 12(3), 723-740.
- [29] Parchami, A., Taheri, S. M., Mashinchi, M. (2010). Fuzzy p-value in testing fuzzy hypotheses with crisp data. *Statistical Papers*, 51(1), 209-226.
- [30] Parchami, A., Taheri, S. M., Mashinchi, M. (2012). Testing fuzzy hypotheses based on vague observations: a p-value approach. *Statistical Papers*, 53(2), 469-484.
- [31] Parchami, A., Taheri, S. M., Viertl, R., Mashinchi, M. (2018). Minimax test for fuzzy hypotheses. *Statistical Papers*, 59(4), 1623-1648.
- [32] Parchami, A. (2020). Fuzzy decision making in testing hypotheses: An introduction to the packages FVP. *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, 17(2), 67-77.
- [33] Parvathy, C. R., Sofia, A. (2025). Nonparametric statistical hypothesis testing in soft set theory. *TWMS Journal of Applied and Engineering Mathematics*.
- [34] Riesthuis, P., Otgaar, H., Bücken, C. (2025). Ready to ROC? A tutorial on simulation-based power analyses for null hypothesis significance, minimum-effect, and equivalence testing for ROC curve analyses. *Behavior Research Methods*, 57(4), 1-20.
- [35] Saade, J. J. (1994). Extension of fuzzy hypothesis testing with hybrid data. *Fuzzy Sets and Systems*, 63(1), 57-71.
- [36] Son, J. C., Song, I., Kim, H. Y. (1992). A fuzzy decision problem based on the generalized Neyman-Pearson criterion. *Fuzzy Sets and Systems*, 47(1), 65-75.
- [37] Taheri, S. M., Behboodian, J. (1999). Neyman-Pearson lemma for fuzzy hypotheses testing. *Metrika*, 49(1), 3-17.
- [38] Taheri, S. M., Behboodian, J. (2001). A Bayesian approach to fuzzy hypotheses testing. *Fuzzy Sets and Systems*, 123(1), 39-48.
- [39] Taheri, S. M. (2003). Trends in fuzzy statistics. *Austrian Journal of Statistics*, 32(3), 239-257.
- [40] Taheri, S. M., Arefi, M. (2009). Testing fuzzy hypotheses based on fuzzy test statistic. *Soft Computing*, 13(6), 617-625.
- [41] Taweesapaya, V., Thongteeraparp, A., Wanishsakpong, W., Sudsila, P., Volodin, A. (2024). Fuzzy Method for Multiple Hypotheses Testing Procedure. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 45(9), 4387-4393.

- [42] Torabi, H., Behboodian, J., Taheri, S. M. (2006). Neyman–Pearson lemma for fuzzy hypotheses testing with vague data. *Metrika*, 64(3), 289-304.
- [43] Yosefi, S., Arefi, M., Akbari, M. G. (2016). A new approach for testing fuzzy hypotheses based on likelihood ratio statistic. *Statistical Papers*, 57(3), 665-688.
- [44] Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets. *Information and Control*, 8, 338-353.
- [45] Zimmermann, H. J. (2001). *Fuzzy Set Theory and Its Applications* (4th ed.). Kluwer Nihoff.
- [46] Zolfaghari, P., Chinipardaz, R., Esmaily, J. (2023). The numerical reconcilability of Bayesian measure and p-value in interval hypotheses is not possible in general. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 52(4), 1178-1189.