

## پایدارسازها در $BL$ -جبرهای تکین

سعیده ظهیری

بخش ریاضی، مرکز آموزش عالی اقلید، اقلید، ایران

تاریخ دریافت: ۱۴۰۴/۱۱/۰۷

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۵/۰۵/۲۰

نوع مقاله: علمی-پژوهشی

**چکیده.** در این مقاله، مفاهیم پایدار ساز یک زیرمجموعه و پایدار ساز یک زیرمجموعه نسبت به زیر مجموعه دیگر را در  $BL$ -جبرهای تکین معرفی می کنیم و به مطالعه آنها می پردازیم. نشان می دهیم که پایدار ساز یک مجموعه، یک فیلتر تکین است و پایدار ساز فیلترهای تکین نسبت به یکدیگر، فیلتر تکین می باشند. با آوردن مثالها و اثبات قضایا سعی در بررسی، مطالعه عمیق و شناخت بیشتر  $BL$ -جبرهای تکین با استفاده از پایدارسازها می کنیم. همچنین، ثابت می کنیم که در  $BL$ -جبرهای تکین خطی، پایدار ساز یک مجموعه، یک فیلتر تکین اول است. در آخر به بررسی تاثیر پایدار سازها بر  $BL$ -جبرهای تکین خارج قسمتی می پردازیم.

### ۱. سرآغاز

نظریه مجموعه های فازی، یکی از پرطرفدارترین و محبوب ترین نظریه هایی است که تاکنون معرفی شده است. پرفسور لطفی زاده در سال ۱۹۶۵ نظریه مجموعه های فازی را معرفی کرد.

---

2010 Mathematics Subject Classification. 08B50, 03G25, 03B52, 03C05.

E-mail: saeede.zahiri@yahoo.com.

عبارات و کلمات کلیدی. منطق های غیرکلاسیک،  $BL$ -جبر تکین، پایدار ساز، فیلتر تکین.

ایشان مقدمات مدل سازی اطلاعات نادقیق و استدلال تقریبی با معادله های ریاضی را فراهم نمود که در نوع خود تحولی عظیم در ریاضیات و منطق کلاسیک بوجود آورد. نظریه مجموعه های فازی، اینگونه توسط پرفسور لطفی زاده مطرح شد: ”ما نیازمند یک نوع دیگری از ریاضیات هستیم تا بتوانیم ابهامات و عدم دقت رویدادها را مدل سازی نماییم، مدلی که متفاوت از نظریه احتمالات است.“ نظریه فازی برای بیان و تشریح عدم قطعیت و عدم دقت در رویدادها به کار می رود که براساس منطق چند ارزشی بوجود آمده است. بسیاری از مسایل و سوالات مربوط به مهندسی، علوم مختلف، علوم پزشکی و ... را بهتر میتوان با این نظریه جدید پاسخ داد. زیرا در این گونه مسایل با انواع مختلف عدم قطعیت مواجه هستیم. نظریه مجموعه های فازی از آن دسته از نظریه هایی است که به سرعت پیشرفت کرد و تاکنون کاربردهای فراوانی در سایر علوم داشته است.

مشبکه های مانده یکی از مهمترین ساختارهای جبری است که تاکنون به طور گسترده مورد مطالعه قرار گرفته است. این ساختار، اساس جبرهای مهمی همچون  $BL$ -جبرها می باشد. برای اولین بار هایک [۶] مفهوم  $BL$ -جبر را معرفی کرد که با استقبال قابل توجهی از پژوهشگران مواجه شد.

با اضافه کردن دو عمل یکتایی  $\vee$  و  $\exists$  به  $BL$ -جبرها، ساختار جدید  $BL$ -جبرهای تکین بوجود می آید. به دلیل وجود این دو عمل یکتایی در این ساختار جبری، این جبرها ویژگی هایی خاص و متفاوت از خود نشان می دهند که اشتیاق برای مطالعه و بررسی آنها را در پژوهشگران دو چندان می نماید. این دو عمل یکتایی، پیشتر به دیگر ساختارهای جبری اضافه شده اند، به طور مثال این نوع مطالعات قبلاً روی جبرهای هایتینگ [۲]، جبرهای اساسی [۵]، مونویدهای  $\ell R$ -کراندار جابجایی، مشبکه های مانده کراندار، مشبکه های مانده [۸]،  $BE$ -جبرها [۱۰]،  $BL$ -جبرها [۴]، هوپ جبرها و  $NM$ -جبرها انجام شده است.

تاثیر عمل یکتایی  $\vee$  در تعریف مجموعه های ویژه ای مانند پایدار سازها باعث بوجود آمدن تفاوت هایی با تعریف و خواص بدست آمده از این مجموعه ها در دیگر ساختارهای جبری می شود. از طرفی می دانیم که نظریه فیلترها و فیلترهای تکین (به طور خاص روی این ساختار) نقش مهمی در شناخت بیشتر این جبرها دارند. تازه بودن این ایده باعث بوجود آمدن انگیزه برای مطالعه دقیق دو نوع پایدارساز روی  $BL$ -جبرهای تکین می گردد. در همین راستا، ظهیری و همکارانش [۱۳] عمل وضعیتی را روی  $BL$ -جبرهای تکین معرفی کرده و مورد بررسی قرار دادند.

مفهوم پایدار ساز روی جبرهای مختلف از جمله  $BL$ -جبرها [۷]، شبکه های مانده [۳] و جبرهای مثلثی [۱۲] معرفی و به تفصیل مورد بررسی قرار گرفته است. تفاوت هایی که بین  $BL$ -جبرهای تکین و این ساختارها است باعث بوجود آمدن انگیزه برای مطالعه مجموعه های پایدار ساز روی این ساختار جبری می گردد.

با توجه به نکاتی که در بالا ذکر شد، به منظور شناخت بهتر و بیشتر  $BL$ -جبرهای تکین نوعی دیگر از مجموعه های خاص و ویژگی های آنها را مورد مطالعه قرار می دهیم. در مقاله حاضر، قصد داریم خواص بیشتری از  $BL$ -جبرهای تکین را مورد بررسی قرار دهیم. برای این منظور، دو مجموعه خاص را روی این ساختار جبری معرفی می کنیم. مفهوم پایدار ساز  $X$  و پایدار ساز  $X$  نسبت به  $Y$  را روی  $BL$ -جبر تکین تعریف می کنیم. برای روشن تر شدن این مفاهیم مثال هایی از این مجموعه ها ارایه می گردد. سپس ویژگی های این مجموعه ها را روی  $BL$ -جبرهای تکین مطالعه می کنیم. همچنین ارتباط بین پایدار سازها، فیلترهای تکین و برخی فیلترهای تکین خاص مانند فیلترهای تکین اول و ماکسیمال را بررسی می کنیم.

## ۲. مقدمات و پیش نیازها

در این بخش به طور خلاصه مفاهیم پایه ای و نتایجی از  $BL$ -جبرهای تکین که در ادامه استفاده خواهیم کرد را بیان می کنیم.

تعریف ۱.۰۲. [۶] یک شبکه مانده یک جبر به صورت  $(L, \vee, \wedge, *, \rightarrow, \circ, 1)$  از نوع  $\mathcal{L}$  است که :

- $(L, \vee, \wedge, \circ, 1)$  یک شبکه کراندار است،
- $(L, *, 1)$  یک تکوار جابجایی است،
- $x * y \leq z$  اگر و تنها اگر  $x \leq y \rightarrow z$ ، برای هر  $x, y$  و  $z$  در  $L$ .

ترتیب  $\leq$  و نقیض  $\neg$  در یک شبکه مانده  $(L, \vee, \wedge, *, \rightarrow, \circ, 1)$  به این صورت تعریف می شوند، برای همه  $x$  و  $y$  در  $L$ :  $x \leq y$  اگر و تنها اگر  $x \wedge y = x$  (یا به طور معادل، اگر و تنها اگر  $x \vee y = y$ ؛ یا به طور معادل اگر و تنها اگر  $x \rightarrow y = 1$ ) و  $\neg x = x \rightarrow \circ$  و  $(x \leftrightarrow y) = (x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x)$ ،  $x^n = \underbrace{x * \dots * x}_{n\text{-times}}$ ،  $a^n = \circ$  اگر  $a \in L$  یک عضو پوچ از  $L$  است، برای برخی  $n \in \mathbb{N}$  یادآوری می کنیم که

تعریف ۲.۲. [۶] یک مشبکه مانده  $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge, *, \rightarrow, \circ, 1)$  یک  $BL$ -جبر است اگر برای هر  $x, y \in L$  در شرایط زیر صدق کند:

$$\bullet (x \rightarrow y) \vee (y \rightarrow x) = 1 \text{ (پیش خطی)},$$

$$\bullet x \wedge y = x * (x \rightarrow y) \text{ (تقسیم پذیری)}.$$

لم ۳.۲. [۹] فرض کنید  $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge, *, \rightarrow, \circ, 1)$  یک مشبکه مانده باشد. آنگاه شرایط زیر برای هر  $x, y, z$  در  $L$  برقرار است:

$$(1) \quad (x \leq \neg\neg x \text{ (به ویژه)}) \quad x \vee y \leq (x \rightarrow y) \rightarrow y$$

$$(2) \quad x \rightarrow y \leq (x * z) \rightarrow (y * z)$$

$$(3) \quad (x \rightarrow y) * (y \rightarrow z) \leq (x \rightarrow z)$$

$$(4) \quad \text{اگر } x \leq y \text{، آنگاه } x \rightarrow z \leq y \rightarrow z, \text{ و } x * z \leq y * z, z \rightarrow x \leq z \rightarrow y$$

$$(5) \quad x \rightarrow (y \rightarrow z) = y \rightarrow (x \rightarrow z) = (x * y) \rightarrow z$$

$$(6) \quad x \leftrightarrow y \leq (y \leftrightarrow z) \leftrightarrow (x \leftrightarrow z)$$

$$(7) \quad \text{اگر } \bigwedge_{i \in I} x_i, \bigvee_{i \in I} y_i \text{ موجود باشند، آنگاه } \bigwedge_{i \in I} (y_i \rightarrow x_i) \leq \bigvee_{i \in I} y_i \rightarrow \bigvee_{i \in I} x_i$$

$$(8) \quad \text{اگر } \bigwedge_{i \in I} x_i, \bigwedge_{i \in I} y_i \text{ موجود باشند، آنگاه } \bigwedge_{i \in I} (y_i \rightarrow x_i) \leq \bigwedge_{i \in I} y_i \rightarrow \bigwedge_{i \in I} x_i$$

$$(9) \quad a \vee x = ((x \rightarrow a) \rightarrow a) \wedge ((a \rightarrow x) \rightarrow x)$$

تعریف ۴.۲. [۴] یک  $BL$ -جبر تکین یک ساختار  $\mathcal{A} = (A, \vee, \wedge, *, \rightarrow, \forall, \exists, \circ, 1)$  می باشد، به طوری که  $(A, \vee, \wedge, *, \rightarrow, \circ, 1)$  یک  $BL$ -جبر است،  $\forall$  و  $\exists$  عمل های یکتایی روی  $A$  می باشند و در شرایط زیر صدق می کنند:

$$\forall x \rightarrow x = 1 \quad (M_1)$$

$$\forall (x \rightarrow \forall y) = \exists x \rightarrow \forall y \quad (M_2)$$

$$\forall (\forall x \rightarrow y) = \forall x \rightarrow \forall y \quad (M_3)$$

$$\forall (\exists x \vee y) = \exists x \vee \forall y \quad (M_4)$$

$$\exists (x * x) = \exists x * \exists x \quad (M_5)$$

از اینجا به بعد  $\mathcal{A} = (A, \vee, \wedge, \rightarrow, *, \forall, \exists, \circ, 1)$  یا به طور ساده  $A$  یک  $BL$ -جبر تکین است.

**تعریف ۵.۲.** یک  $BL$ -جبر تکین  $A$  را یک  $MV$ -جبر تکین می نامیم اگر و تنها اگر برای هر  $x, y \in A$  شرط زیر برقرار باشد:

$$(x \rightarrow y) \rightarrow y = (y \rightarrow x) \rightarrow x.$$

**تعریف ۶.۲.** [۴] در یک  $BL$ -جبر تکین  $A$ ، یک زیر مجموعه غیر تهی  $F \subseteq A$  یک فیلتر تکین از  $A$  است، اگر برای هر  $x, y \in A$  در شرایط زیر صدق کند:

( $F_1$ ) اگر  $x \in F, y \in A$  و  $x \leq y$ ، آنگاه  $y \in F$

( $F_2$ ) اگر  $x, y \in F$ ، آنگاه  $x * y \in F$

( $F_3$ ) اگر  $x \in F$ ، آنگاه  $\forall x \in F$

**گزاره ۷.۲.** [۴] اگر  $A$  یک  $BL$ -جبر تکین باشد و  $a, b \in A$ ، آنگاه داریم:

$$\forall (a \rightarrow b) \rightarrow (\forall a \rightarrow \forall b) = 1 \quad (1)$$

$$\forall (a \wedge b) = \forall a \wedge \forall b \quad (2)$$

$$a \rightarrow \exists a = 1 \quad (3)$$

$$\exists (\exists a \rightarrow b) \rightarrow (\exists a \rightarrow \exists b) = 1 \quad (4)$$

$$\exists (a \wedge \exists b) = \exists a \wedge \exists b \quad (5)$$

$$\forall (\forall a * \forall b) = \forall a * \forall b \quad (6)$$

$$\exists \forall a = \forall a, \forall \exists a = \exists a, \forall \forall a = \forall a \quad (7)$$

$$\forall (\forall a \rightarrow \forall b) = \forall a \rightarrow \forall b \quad (8)$$

$$\exists a = a \text{ اگر و تنها اگر } \forall a = a \quad (9)$$

$$\forall 1 = \exists 1 = 1 \text{ و } \forall 0 = \exists 0 = 0 \quad (10)$$

**تعریف ۸.۲.** [۱۳] فرض کنید  $A$  یک  $BL$ -جبر تکین باشد. یک فیلتر تکین سره از  $A$  را یک فیلتر تکین ماکسیمال می نامیم اگر شامل هر فیلتر تکین سره از  $A$  باشد. یک فیلتر تکین  $F$  از  $A$  فیلتر تکین اول است اگر برای هر  $x, y \in A$  اگر  $\forall x \vee \forall y \in F$  آنگاه  $\forall x \in F$  یا  $\forall y \in F$ .

**تعریف ۹.۲.** [۱۳] برای زیر مجموعه غیر تهی  $S \subseteq A$ ، کوچکترین فیلتر تکین از  $A$  شامل  $S$  یعنی  $\bigcap \{F : S \subseteq F\}$  را فیلتر تکین تولید شده توسط  $S$  می نامند و با  $[S]$  نمایش داده می شود.

گزاره ۱۰.۲. [۱۳] اگر  $S \subseteq A$  یک زیر مجموعه غیر تهی از  $A$  باشد و  $a \in A$ ، آنگاه

$$[S] = \{x \in A : \forall s_1 * \dots * s_n \leq x \text{ s.t. } s_1, \dots, s_n \in S, n \geq 1\}.$$

### ۳. پایدار ساز یک مجموعه در $BL$ -جبرهای تکین

در این بخش مفهوم پایدار ساز یک مجموعه را تعریف و مثالهایی از این مجموعه ارائه خواهد شد. با بررسی و اثبات خواص پایدارسازهای یک مجموعه، سعی در شناخت بهتر این مجموعه می شود. سپس ثابت می کنیم که پایدار ساز یک مجموعه فیلتر تکین است.

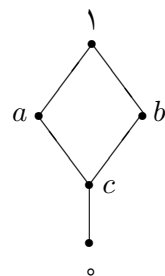
تعریف ۱.۳. فرض کنید  $X$  یک زیر مجموعه غیر تهی از  $A$  باشد. پایدار ساز  $X$  را به صورت  $X^*$  نمایش می دهیم و به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$X^* = \{a \in A : \forall a \rightarrow x = x, \text{ هر } x \in X\}$$

مثال ۲.۳. [۱۳] فرض کنید  $A = \{0, a, b, c, 1\}$  و عمل های  $*$ ،  $\rightarrow$  به صورت زیر تعریف شوند:

| $*$ | $0$ | $c$ | $a$ | $b$ | $1$ |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ |
| $c$ | $0$ | $c$ | $c$ | $c$ | $c$ |
| $a$ | $0$ | $c$ | $a$ | $c$ | $a$ |
| $b$ | $0$ | $c$ | $c$ | $b$ | $b$ |
| $1$ | $0$ | $c$ | $a$ | $b$ | $1$ |

| $\rightarrow$ | $0$ | $c$ | $a$ | $b$ | $1$ |
|---------------|-----|-----|-----|-----|-----|
| $0$           | $1$ | $1$ | $1$ | $1$ | $1$ |
| $c$           | $0$ | $1$ | $1$ | $1$ | $1$ |
| $a$           | $0$ | $b$ | $1$ | $b$ | $1$ |
| $b$           | $0$ | $a$ | $a$ | $1$ | $1$ |
| $1$           | $0$ | $c$ | $a$ | $b$ | $1$ |



در اینصورت  $(A, \wedge, \vee, *, \rightarrow, \circ, 1)$  یک  $BL$ -جبر است.

نگاشت های  $i = 1, 2, 3, \forall_i, \exists_i : A \rightarrow A$  و جدول های زیر را در نظر بگیرید:

| $x$           | $\circ$ | $c$     | $a$     | $b$     | $1$ | $x$           | $\circ$ | $c$ | $a$ | $b$ | $1$ |
|---------------|---------|---------|---------|---------|-----|---------------|---------|-----|-----|-----|-----|
| $\forall_1 x$ | $\circ$ | $\circ$ | $\circ$ | $\circ$ | $1$ | $\exists_1 x$ | $\circ$ | $1$ | $1$ | $1$ | $1$ |
| $\forall_2 x$ | $\circ$ | $c$     | $c$     | $c$     | $1$ | $\exists_2 x$ | $\circ$ | $c$ | $1$ | $1$ | $1$ |
| $\forall_3 x$ | $\circ$ | $c$     | $a$     | $b$     | $1$ | $\exists_3 x$ | $\circ$ | $c$ | $a$ | $b$ | $1$ |

ساختارهای  $(A, \forall_i, \exists_i)$  برای  $i = 1, 2, 3$  - $BL$ -جبرهای تکین هستند.

(۱) در ساختار  $(A, \forall_1, \exists_1)$ ، برای مجموعه  $X = \{a, c\}$  داریم

$$X^* = \{1\}$$

(۲) در ساختار  $(A, \forall_3, \exists_3)$ ، برای مجموعه  $Y = \{b, 1\}$  داریم

$$Y^* = \{a, 1\}$$

در لم زیر برخی از ویژگی های پایدار سازها را در  $BL$ -جبرهای تکین بررسی می کنیم:

لم ۳.۳. فرض کنید  $X, Y \subseteq A$  و  $F$  یک فیلتر تکین از  $A$  باشد. آنگاه داریم:

$$(۱) \text{ اگر } X \subseteq Y, \text{ آنگاه } X^* \subseteq Y^*.$$

$$(۲) \{1\}^* = A \text{ و } A^* = \{1\}.$$

$$(۳) \text{ برای } X_i \subseteq A, \left(\bigcup_{i \in I} X_i\right)^* = \bigcap_{i \in I} X_i^*.$$

$$(۴) \text{ برای } X_i \subseteq A, \bigcap_{i \in I} X_i^* \subseteq \left(\bigcap_{i \in I} X_i\right)^*.$$

$$(۵) \text{ اگر } h : A \rightarrow A \text{ یک همریختی باشد و } X \subseteq A, \text{ آنگاه } h(X^*) \subseteq h(X)^*.$$

$$(۶) X^* = \bigcap \{\{x\}^* : x \in X\}$$

$$(۷) \{1\} \subseteq F \cap F^*$$

اثبات. (۱) فرض کنیم  $a \in Y^*$  پس طبق تعریف برای هر  $y \in Y$  رابطه  $a \rightarrow y = y$

از آنجایی که  $X \subseteq Y$  پس تساوی  $a \rightarrow x = x$  برقرار است. لذا طبق تعریف  $a \in X^*$  و در

نتیجه داریم  $Y^* \subseteq X^*$ .

(۲) فرض کنیم  $a \in A^*$  پس برای هر  $x \in X$  رابطه  $x \rightarrow x = x$  برقرار است. حال اگر  $a = x$  آنگاه  $a \rightarrow a = a$ .  $\forall a \rightarrow a = a$  از آنجایی که  $\forall a \leq a$ ، داریم  $a = 1$ ، پس  $A^* \subseteq \{1\}$ . از طرفی  $1 \rightarrow x = x$  برای هر  $x \in A$ ، آنگاه  $1 \in A^*$ . بنابراین  $A^* = \{1\}$ .

$a \in A$  برای هر  $a \leq 1$ ، چون  $\{1\}^* = \{a \in A : \forall a \rightarrow 1 = 1\} = A$   
(۳) فرض کنید  $x \in \bigcap_{i \in I} X_i^*$ . آنگاه  $x \in X_i^* (\forall i \in I)$ . پس  $(\forall a \in X_i) (\forall i \in I)$   $x \rightarrow a = a$ . بنابراین  $\forall x \rightarrow a = a$ . با استفاده از قسمت (۱)، اثبات برعکس واضح است.

(۴) با استفاده از قسمت (۱) اثبات واضح است.  
(۵) اگر  $X \subseteq A$ ،  $h : A \rightarrow A$  یک همریختی باشد و  $y \in h(X^*)$  پس وجود دارد  $x \in X^*$  به طوری که  $y = h(x)$ . بنابراین  $\forall x \rightarrow a = a$  برای هر  $a \in X$ . چون  $h$  یک همریختی است داریم  $\forall h(x) \rightarrow h(a) = h(a)$  برای هر  $a \in X$ . بنابراین  $y = h(x) \in h(X)^*$ .

(۶)  $a \in X^*$  اگر و تنها اگر  $\forall a \rightarrow x = x$  برای هر  $x \in X$  اگر و تنها اگر  $a \in \{x\}^*$ ،  $a \in \bigcap \{\{x\}^* : x \in X\}$  برای هر  $x \in X$  اگر و تنها اگر  $a \in \bigcap \{\{x\}^* : x \in X\}$ .

(۷) از آنجایی که  $1 \rightarrow x = x$  برای هر  $x \in F$  و  $1 \in F$  داریم  $1 \in F \cap F^*$ .  $\{1\} \subseteq F \cap F^*$ .  $\square$

در مثال زیر نشان می دهیم که برعکس قسمت های (۴) و (۵) لم ۳.۳ همواره برقرار نیستند.

مثال ۴.۳. برای قسمت (۴): در مثال ۲.۳ ساختار  $(A, \forall_1, \exists_1)$  را در نظر بگیرید، اگر  $X_1 = \{a, c\}$  و  $X_2 = \{1\}$ ، آنگاه داریم  $\bigcap X_i^* = \{1\}$  اما  $(\bigcap X_i)^* = \emptyset$ .

برای قسمت (۵): در مثال ۲.۳ ساختار  $(A, \forall_3, \exists_3)$  را در نظر بگیرید، اگر همریختی  $h$  را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$h(x) = \begin{cases} x & x = \circ, c, 1 \\ b & x = a \\ a & x = b \end{cases}$$

برای  $X = \{a, 1\}$  واضح است که  $h(X)^* \not\subseteq h(X^*)$ .

در مثال بعد نشان می دهیم برعکس قسمت (۷) لم ۳.۳ همواره برقرار نیست.

مثال ۵.۳.  $(\circ, \vee, \wedge, *, \rightarrow, \circ, 1)$  را در نظر بگیرید.  $*$  و  $\rightarrow$  را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$x * y = \min(x, y), \quad x \rightarrow y = \begin{cases} 1 & x \leq y \\ y & y < x \end{cases}$$

عمل های  $\forall$  و  $\exists$  را به این صورت در نظر بگیرید که  $\forall x = x = \exists x$ . برای فیلتر  $F = [\circ, 1]$  داریم  $F^* = [\circ, 1]$  بنابراین  $F \cap F^* \not\subseteq \{1\}$ .

نتیجه ۶.۳. با استفاده از لم ۳.۳ قسمت (۲) واضح است که  $\{1\}^{**} = \{1\}$  و  $A^{**} = A$ .

لم ۷.۳. فرض کنید  $\emptyset \neq X \subseteq A$  آنگاه

$$\{a \in A : \forall a \vee x = 1, x \in X\} \subseteq X^*.$$

اثبات. فرض کنیم  $a \in \{a \in A : \forall a \vee x = 1, x \in X\}$  بنابراین  $\forall a \vee x = 1$  طبق لم ۳.۲ (۹) داریم  $((x \rightarrow \forall a) \rightarrow \forall a) \wedge ((\forall a \rightarrow x) \rightarrow x) = 1$  در نتیجه  $(\forall a \rightarrow x) \rightarrow x = 1$  پس  $(\forall a \rightarrow x) \rightarrow x = (x \rightarrow \forall a) \rightarrow \forall a = 1$  بنابراین  $\forall a \rightarrow x = x$  و  $a \in X^*$ .

□

قضیه ۸.۳. فرض کنید  $A$  یک  $MV$ -جبر تکین باشد و  $X \subseteq A$ . آنگاه  $X^* = [X]^*$ .

اثبات. از آنجایی که  $X \subseteq [X]$ ، با استفاده از لم ۳.۳،  $[X]^* \subseteq X^*$ . برعکس، فرض کنید  $a \in X^*$ ،  $x \in [X]$ . با استفاده از لم ۷.۳، باید نشان دهیم که  $x \vee \forall a = 1$ . داریم  $x \geq x_1 * \dots * x_n$ ، برای برخی از  $x_i \in X$ ، برای  $i = 1, \dots, n$  و  $a \in X^*$ ،  $\forall a \vee x_i = 1$ ، با استفاده از لم ۳.۲ داریم

$$\begin{aligned} \forall a \vee x &\geq \forall a \vee (x_1 * \dots * x_n) \\ &\geq (\forall a \vee x_1) * \dots * (\forall a \vee x_n) \\ &= 1. \end{aligned}$$

□

بنابراین  $\forall a \vee x = 1$  و  $a \in X^*$ .

لم ۹.۳. فرض کنید  $X \subseteq A$ . آنگاه  $X^*$  یک فیلتر تکین از  $A$  می باشد.

اثبات. فرض کنید  $a \in X^*$  و  $b \in A$  به طوری که  $a \leq b$ . آنگاه  $\forall a \leq \forall b$ ، با استفاده از لم ۳.۲، داریم  $\forall a \rightarrow x = x \rightarrow \forall b \rightarrow x \leq \forall b \rightarrow x$  بنابراین  $\forall b \rightarrow x \leq x$  و  $x \leq \forall b \rightarrow x$  پس  $x = \forall b \rightarrow x$ .

اگر  $a, b \in X^*$ ، آنگاه  $a \rightarrow x = \forall a \rightarrow x$  و  $x = \forall b \rightarrow x$ . با استفاده از لم ۳.۲ و گزاره ۷.۲، داریم  $\forall(a * b) \rightarrow x = \forall a * \forall b \rightarrow x = \forall a \rightarrow (\forall b \rightarrow x) = \forall a \rightarrow x = x$  بنابراین  $a * b \in X^*$ .

فرض کنید  $a \in X^*$ . از آنجایی که  $\forall a \rightarrow x = \forall a \rightarrow x = x$  آنگاه  $\forall a \in X^*$ .  $\square$

قضیه ۱۰.۳. فرض کنید  $A$  یک  $BL$ -جبر تکین خطی بوده و  $X$  یک زیر مجموعه غیر تهی از  $A$  باشد. در اینصورت  $X^*$  یک فیلتر تکین اول از  $A$  است.

اثبات. فرض کنید  $a, b \in A$  به طوری که  $\forall a \vee \forall b \in X^*$ . آنگاه  $\forall(\forall a \vee \forall b) \rightarrow x = x$ ، برای هر  $x \in X$ . با استفاده از گزاره ۷.۲،  $\forall a \vee \forall b \rightarrow x = x$  از آنجایی که  $A$  خطی است،  $\forall a \leq \forall b$  یا  $\forall b \leq \forall a$ ، پس  $\forall a \rightarrow x = \forall a \vee \forall b \rightarrow x = \forall a \vee \forall b \rightarrow x = x$  یا  $x = \forall a \vee \forall b \rightarrow x = \forall a \rightarrow x$ . بنابراین  $\forall a \in X^*$  یا  $\forall b \in X^*$ . پس  $X^*$  یک فیلتر تکین اول می باشد.  $\square$

در مثال بعد نشان می دهیم که برعکس قضیه ۱۰.۳ لزوما برقرار نیست.

مثال ۱۱.۳. در مثال ۲.۳ ساختار  $(A, \forall, \exists)$  را در نظر بگیرید. اگر  $X = \{a, 1\}$ ، آنگاه  $X^* = \{b, 1\}$ . واضح است که  $X^*$  یک فیلتر تکین اول است اما  $A$  یک  $BL$ -جبر تکین خطی نیست.

#### ۴. پایدار ساز مجموعه $X$ نسبت به مجموعه $Y$

در این بخش، پایدارساز یک مجموعه نسبت به مجموعه ای دیگر تعریف و مورد مطالعه و بررسی قرار خواهد گرفت. اثبات می کنیم که پایدار ساز دو فیلتر تکین نسبت به هم فیلتر تکین می باشد. سپس با اثبات خواصی از این مجموعه ها، سعی در شناخت بهتر  $BL$ -جبرهای تکین می کنیم.

تعریف ۱.۴. فرض کنید  $X$  و  $Y$  دو زیر مجموعه غیر تهی از  $A$  باشند. پایدار ساز  $X$  نسبت به  $Y$  را برای هر  $x \in X$  به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$(X, Y)^* = \{a \in A : (\forall a \rightarrow x) \rightarrow x \in Y\}.$$

به وضوح داریم  $(X, \{1\})^* = X^*$ ، برای هر  $X \subseteq A$ .

مثال ۲.۴. در مثال ۲.۳، ساختار  $(A, \forall, \exists)$  را در نظر بگیرید. برای  $X = \{1\}$  و  $Y = \{c, b\}$  داریم  $(X, Y)^* = \emptyset$  و  $(Y, X)^* = \{a, 1\}$ . بنابراین  $(X, Y)^* \neq (Y, X)^*$ .

قضیه ۳.۴. اگر  $F, G$  دو فیلتر تکین از  $A$  باشد، آنگاه  $(F, G)^*$  یک فیلتر تکین از  $A$  است.

اثبات. از آنجایی که  $(\forall 1 \rightarrow x) \rightarrow x = (1 \rightarrow x) \rightarrow x = x \rightarrow x = 1 \in G$ ، برای هر  $x \in F$ ،  $1 \in (F, G)^*$ .

فرض کنید  $a, a \rightarrow b \in (F, G)^*$ . پس  $(\forall(a \rightarrow b) \rightarrow x) \rightarrow x \in G$ . برای هر  $x \in F$  با گزاره ۷.۲ و لم ۳.۲ داریم،  $((\forall a \rightarrow \forall b) \rightarrow x) \rightarrow x \in G$ ، برای هر  $x \in F$ . از آنجایی که  $x \leq \forall a \rightarrow x$  و  $F$  یک فیلتر تکین است،  $\forall a \rightarrow x \in F$ . بنابراین

$$((\forall a \rightarrow \forall b) \rightarrow (\forall a \rightarrow x)) \rightarrow (\forall a \rightarrow x) \in G. \quad (I)$$

با استفاده از لم ۳.۲، برای هر  $x \in F$  داریم،  $\forall b \rightarrow x \leq (\forall a \rightarrow \forall b) \rightarrow (\forall a \rightarrow x)$ . پس  $(\forall b \rightarrow x) \rightarrow (\forall a \rightarrow x) \geq ((\forall a \rightarrow \forall b) \rightarrow (\forall a \rightarrow x)) \rightarrow (\forall a \rightarrow x)$  با استفاده از (I) داریم

$$(\forall b \rightarrow x) \rightarrow (\forall a \rightarrow x) \in G. \quad (II)$$

بنابراین،

$$\begin{aligned} ((\forall a \rightarrow x) \rightarrow x) \rightarrow ((\forall b \rightarrow x) \rightarrow x) &= (\forall b \rightarrow x) \rightarrow (((\forall a \rightarrow x) \rightarrow x) \rightarrow x) \\ &= (\forall b \rightarrow x) \rightarrow (\forall a \rightarrow x). \end{aligned}$$

چون  $G$  یک فیلتر تکین است،  $(\forall a \rightarrow x) \rightarrow x \in G$  با استفاده از (II)، داریم  $(\forall b \rightarrow x) \rightarrow x \in G$ . بنابراین  $b \in (F, G)^*$ .

فرض کنید  $a \in (F, G)^*$ . آنگاه  $(\forall a \rightarrow x) \rightarrow x \in G$ . از آنجایی که  $\forall a = \forall \forall a$ ، داریم  $(\forall \forall a \rightarrow x) \rightarrow x = (\forall a \rightarrow x) \rightarrow x \in G$ . پس  $\forall a \in (F, G)^*$ .  $\square$

در مثال بعد نشان می دهیم اگر  $X, Y$  فیلتر تکین از  $A$  نباشند، آنگاه  $(X, Y)^*$  فیلتر تکین از  $A$  نیست:

مثال ۴.۴. در مثال ۲.۳ ساختار  $(A, \forall, \exists)$  را در نظر بگیرید، دو مجموعه  $X = \{b\}, Y = \{c\}$  را در نظر بگیرید. به وضوح این دو مجموعه فیلتر تکین نیستند. داریم  $(X, Y)^* = \{b\}$ .

که این مجموعه، فیلتر تکین نیست.

تعریف ۵.۴. فرض کنید  $F$  یک فیلتر تکین از  $BL$ -جبر  $A$  باشد. آنگاه مجموعه  $D(F)$  را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$D(F) = \{x \in A : \neg \neg \forall a \in F\}.$$

قضیه ۶.۴. فرض کنید  $F$  یک فیلتر تکین از  $A$  باشد و  $X, Y, X_i$  برای هر  $i \in I$ ، زیر

مجموعه هایی از  $A$  باشند به طوری که  $\bigcap_{i \in I} X_i \neq \emptyset$  و  $\bigcap_{i \in I} Y_i \neq \emptyset$ . آنگاه

$$(۱) \text{ اگر } (X, Y)^* = A \text{، آنگاه } X \subseteq Y.$$

$$(۲) (F, F)^* = A.$$

$$(۳) X^* \subseteq (X, F)^*$$

$$(۴) a \in X^* \text{ اگر و تنها اگر } a^n \in X^* \text{، برای هر } n \in \mathbb{N}.$$

$$(۵) (\{1\}, F)^* = A.$$

$$(۶) \text{ اگر } X \subseteq X' \text{ و } Y \subseteq Y' \text{، آنگاه } (X, Y)^* \subseteq (X', Y')^*.$$

$$(۷) \bigcap_{i \in I} (X_i, Y_i)^* = \left( \bigcap_{i \in I} X_i, \bigcap_{i \in I} Y_i \right)^*$$

$$(۸) \left( X, \bigcap_{i \in I} Y_i \right)^* = \bigcap_{i \in I} (X, Y_i)^*$$

$$(۹) \bigcup_{a \in A} \{a\}^* = A$$

$$(۱۰) (X, \{1\})^* = X^*$$

$$(۱۱) F \subseteq (X, F)^*$$

$$(۱۲) (\{0\}, F)^* = D(F)$$

$$(۱۳) \bigcup_{i \in I} (X_i, Y_i)^* = \left( \bigcap_{i \in I} X_i, \bigcup_{i \in I} Y_i \right)^*$$

$$(X, A)^* = A \quad (۱۴)$$

اثبات. (۱) اگر  $(X, Y)^* = A$ ، از آنجایی که  $\circ \in A$  داریم  $\circ \in (X, Y)^*$  بنابراین  $\circ \rightarrow x = (\circ \rightarrow x) \rightarrow x = (\forall \circ \rightarrow x) \rightarrow x \in Y$  پس  $X \subseteq Y$

(۲) فرض کنید  $a \in A, x \in F$  و  $F$  یک فیلتر تکین از  $A$  باشد. با استفاده از لم ۳.۲  $x \leq (\forall a \rightarrow x) \rightarrow x$  پس  $(\forall a \rightarrow x) \rightarrow x \in F$  در نتیجه  $a \in (F, F)^*$ ؛ بنابراین  $A \subseteq (F, F)^*$  برعکس، واضح است.

(۳) اگر  $a \in X^*$  آنگاه  $a \rightarrow x = x$  برای هر  $x \in X$  پس  $(\forall a \rightarrow x) \rightarrow x = x$  در نتیجه  $a \in (X, F)^*$

(۴) فرض کنید  $a \in X^*$  آنگاه  $a \rightarrow x = x$  برای هر  $x \in A$  با استفاده از گزاره ۷.۲ داریم

$$\begin{aligned} \forall a^2 \rightarrow x &= \forall (a * a) \rightarrow x \\ &= \forall a * \forall a \rightarrow x \\ &= \forall a \rightarrow (\forall a \rightarrow x) \\ &= \forall a \rightarrow x \\ &= x. \end{aligned}$$

از آنجایی که  $\forall a^2 \rightarrow x = x$ ،  $a^2 \in X^*$  حال فرض کنید  $a^{n-1} \in X^*$  آنگاه  $\forall a^{n-1} \rightarrow x = x$  برای هر  $x \in A$  پس

$$\begin{aligned} \forall a^n \rightarrow x &= \forall (a * a^{n-1}) \rightarrow x \\ &= \forall a * \forall a^{n-1} \rightarrow x \\ &= \forall a \rightarrow (\forall a^{n-1} \rightarrow x) \\ &= \forall a \rightarrow x \\ &= x. \end{aligned}$$

بنابراین  $a^n \in X^*$  برعکس، واضح است.

(۵) فرض کنید  $a \in A$  از آنجایی که  $F$  یک فیلتر تکین است، داریم  $(\forall a \rightarrow 1) \rightarrow 1 = 1 \in F$ . پس  $1 \rightarrow 1 = 1 \in F$  بنابراین  $(\{1\}, F)^* = A$ .

(۶) اگر  $a \in (X', Y)^*$ ، آنگاه  $(\forall a \rightarrow x) \rightarrow x \in Y$ ، برای هر  $x \in X'$  پس  $a \in (X, Y')^*$  در نتیجه  $(\forall a \rightarrow x) \rightarrow x \in Y'$ .

(۷) جایی که  $i \in I$  اگر و تنها اگر  $a \in (X_i, Y_i)^*$ ، برای هر  $i \in I$  اگر و تنها اگر  $(\forall a \rightarrow x) \rightarrow x \in Y_i$ ، برای هر  $x \in X_i$  و  $i \in I$  اگر و تنها اگر  $a \in (\bigcap_{i \in I} X_i, \bigcap_{i \in I} Y_i)^*$ ، برای هر  $x \in \bigcap_{i \in I} Y_i$ ،  $(\forall a \rightarrow x) \rightarrow x \in Y_i$ ، برای هر  $x \in X_i$  و  $i \in I$  اگر و تنها اگر  $a \in (\bigcap_{i \in I} X_i, \bigcap_{i \in I} Y_i)^*$ .

(۸) اگر و تنها اگر  $a \in \bigcap_{i \in I} (X, Y_i)^*$  اگر و تنها اگر  $(\forall i \in I) (a \in (X, Y_i)^*)$  اگر و تنها اگر  $(\forall x \in X)(\forall i \in I)((\forall a \rightarrow x) \rightarrow x \in Y_i)$ ،  $(\forall i \in I)(\forall x \in X)$  اگر و تنها اگر  $a \in (X, \bigcap_{i \in I} Y_i)^*$ .

(۹) با استفاده از ل ۳.۳،  $\{1\}^* = A$  و  $1 \in A$  داریم  $\bigcup_{a \in A} \{a\}^* = A$ .

(۱۰) فرض کنید  $a \in (X, \{1\})^*$  آنگاه  $(\forall a \rightarrow x) \rightarrow x = 1$ ، برای هر  $x \in X$  پس  $a \rightarrow x \leq x$  با استفاده از ل ۳.۲، داریم  $a \rightarrow x = x$ ، برای هر  $x \in X$  در نتیجه  $a \in X^*$  با استفاده از قسمت (۳) برعکس برقرار است.

(۱۱) فرض کنید  $a \in F$  آنگاه  $a \in F$ ، با استفاده از ل ۳.۲،  $\forall a \leq (\forall a \rightarrow x) \rightarrow x$ ، پس  $(\forall a \rightarrow x) \rightarrow x \in F$  بنابراین  $a \in (X, F)^*$ .

(۱۲) داریم

$$\begin{aligned} (\{\circ\}, F)^* &= \{a \in A : (\forall a \rightarrow \circ) \rightarrow \circ \in F\} \\ &= \{a \in A : \neg\neg\forall a \in F\} \\ &= D(F). \end{aligned}$$

(۱۳) اگر  $a \in (\bigcap_{i \in I} X_i, \bigcup_{i \in I} Y_i)^*$  آنگاه برای هر  $x \in \bigcap_{i \in I} X_i$ ،  $(\forall a \rightarrow x) \rightarrow x \in \bigcup_{i \in I} Y_i$  وجود دارید  $i \in I$  به طوری که  $(\forall a \rightarrow x) \rightarrow x \in Y_i$ ، برای هر  $x \in X_i$  بنابراین

$$a \in \bigcup_{i \in I} (X_i, Y_i)^*, a \in (X_i, Y_i)^*$$

برعکس، فرض کنید  $a \in \bigcup_{i \in I} (X_i, Y_i)^*$  آنگاه وجود دارد  $i \in I$  به طوری که  $(\forall a \rightarrow x) \rightarrow x \in Y_i$ ، برای هر  $x \in X_i$  پس  $x \in \bigcup_{i \in I} Y_i$ ،  $(\forall a \rightarrow x) \rightarrow x \in \bigcup_{i \in I} Y_i$  آنگاه  $x \in X_i$ ، برای هر  $x \in \bigcap_{i \in I} X_i$  بنابراین

$$a \in (\bigcap_{i \in I} X_i, \bigcup_{i \in I} Y_i)^*$$

(۱۴) برای هر  $x \in X$  داریم

$$(X, A)^* = \{a \in A : (\forall a \rightarrow x) \rightarrow x \in A\} = A.$$

□

در مثال زیر نشان می دهیم که عکس قسمت های (۱)، (۳)، (۶) به طور کلی برقرار نیست:

مثال ۷.۴. مثال ۲.۳ را در نظر بگیرید.

برای قسمت (۱)، در ساختار  $(A, \forall_3, \exists_3)$  فرض کنید  $X = \{a\} \subseteq Y = \{a, b\}$  اینصورت داریم  $(X, Y)^* = \{0, c, a\} \neq A$ .

برای قسمت (۳)، در ساختار  $(A, \forall_1, \exists_1)$  فرض کنید  $X = \{a\}, F = \{a, 1\}$  اینصورت داریم  $(X, F)^* = A \not\subseteq X^* = \{1\}$ .

برای قسمت (۶)، در ساختار  $(A, \forall_3, \exists_3)$  فرض کنید

$$X = Y = \{1\}, X' = \{a\}, Y' = \{b\}$$

در اینصورت داریم  $(X', Y) = \{b, 1\} \not\subseteq (X, Y') = \emptyset$ .

لم ۸.۴. فرض کنید  $G$  یک فیلتر تکین از  $A$  باشد و  $F$  یک فیلتر ماکسیمال تکین از  $A$  باشد. آنگاه  $(G, F)^* = F$ .

اثبات. با استفاده از قضیه ۶.۴ (۱۱) داریم  $F \subseteq (G, F)^*$ .  $(G, F)^*$  یک فیلتر تکین است و  $F$  یک فیلتر ماکسیمال تکین است بنابراین  $(G, F)^* = F$ .

□

در ادامه نشان می دهیم که عکس قضیه بالا برقرار نیست.

مثال ۹.۴. مثال ۵.۳ را در نظر بگیرید. برای فیلترهای تکین  $F = [0, 1]$  و  $G = [0, 1]$  داریم  $(G, F)^* = F$ . اما واضح است که فیلتر تکین  $F$  ماکسیمال نیست.

گزاره ۱۰.۴. فرض کنید  $F$  و  $G$  دو فیلتر تکین از  $A$  باشند و  $X, Y \subseteq A$ . آنگاه

$$(X \times Y, F \times G)^* = (X, F)^* \times (Y, G)^*.$$

اثبات. برای هر  $x \in X, y \in Y$  داریم

$$\begin{aligned} (X \times Y, F \times G)^* &= \{(a, b) \in A \times B : (\forall (a, b) \rightarrow (x, y)) \rightarrow (x, y) \in F \times G, \} \\ &= \{(a, b) \in A \times B : ((\forall a, \forall b) \rightarrow (x, y)) \rightarrow (x, y) \in F \times G, \} \\ &= \{(a, b) \in A \times B : ((\forall a \rightarrow x) \rightarrow x, (\forall b \rightarrow y) \rightarrow y)) \in F \times G, \} \\ &= (X, F)^* \times (Y, G)^*. \end{aligned}$$

□

نتیجه ۱۱.۴. فرض کنید  $\{F_i\}_{i \in I}$  خانواده ای از فیلترهای تکین از  $A$  باشد و  $\{X_i\}_{i \in I}$  خانواده

$$\text{ای از زیر مجموعه های } A \text{ باشد. آنگاه } \left( \prod_{i \in I} X_i, \prod_{i \in I} F_i \right)^* = \prod_{i \in I} (X_i, F_i)^*.$$

گزاره ۱۲.۴. اگر  $F$  و  $G$  دو فیلتر تکین از  $A$  باشند و  $X \subseteq A$  آنگاه

$$(X, F/G)^* = (X, F)^*/G.$$

اثبات. برای هر  $x \in X$  داریم

$$\begin{aligned} (X, F/G)^* &= \{[a] \in A/G : (\forall [a] \rightarrow x) \rightarrow x \in F/G\} \\ &= \{[a] \in A/G : (\forall a \rightarrow x) \rightarrow x \in F\} \\ &= \{[a] \in A/G : a \in (X, F)^*\} \\ &= (X, F)^*/G. \end{aligned}$$

□

**تعریف ۱۳.۴.** اگر  $A, B$  دو  $BL$ -جبر تکین باشند و  $f : A \rightarrow B$  یک همریختی باشد، در اینصورت تعریف می‌کنیم:

$$\ker f = \{a \in A : f(a) = 1\}$$

**گزاره ۱۴.۴.** فرض کنید  $f : A \rightarrow B$  یک مونومورفیسم از  $BL$ -جبرهای تکین باشد. آنگاه  $(X, \ker f)^* = (f^{-1}(X))^*$ .

**اثبات.** واضح است که  $\ker(f)$  یک فیلتر تکین از  $A$  است. برای هر  $x \in X$  داریم

$$\begin{aligned} a \in (X, \ker(f))^* &\Leftrightarrow (\forall a \rightarrow x) \rightarrow x \in \ker(f) \\ &\Leftrightarrow f((\forall a \rightarrow x) \rightarrow x) = 1 \\ &\Leftrightarrow (\forall f(a) \rightarrow f(x)) \rightarrow f(x) = 1 \\ &\Leftrightarrow \forall f(a) \rightarrow f(x) = f(x) \\ &\Leftrightarrow a \in (f^{-1}(X))^*. \end{aligned}$$

□

### نتیجه‌گیری

در این مقاله مفاهیم پایدار ساز یک مجموعه و پایدار ساز یک مجموعه نسبت به مجموعه دیگر را در  $BL$ -جبرهای تکین معرفی کرده و مورد بررسی قرار دادیم. با آوردن مثال‌هایی از پایدار سازها روی این ساختار جبری به شناخت بهتر این جبر و این مجموعه‌های خاص پرداختیم. بعد از معرفی هر کدام، نشان دادیم پایدار ساز یک مجموعه فیلتر تکین است و پایدار ساز دو فیلتر تکین نسبت به هم، فیلتر تکین است. در مثالی نشان دادیم شرط فیلتر تکین بودن برای اثبات قضیه ضروری می‌باشد. در ادامه هر بخش، خواص ویژه‌ای از هر کدام از این مجموعه‌ها را مورد مطالعه و بررسی دقیق قرار دادیم. یکی از نتایج قابل توجه اثبات این مساله بود که در  $MV$ -جبرهای تکین رابطه  $X^* = [X]^*$  برقرار است. همچنین، رابطه بین پایدار سازها و انواع فیلترهای تکین را بررسی کردیم.

مطالعه بیشتر و گسترده‌تر روی  $BL$ -جبرهای تکین و دیگر مجموعه‌های خاص که سبب شناخت بیشتر ویژگی‌های این ساختار جبری می‌گردد، زمینه مطالعه ما در آینده خواهد بود.

## تشکر و قدردانی

از داوران گرامی که با نظرات سازنده و ارزشمند خود جهت بهبود مقاله ما را یاری فرمودند، کمال تشکر و قدردانی را داریم.

## مراجع

- [۱] اسلامی، ا. (۱۳۹۱) منطق فازی و کاربردهای آن، انتشارات دانشگاه شهید باهنر کرمان.
- [2] G. Bezhanishvili, *Varieties of monadic Heyting algebras I*, Stud. Log. **61**(1998), 367–402.
- [3] A. Borumand Saeid, N. Mohtashamnia, Stabilizer in Residuated Lattices, U.P.B. Scientific Bulletin, Series A, **74**(2) (2012), 65–74.
- [4] D. Castaño, C. Cima-damore, J.P. Díaz Varela, L. Rueda, *Monadic BL-algebras: The equivalent algebraic semantics of Hájek's monadic fuzzy logic*, Fuzzy Sets Syst. **320**(2017), 40–59.
- [5] I. Chajda, M. Kolařík, M.: *Monadic basic algebras*, Acta Univ. Palacki. Olomuc., Fac. Rer. Nat. Mathematica **47**(2008), 27–36.
- [6] P. Hájek, *Metamathematics of Fuzzy Logic*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1998.
- [7] M. Haveshki, M. Mohamadhasani, Stabilizer in BL-Algebras and its Properties, International Mathematical Forum, 5, no. **57** (2010), 2809–2816.
- [8] M. Kondo, *On residuated lattices with universal quantifiers*, Bull. Iranian Math. Soc. **41**(2015), 923–929.
- [9] D. Piciu, *Algebra of Fuzzy Logic*, Editura Universtaria, Universtaria Craiova, (2007).
- [10] S.Y. Zaheriani, O. Zahiri, *Monadic BE-algebras*, J. Intell. Fuzzy Syst. **27**(2014), 2987–2995.
- [11] S. Zahiri, A. Borumand Saeid, Similarity monadic basic logic, *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin* **27** (2020), 321–336.
- [12] S. Zahiri, A. Borumand Saeid, E. Eslami, A study of stabilizers in triangle algebras, *Mathematica Slovaca*, **68** (2018), 41–52.
- [13] S. Zahiri, A. Borumand Saeid, L. C. Ciungu, Chatacterization of monadic BL-algebras by state operators, *Math. Slovaca*, **72**(2022)3, 555–574.