

سوپر ابرگراف های فازی فیثاغورسی

محمد حمیدی* و شهره شیرانی ناژوانی

گروه علوم پایه، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران

تاریخ دریافت: ۱۴۰۴/۱۱/۰۷

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۵/۰۵/۱۴

نوع مقاله: علمی- پژوهشی

چکیده. در این مقاله، سوپر ابرگراف های فازی فیثاغورسی برای مدل سازی ابر شبکه های مختلط معرفی می شوند. مفاهیم سوپر ابررأس ها، ابریا ل ها و پیوندهای فازی فیثاغورسی تعریف می گردند. بر اساس این مفاهیم، رده های مهمی از سوپر ابرگراف نرم، خشن و هموار ارائه می شوند. سپس بازه های طلایی فازی برای وجود یا عدم وجود مکمل این نوع ابرساختارها و ساختن مکمل سوپر ابرگراف های فازی فیثاغورسی معرفی می گردند. الگوریتمی برای محاسبه این بازه طلایی ارائه می شود. همچنین مفهوم آنتروپی فازی برای سوپر ابرگراف های فازی فیثاغورسی معرفی می گردد. روش هایی برای کاهش آنتروپی سوپر ابریا ل ها با استفاده از بازه های طلایی و مفهوم مکمل سازی بررسی شده است. در پایان، الگوریتمی طراحی می شود که آنتروپی فازی سوپر ابرگراف های فازی فیثاغورسی را کاهش و بهینه می کند و به کاربردهای عملی این مفاهیم پرداخته شده است.

۱. سرآغاز

امروزه گسترش کاربرد ابرشبکه‌های مختلط در حوزه‌هایی مانند تحلیل شبکه‌های اجتماعی و ارتباطات جمعی و امثالهم، نیاز مبرم به مدل‌های پیشرفته ریاضی که قادر به نمایش مسایل چند متغیره باشند را برجسته ساخته است. مدل‌سازی بر اساس ساختارهای ریاضی مانند ساختار گراف که عمدتاً بر روابط زوج محور تمرکز دارند، اغلب در بررسی ارتباطات همزمان بیش از دو عنصر، دچار محدودیت می‌شوند. برای رفع این محدودیت، مفهوم ابرگراف‌ها به‌عنوان یک مدل قوی‌تر معرفی شده‌اند که در آن ابررأس‌ها برای نمایش اشیا و ابريال‌ها برای مدل‌سازی روابط پیچیده بین این اشیا طراحی می‌شوند. البته بعد از آن در سال‌های اخیر مفهوم سوپر ابرگراف‌ها توسط اسماران‌دک به‌عنوان تعمیم ابرگراف‌ها معرفی شده است تا محدودیت‌هایی که ابرگراف‌ها در زمینه ارتباطات جزبه‌جز و کل‌به‌کل دارند را برطرف کند [۸]. مفهوم سوپر ابرگراف‌ها در مدل‌سازی ابرشبکه‌های مختلط در دنیای واقعی مؤثر بوده‌اند فلذا در سال‌های اخیر تحقیقات زیادی در این زمینه انجام شده است. برای کاربردهای قابل توجه سوپر ابرگراف‌ها می‌توان به تحقیقات انجام شده توسط پژوهشگرانی مانند حمیدی و همکاران برای بررسی طیف سوپر ابرگراف‌ها از طریق شارش‌ها [۳] و چارچوب‌های تصمیم‌گیری مبتنی بر عدد احاطه‌گری در سوپر ابرگراف‌های فازی اشاره کرد [۴]. علیرغم این پیشرفت‌ها، داده‌های زیربنایی چنین ابر شبکه‌هایی اغلب فاقد دقت هستند و با عدم قطعیت و ابهام و مواجه هستند. نظریه مجموعه‌های فازی و توسعه آن، مانند مجموعه‌های فازی فیثاغورسی معرفی شده توسط یگر [۱۱]، با موفقیت به مقابله با این عدم دقت در نظریه‌های جبری، به‌خصوص نظریه گراف می‌پردازند. یک ابزار کلیدی برای مدیریت عدم قطعیت در ساختارهای فازی، مفهوم آنتروپی فازی است که با مشارکت‌های بنیادین لوکا و ترمینی در سال ۱۹۷۲ [۲] و پیشرفت‌های بعدی توسط کاسکو [۵، ۶] (که از معیارهای فاصله برای محاسبه آنتروپی استفاده کرد) شکل گرفته است. کارهای اخیر در این زمینه‌ها شامل تکنیک‌های بهینه‌سازی چندمعیاره با استفاده از اطلاعات فازی فیثاغورسی [۱]، آنتروپی فازی فیثاغورسی بازه‌ای اعمال‌شده در فرایندهای تصمیم‌گیری گروهی چندمعیاره و روش‌های مبتنی بر گراف برای تصمیم‌گیری چندشاخصه با معیارهای اطلاعاتی فازی نمونه‌های بارزی است که به اهمیت مفهوم آنتروپی فازی اشاره دارد.

انگیزه تحقیق: در دنیای واقعی امروز، بسیاری از ابرشبکه‌های مختلط دارای ساختاری سلسله‌مراتبی و چندلایه هستند که مدل‌سازی آن‌ها با استفاده از گراف‌های ساده یا حتی ابرگراف‌های کلاسیک امکان‌پذیر نیست. از سوی دیگر، داده‌های موجود در این سیستم‌ها

اغلب با عدم قطعیت، ابهام و ناسازگاری همراه هستند و روش‌های قطعی قادر به نمایش دقیق این پیچیدگی‌ها نمی‌باشند. مجموعه‌های فازی فیثاغورسی با فراهم کردن امکان تعیین همزمان درجه عضویت و عدم عضویت توانایی بیشتری در مدل‌سازی عدم قطعیت نسبت به مجموعه‌های فازی معمولی و شهودی دارند. با وجود این مزیت، تاکنون پژوهش‌های جامعی برای تلفیق این مجموعه‌ها با ساختار سوپر ابرگراف‌ها (که قادر به نمایش روابط بین مجموعه‌هایی از رأس‌ها هستند) انجام نشده است. همچنین در بسیاری از کاربردهای عملی، نیاز به بهینه‌سازی و کاهش عدم قطعیت در این ساختارها احساس می‌شود که انگیزه اصلی پژوهش حاضر را تشکیل می‌دهد. این مقاله بر آن است تا با معرفی سوپر ابرگراف‌های فازی فیثاغورسی و ارائه ابزارهای مکمل‌سازی و آنتروپی فازی، گامی مؤثر در جهت مدل‌سازی و بهینه‌سازی ابرشبکه‌های مختلط دنیای واقعی بردارد. انگیزه این تحقیق معرفی مدل‌های ریاضی است که به بهینه‌سازی عدم قطعیت‌های ذاتی موجود در ابرشبکه‌ها بپردازد. لذا با توجه به مجموعه‌های فازی فیثاغورسی، برای کمی‌سازی و بهینه‌سازی عدم قطعیت این ابرشبکه‌ها، به صورت به‌ویژه به مفهوم مکمل سوپر ابرگراف‌های فازی فیثاغورسی می‌پردازد تا بتواند وجود و عدم وجود روابط را مدل‌سازی کند. برای بررسی دقت این کار، به معرفی معیارهای آنتروپی فازی برای سوپر ابرگراف‌های فازی فیثاغورسی می‌پردازیم. آنتروپی فازی از مهمترین تکنیک‌های بهینه‌سازی است. این مقاله چندین کار مهم در پیشبرد ریاضیات فازی و تحلیل شبکه‌های پیچیده ارائه می‌دهد. مطالعه یک سیستم طبقه‌بندی برای سوپر ابرگراف‌های فازی فیثاغورسی مبتنی بر توابع وزن انجام شده است. این امر امکان تحلیل دقیق‌تری از الگوهای مختلف عدم قطعیت در سیستم‌های مختلط را فراهم می‌آورد. نظریه مکمل‌سازی برای سوپر ابرگراف‌های فازی فیثاغورسی همراه با اثبات وجود یک بازه طلایی ارائه می‌شود. این نظریه منجر به ایده زوج‌های هارمونیک می‌گردد. هدف از این ایده، طبقه‌بندی عناصر با خواص مشترک است. این عناصر در کاربرد هماهنگی بیشتری دارند. معیارهای آنتروپی فازی اختصاصی به طور خاص برای سوپر ابرگراف‌های فازی فیثاغورسی معرفی می‌شوند. این معیارها ابزار مهمی در کمی‌سازی عدم قطعیت در سوپر ابررأس‌ها، ابريال‌ها و پیوندها در سطوح سلسله مراتبی مختلف هستند.

نوآوری این تحقیق: این پژوهش دارای نوآوری‌هایی است که با توجه به مطالب بخش مقدمه در این بخش برای اهمیت مقاله یک مقایسه انجام می‌گردد:

الف) در حالی که پژوهش‌های پیشین تنها به بررسی گراف‌های فازی فیثاغورسی ساده با رأس‌های منفرد پرداخته‌اند، مقاله حاضر برای نخستین بار سوپر ابرگراف‌های فازی فیثاغورسی را معرفی می‌کند که در آن هر سوپر ابررأس خود یک مجموعه شامل

چندین زیرمجموعه فازی است و روابط بین آن‌ها از طریق سوپر ابريال‌ها مدل‌سازی می‌شود.

(ب) برخلاف پژوهش‌های قبلی در زمینه مکمل‌سازی گراف‌های فازی، مقاله حاضر وجود بازه طلایی را برای مکمل‌سازی سوپر ابرگراف‌های فازی فیثاغورسی اثبات می‌کند و الگوریتمی عملی برای محاسبه آن ارائه می‌دهد که در ادبیات موجود سابقه ندارد.

(ج) اگرچه آنتروپی فازی برای مجموعه‌های فازی فیثاغورسی پیشتر تعریف شده است، اما تعریف آنتروپی برای سوپر ابررأس‌ها، سوپر ابريال‌ها و پیوندها در یک سوپر ابرگراف و همچنین تحلیل شرایط برابری و کاهش آنتروپی در فرآیند مکمل‌سازی برای اولین بار در این مقاله ارائه می‌گردد.

(د) این مقاله فراتر از معرفی مفاهیم نظری، الگوریتمی عملی برای بهینه‌سازی آنتروپی فازی از طریق یافتن مقدار بهینه پارامتر مکمل ارائه می‌دهد و کاربرد واقعی آن را در مدل‌سازی یک مسئله اجتماعی نشان می‌دهد که در نوع خود در پژوهش‌های پیشین دیده نمی‌شود.

۲. مفاهیم مقدماتی

در این بخش به معرفی برخی تعاریف و نتایج مورد نیاز مقاله می‌پردازیم.

تعریف ۱.۲. [۱۱] فرض کنید X یک مجموعه ناتهی دلخواه باشد. در این صورت $P = \{(x, \mu_P(x), \nu_P(x)) \mid x \in X\}$ را یک زیرمجموعه فازی فیثاغورسی (PFS) از X گوئیم، که در آن $\mu_P, \nu_P : X \rightarrow [0, 1]$ زیرمجموعه‌های فازی هستند و برای هر $x \in X$ ، رابطه $\mu_P^2(x) + \nu_P^2(x) \leq 1$ برقرار است.

برای سادگی کار، از این‌جا به بعد هر زیرمجموعه فازی فیثاغورسی P را با $P \in PFS(X)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۲.۲. [۹] فرض کنید $P, Q \in PFS(X)$ باشد. در این صورت یک اندازه آنتروپی یک تابع $E : PFS(X) \rightarrow [0, 1]$ است که در روابط زیر صدق می‌کند:

$$\text{الف) } 0 \leq E(P) \leq 1$$

(ب) $E(P) = 0$ اگر و تنها اگر P یک مجموعه عادی است،

(ج) $E(P) = 1$ اگر و تنها اگر $\mu_P = \nu_P$

د) $E(P) = E(P^c)$ که در آن P^c مکمل فازی P است،

ه) $E(P) \leq E(Q)$ اگر و تنها اگر $\mu_P \leq \mu_Q \leq \nu_Q \leq \nu_P$ یا $\mu_P \leq \mu_Q \leq \nu_Q \leq \nu_P$.

تعریف ۳.۲. [۷، ۱۰] فرض کنید X یک مجموعه ناتهی و $P, Q \in PFS(X)$ باشد. در این صورت $Q = \{xy := (x, y), \mu_Q(xy), \nu_Q(xy) \mid xy \in X \times X\}$ یک رابطه فازی فیثاغورسی نامیده می‌شود. به علاوه، $G = (P, Q)$ را یک گراف فازی فیثاغورسی روی X می‌نامیم اگر برای هر $(xy) \in X \times X$ روابط زیر برقرار باشند:

$$\mu_Q(xy) \leq \min\{\mu_P(x), \mu_P(y)\}, \quad \nu_Q(xy) \geq \max\{\nu_P(x), \nu_P(y)\}.$$

تعریف ۴.۲. [۳] فرض کنید X یک مجموعه ناتهی باشد. در این صورت

الف) $H = (X, S = \{S_i\}_{i=1}^k, \Phi = \{\varphi_{i,j}\}_{i,j})$ یک شبه سوپر ابرگراف است اگر $X = \bigcup_{i=1}^n S_i$ و $\Phi \neq \emptyset$ که در آن $k \geq 2$ و نیز S_i را یک سوپر ابرراس و برای هر $i \neq j$ ، نگاشت $\varphi_{ij} : S_i \rightarrow S_j$ را یک سوپر ابرریال می‌نامیم.
ب) شبه سوپر ابرگراف H را یک سوپر ابرگراف می‌نامیم اگر برای هر سوپر ابرراس S_i یک سوپر ابرراس S_j باشد که $\varphi_{ij} : S_i \rightarrow S_j$ به عنوان یک پیوند وجود داشته باشد.

۳. سوپر ابرگراف‌های فازی فیثاغورسی

در این بخش به معرفی سوپر ابرگراف‌های فازی فیثاغورسی می‌پردازیم و خواص آن‌ها را بررسی می‌کنیم. برای هر زیرمجموعه فازی فیثاغورسی $P = (\mu_P, \nu_P)$ ، پشته‌انه P را به صورت $P^* = \{x \in X \mid \mu_P(x) > 0, \nu_P(x) < 1\}$ تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱.۳. فرض کنید

$$\mathcal{V} = \{P_i = (\mu_{P_i}, \nu_{P_i})\}_{i=1}^v, \quad \mathcal{E} = \{Q_{ij} = (\mu_{Q_{ij}}, \nu_{Q_{ij}})\}_{i,j \geq 1}^e,$$

$$\mathcal{D} = \{R_i = (\mu_{R_i}, \nu_{R_i})\}_{i=1}^d$$

خانواده‌های متاهی از زیرمجموعه‌های فازی فیثاغورسی باشند. در این صورت $H = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{D})$ یک شبه سوپر ابرگراف فازی فیثاغورسی روی X است اگر $X = \bigcup_{i=1}^v P_i^*$ و

الف) برای هر $xy \in R_i^*$

$$\nu_{R_i}(xy) \geq \max\{\nu_{P_i}(x), \nu_{P_i}(y)\}, \text{ و } \mu_{R_i}(xy) \leq \min\{\mu_{P_i}(x), \mu_{P_i}(y)\}$$

$$\text{ب) برای هر } xy \in Q_{ij}^* \quad \mu_{Q_{ij}}(xy) \leq \min\left\{\frac{\mu_{P_i}(x)}{w(P_i)}, \frac{\mu_{P_j}(y)}{w(P_j)}\right\}$$

$$\text{و } \nu_{Q_{ij}}(xy) \geq \max\left\{\frac{\nu_{P_i}(x)}{w(P_i)}, \frac{\nu_{P_j}(y)}{w(P_j)}\right\}$$

که در آن $w(P_i) = \sum_{x \in P_i^*} (\mu_{P_i} + \nu_{P_i})(x)$ وزن هر سوپر ابرراس فازی فیثاغورسی است.

به‌علاوه هر شبه سوپر ابرگراف فازی فیثاغورسی را یک سوپر ابرگراف فازی فیثاغورسی می‌نامیم اگر $|\mathcal{V}| \leq |\mathcal{E}|$ و برای هر $1 \leq i \leq d$ ، $|R_i^*| \geq 1$ باشد. برای $w(P_i) < 1$ ، $w(P_i) > 1$ و $w(P_i) = 1$ به‌ترتیب H را سوپر ابرگراف فازی فیثاغورسی نرم، خشن و هموار می‌نامیم. اگر در تعریف فوق نامساوی‌ها اکید باشند، می‌گوییم H یک سوپرابرگراف فازی فیثاغورسی اکید است.

گزاره ۲.۳. فرض کنید $H = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{D})$ یک شبه سوپر ابرگراف فازی روی X باشد. در این‌صورت $Q_{ij}^* \subseteq P_i^* \times P_j^*$ و $R_i^* \subseteq P_i^* \times P_i^*$.

□

اثبات. بنابر تعریف بدیهی است.

مثال ۳.۳. فرض کنید $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ باشد. در این‌صورت $H = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{D})$ یک شبه سوپر ابرگراف فازی خشن روی X است که در شکل (۱) دیده می‌شود و

$$P_1 = \{(a, \cdot/3, \cdot/4), (b, \cdot/5, \cdot/5)\}, P_2 = \{(c, \cdot/4, \cdot/7), (d, \cdot/6, \cdot/6)\},$$

$$P_3 = \{(e, \cdot/7, \cdot/6), (f, \cdot/8, \cdot/4)\}, R_1 = \{(ab, \cdot/2, \cdot/6)\},$$

$$R_2 = \{(cd, \cdot/3, \cdot/8)\}, R_3 = \{(ef, \cdot/5, \cdot/7)\},$$

$$Q_{12} = \{(ac, \cdot/1, \cdot/65), (bd, \cdot/25, \cdot/7)\},$$

$$Q_{13} = \{(ae, \cdot/17, \cdot/5), (bf, \cdot/29, \cdot/6)\},$$

$$Q_{23} = \{(cf, \cdot/17, \cdot/65), (de, \cdot/26, \cdot/6)\},$$

$$w(P_1) = 1/7, \quad w(P_2) = 2/3, \quad w(P_3) = 2/5,$$

$$\cdot/2 = \mu_{R_1}(ab) \leq \min\{\mu_{P_1}(a), \mu_{P_1}(b)\} = \min\{\cdot/3, \cdot/5\} = \cdot/3,$$

$$\cdot/6 = \nu_{R_1}(ab) \geq \min\{\nu_{P_1}(a), \nu_{P_1}(b)\} = \max\{\cdot/4, \cdot/5\} = \cdot/5,$$

تعریف ۴.۳. فرض کنید $H = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{D})$ یک سوپر ابرگراف فازی روی X باشد و $\circ \neq$.
 $\delta \in \mathbb{R}$ یک عدد حقیقی باشد. در این صورت $\overline{H} = (\overline{\mathcal{V}}, \overline{\mathcal{E}}, \overline{\mathcal{D}})$ را δ -مکمل H می‌نامیم
 که در آن $\overline{\mathcal{E}} = \{\overline{Q_{ij}} = \overline{\mathcal{D}} = \{\overline{R_i} = (\mu_{\overline{R_i}}, \nu_{\overline{R_i}})\}_{i=1}^d, \overline{\mathcal{V}} = \{\overline{P_i} = (\mu_{\overline{P_i}}, \nu_{\overline{P_i}})\}_{i=1}^v\}$
 و برای هر $P_i \in \mathcal{V}$ و $\overline{P_i} = P_i$ و $(xy) \in R_i^*$ و $(xy) \in Q_{ij}^*$:
 (الف)

$$\begin{aligned}\mu_{\overline{R_i}}(xy) &= \min\{\mu_{P_i}(x), \mu_{P_i}(y)\} - \mu_{R_i}(xy) := A_i(xy) - \mu_{R_i}(xy), \\ \nu_{\overline{R_i}}(xy) &= \nu_{R_i}(xy) - \delta \max\{\nu_{P_i}(x), \nu_{P_i}(y)\} := \nu_{R_i}(xy) - \delta B_i(xy),\end{aligned}$$

(ب)

$$\begin{aligned}\mu_{\overline{Q_{ij}}}(xy) &= \min\left\{\frac{\mu_{P_i}(x)}{w(P_i)}, \frac{\mu_{P_j}(y)}{w(P_j)}\right\} - \mu_{Q_{ij}}(xy) := M_{ij}(xy) - \mu_{Q_{ij}}(xy), \\ \nu_{\overline{Q_{ij}}}(x, y) &= \nu_{Q_{ij}}(x, y) - \delta \max\left\{\frac{\nu_{P_i}(x)}{w(P_i)}, \frac{\nu_{P_j}(y)}{w(P_j)}\right\} := \nu_{Q_{ij}} - \delta N_{ij}(xy).\end{aligned}$$

اگر $\delta = 1$ باشد، $\overline{H}$ را مکمل H می‌نامیم.

قضیه ۵.۳. فرض کنید $H = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{D})$ یک سوپر ابرگراف فازی روی X باشد. در این صورت

$$\overline{P_i}^* = P_i^* \quad \text{(الف)}$$

$$\overline{Q_{ij}}^* = Q_{ij}^* \quad \text{(ب) اگر و تنها اگر برای هر } xy \in Q_{ij}^*$$

$$\mu_{Q_{ij}}(xy) \leq M_{ij}(xy), \quad \frac{\nu_{Q_{ij}}(xy) - 1}{N_{ij}(xy)} < \delta < \frac{\nu_{Q_{ij}}(xy)}{N_{ij}(xy)}$$

$$\overline{R_i}^* = R_i^* \quad \text{(ج) اگر و تنها اگر برای هر } xy \in R_i^*$$

$$\mu_{R_i}(xy) \leq A_i(xy), \quad \frac{\nu_{R_i}(xy) - 1}{B_i(xy)} < \delta < \frac{\nu_{R_i}(xy)}{B_i(xy)}$$

اثبات. (الف) بنابر تعریف برقرار است.

(ب) بنابر تعریف داریم:

$$\overline{Q_{ij}}^* = \left\{ (xy) \in P_i^* \times P_j^* \mid \mu_{\overline{Q_{ij}}}(xy) > \circ, \nu_{\overline{Q_{ij}}}(xy) < 1 \right\}$$

فرض کنید $\overline{Q_{ij}^*} = Q_{ij}^*$. در این صورت بنابر تعریف برای هر $(xy) \in Q_{ij}^*$ ، روابط زیر برقرار است:

$$\mu_{\overline{Q_{ij}^*}}(xy) > 0, \quad 0 < \nu_{\overline{Q_{ij}^*}}(xy) < 1 \Rightarrow$$

$$M_{ij}(xy) - \mu_{Q_{ij}^*}(xy) > 0, \quad 0 < \nu_{Q_{ij}^*}(xy) - \delta N_{ij}(xy) < 1 \Rightarrow$$

$$\mu_{Q_{ij}^*}(xy) \leq M_{ij}(xy), \quad \frac{\nu_{Q_{ij}^*}(xy) - 1}{N_{ij}(xy)} < \delta \leq \frac{\nu_{Q_{ij}^*}(xy)}{N_{ij}(xy)},$$

برعکس، فرض کنید برای هر $(xy) \in Q_{ij}^*$ روابط $\mu_{Q_{ij}^*}(xy) < M_{ij}(xy)$ و $\frac{\nu_{Q_{ij}^*}(xy) - 1}{N_{ij}(xy)} < \delta < \frac{\nu_{Q_{ij}^*}(xy)}{N_{ij}(xy)}$ برقرار باشند. در این صورت نشان می‌دهیم $\overline{Q_{ij}^*} = Q_{ij}^*$.

فرض کنید $(xy) \in Q_{ij}^*$. در این صورت

$$(۱) \quad \mu_{Q_{ij}^*}(xy) \leq M_{ij}(xy) \Rightarrow \mu_{\overline{Q_{ij}^*}}(xy) > 0,$$

$$(۲) \quad \delta > \frac{\nu_{Q_{ij}^*}(xy) - 1}{N_{ij}(xy)} \Rightarrow \nu_{\overline{Q_{ij}^*}}(xy) < 1,$$

$$(۳) \quad \delta \leq \frac{\nu_{Q_{ij}^*}(xy)}{N_{ij}(xy)} \Rightarrow \nu_{\overline{Q_{ij}^*}}(xy) > 0.$$

$$Q_{ij}^* = \overline{Q_{ij}^*} \quad \text{بنابراین} \quad \overline{Q_{ij}^*} \subseteq Q_{ij}^* \quad \text{و مشابه} \quad Q_{ij}^* \subseteq \overline{Q_{ij}^*}$$

(ج) مشابه بند (ب) بررسی می‌شود.

□

فرض کنید H یک سوپر ابرگراف فازی فیثاغورسی و $\overline{H}$ یک δ -مکمل از H باشد. در این صورت بنابر قضیه ۵.۳ یک بازه $A = [a_1, a_2]$ وجود دارد که $A = \emptyset$ یا اگر $A \neq \emptyset$ ، آنگاه $\overline{R_i^*} = R_i^*$ و $\overline{Q_{ij}^*} = Q_{ij}^*$ می‌گوییم H و $\overline{H}$ هم‌پشتوانه هستند (و با $S(H) = S$ نشان می‌دهیم) اگر یک بازه $A = [a_1, a_2]$ برای هر δ وجود داشته باشد، به‌طوری‌که $\overline{Q_{ij}^*} = Q_{ij}^*$ و $\overline{R_i^*} = R_i^*$ باشد.

نتیجه ۶.۳. فرض کنید $H = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, D)$ یک سوپر ابرگراف فازی اکید روی X باشد. در این صورت $S(H) = S(\overline{H})$ اگر و تنها اگر $A = A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$ که در آن

$$A_1 = \bigcap_{(xy) \in Q_{ij}^*} \left(\frac{\nu_{Q_{ij}^*}(xy) - 1}{N_{ij}(xy)}, \frac{\nu_{Q_{ij}^*}(xy)}{N_{ij}(xy)} \right),$$

$$A_2 = \bigcap_{(xy) \in R_i^*} \left(\frac{\nu_{R_i^*}(xy) - 1}{B_i(xy)}, \frac{\nu_{R_i^*}(xy)}{B_i(xy)} \right).$$

گزاره ۷.۳. فرض کنید $H = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{D})$ یک سوپر ابرگراف فازی فیثاغورسی روی X باشد و $\delta \in \mathbb{R}, \delta \neq 0$ دلخواه باشد. در این صورت برای هر $(xy) \in R_i^*$ و هر $R_i \in \mathcal{D}$:

$$\mu_{\overline{R_i}}(xy) \leq A_i(xy) \quad \text{الف}$$

$$\mu_{\overline{Q_{ij}}}(xy) \leq M_{ij}(xy) \quad \text{ب}$$

اثبات. بنابر تعریف بدیهی است. $\square$

در مثال زیر نشان می‌دهیم که برای هر $\delta \in \mathbb{R}, \delta \neq 0$ لزوماً δ -مکمل $\overline{H}$ نمی‌تواند یک سوپر ابرگراف فازی فیثاغورسی باشد.

مثال ۸.۳. سوپر ابرگراف فازی فیثاغورسی H در شکل ۱ را در نظر بگیرید. آنگاه $\overline{H} = (\overline{\mathcal{V}}, \overline{\mathcal{E}}, \overline{\mathcal{D}})$ یک ۱-مکمل از H است که در آن $\mathcal{V} = \{P_1, P_2, P_3\}, \mathcal{E} = \{Q_{12}, Q_{13}, Q_{23}\}$ و $\mathcal{D} = \{R_1, R_2, R_3\}$ و

$$\overline{P_1} = \{(a, 0.3, 0.4), (b, 0.5, 0.5)\}, \quad \overline{P_2} = \{(c, 0.4, 0.7), (d, 0.6, 0.6)\},$$

$$\overline{P_3} = \{(e, 0.7, 0.6), (f, 0.8, 0.4)\}, \quad \overline{R_1} = \{(ab, 0.1, 0.1)\},$$

$$\overline{R_2} = \{(cd, 0.1, 0.1)\}, \quad \overline{R_3} = \{(ef, 0.2, 0.1)\},$$

$$\overline{Q_{12}} = \{(ac, 0.0739, 0.3457), (bd, 0.0109, 0.4059)\},$$

$$\overline{Q_{13}} = \{(ae, 0.0065, 0.26), (bf, 0.0041, 0.3059)\},$$

$$\overline{Q_{23}} = \{(cf, 0.0039, 0.3457), (de, 0.0009, 0.3391)\}.$$

و به سادگی می‌توان دید که $\overline{H}$ یک سوپر ابرگراف فازی فیثاغورسی نیست.

فرض کنید $H = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{D})$ یک سوپر ابرگراف فازی فیثاغورسی روی X باشد. در این صورت بازه $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}$ را یک بازه طلایی می‌گوییم اگر $\mathcal{G} = \emptyset$ یا اگر $\mathcal{G} \neq \emptyset$ ، آنگاه برای هر $\delta \in \mathcal{G}$ ، $\overline{H}$ به عنوان (δ) -مکمل H یک سوپر ابرگراف فازی فیثاغورسی باشد. در ادامه تلاش می‌کنیم تا برای هر H ، یک بازه طلایی ایجاد کنیم تا معلوم شود که δ -مکمل $\overline{H}$ سوپر ابرگراف فازی فیثاغورسی است یا δ یی معرفی شود که $\overline{H}$ به عنوان δ -مکمل یک سوپر ابرگراف فازی فیثاغورسی شود.

قضیه ۹.۳. فرض کنید $H = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{D})$ سوپر ابرگراف فازی فیثاغورسی روی X باشد. در این صورت یک بازه طلایی برای H وجود دارد.

اثبات. فرض کنید $1 \leq i \leq d$ و $(xy) \in R_i^*$ دلخواه باشند. در این صورت بنابر گزاره ۷.۳، با فرض $\nu_{R_i} := \nu_{R_i}(xy)$ و $\mu_{R_i} := \mu_{R_i}(xy)$ ، $B_i := B_i(xy)$ ، $A_i := A_i(xy)$ ، در گام اول باید دستگاه نامعادلات زیر برقرار باشد:

$$\left\{ \begin{array}{l} (۱) \quad 1 \geq \overline{\nu_{R_i}} \geq 0 \implies 1 \geq \nu_{R_i} - \delta B_i \geq 0 \implies \frac{\nu_{R_i} - 1}{B_i} \leq \delta \leq \frac{\nu_{R_i}}{B_i}, \\ (۲) \quad \overline{\nu_{R_i}} \geq B_i \implies \nu_{R_i} - \delta B_i \geq B_i \implies \delta \leq \frac{\nu_{R_i} - B_i}{B_i}, \\ (۳) \quad \mu_{R_i}^2 + \nu_{R_i}^2 \leq 1 \implies (A_i - \mu_{R_i})^2 + (\nu_{R_i} - \delta B_i)^2 \leq 1. \end{array} \right.$$

گام دوم: نامعادله (۳) را حل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} (\nu_{R_i} - \delta B_i)^2 &\leq 1 - (A_i - \mu_{R_i})^2 \implies \\ |\nu_{R_i} - \delta B_i| &\leq \sqrt{1 - (A_i - \mu_{R_i})^2} \implies \\ -\sqrt{1 - (A_i - \mu_{R_i})^2} &\leq \nu_{R_i} - \delta B_i \leq \sqrt{1 - (A_i - \mu_{R_i})^2} \implies \\ \nu_{R_i} - \sqrt{1 - (A_i - \mu_{R_i})^2} &\leq \delta B_i \leq \nu_{R_i} + \sqrt{1 - (A_i - \mu_{R_i})^2} \implies \\ \frac{\nu_{R_i} - \sqrt{1 - (A_i - \mu_{R_i})^2}}{B_i} &\leq \delta \leq \frac{\nu_{R_i} + \sqrt{1 - (A_i - \mu_{R_i})^2}}{B_i}. \end{aligned}$$

گام سوم: اکنون با توجه به روابط (۱) و (۲) و حل نامعادله (۳)، چون $\frac{\nu_{R_i}}{B_i} = \max\{\frac{\nu_{R_i}}{B_i}, \frac{\nu_{R_i} - B_i}{B_i}\}$ داریم:

$$\delta \in \left[\frac{\nu_{R_i} - \sqrt{1 - (A_i - \mu_{R_i})^2}}{B_i}, \min \left\{ \frac{\nu_{R_i}}{B_i} - 1, \frac{\nu_{R_i} + \sqrt{1 - (A_i - \mu_{R_i})^2}}{B_i} \right\} \right].$$

به صورت مشابه برای هر سوپر ابريال فازی فیثاغورسی دلخواه Q_{ij} و Q_{ij}^* با فرض

$$\begin{aligned} \mu_{Q_{ij}} &:= \mu_{Q_{ij}}(xy), & \nu_{Q_{ij}} &:= \nu_{Q_{ij}}(xy), \\ M_{ij} &:= M_{ij}(xy), & N_{ij} &:= N_{ij}(xy), \end{aligned}$$

بنابر گزاره ۷.۳، در گام چهارم باید دستگاه نامعادلات زیر برقرار باشد:

$$\begin{cases} (۴) & ۰ \leq \nu_{\bar{Q}_{ij}} \leq ۱ \Rightarrow \frac{\nu_{Q_{ij}-1}}{N_{ij}} \leq \delta \leq \frac{\nu_{Q_{ij}}}{N_{ij}}, \\ (۵) & \nu_{\bar{Q}_{ij}} \geq N_{ij} \Rightarrow \delta \leq \frac{\nu_{Q_{ij}-N_{ij}}}{N_{ij}}, \\ (۶) & \mu_{\bar{Q}_{ij}}^2 + \nu_{\bar{Q}_{ij}}^2 \leq ۱, \end{cases}$$

گام پنجم: با حل نامعادله (۶) داریم:

$$\mu_{\bar{Q}_{ij}}^2 + \nu_{\bar{Q}_{ij}}^2 \leq ۱ \Rightarrow (M_{ij} - \mu_{Q_{ij}})^2 + (\nu_{Q_{ij}} - \delta N_{ij})^2 \leq ۱ \Rightarrow$$

$$\frac{\nu_{Q_{ij}} - \sqrt{1 - (M_{ij} - \mu_{Q_{ij}})^2}}{N_{ij}} \leq \delta \leq \frac{\nu_{Q_{ij}} + \sqrt{1 - (M_{ij} - \mu_{Q_{ij}})^2}}{N_{ij}}$$

گام ششم: اکنون با توجه به روابط (۴) و (۵) و حل نامعادله (۶)، داریم:

$$\delta \in \left[\frac{\nu_{Q_{ij}} - \sqrt{1 - (M_{ij} - \mu_{Q_{ij}})^2}}{N_{ij}}, \min \left\{ \frac{\nu_{Q_{ij}}}{N_{ij}} - ۱, \frac{\nu_{Q_{ij}} + \sqrt{1 - (M_{ij} - \mu_{Q_{ij}})^2}}{N_{ij}} \right\} \right]$$

گام هفتم: اکنون برای به دست آوردن جواب مشترک، قرار می‌دهیم $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 \cap \mathcal{G}_2$ که در آن:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_1 &= \bigcap_{i=1}^d \bigcap_{(xy) \in R_i^*} \left[\frac{\nu_{R_i} - \sqrt{1 - (A_i - \mu_{R_i})^2}}{B_i}, \right. \\ &\quad \left. \min \left\{ \frac{\nu_{R_i}}{B_i} - ۱, \frac{\nu_{R_i} + \sqrt{1 - (A_i - \mu_{R_i})^2}}{B_i} \right\} \right] \\ &= \bigcap_{i=1}^d \bigcap_{(xy) \in R_i^*} \left[\frac{\nu_{R_i} - \sqrt{1 - (A_i - \mu_{R_i})^2}}{B_i}, \frac{\nu_{R_i}}{B_i} - ۱ \right] \\ \mathcal{G}_2 &= \bigcap_{1 \leq ij}^e \bigcap_{(xy) \in Q_{ij}^*} \left[\frac{\nu_{Q_{ij}} - \sqrt{1 - (M_{ij} - \mu_{Q_{ij}})^2}}{N_{ij}}, \right. \\ &\quad \left. \min \left\{ \frac{\nu_{Q_{ij}}}{N_{ij}} - ۱, \frac{\nu_{Q_{ij}} + \sqrt{1 - (M_{ij} - \mu_{Q_{ij}})^2}}{N_{ij}} \right\} \right] \\ &= \bigcap_{1 \leq ij}^e \bigcap_{(xy) \in Q_{ij}^*} \left[\frac{\nu_{Q_{ij}} - \sqrt{1 - (M_{ij} - \mu_{Q_{ij}})^2}}{N_{ij}}, \frac{\nu_{Q_{ij}}}{N_{ij}} - ۱ \right]. \end{aligned}$$

□

اکنون بنابر قضیه ۹.۳، الگوریتم زیر را برای محاسبه فاصله طلایی ارائه می‌دهیم.

الگوریتم ۱ محاسبه بازه طلایی

ورودی: سوپر ابرگراف فازی فیثاغورسی H

خروجی: بازه طلایی $\mathcal{G}$

۱: برای هر R_i و هر $(xy) \in R_i^*$ انجام بده

$$A_i = \min\{\mu_{P_i}(x), \mu_{P_i}(y)\}$$

$$B_i = \max\{\nu_{P_i}(x), \nu_{P_i}(y)\}$$

$$\mu_{R_i} = \mu_{R_i}(xy), \quad \nu_{R_i} = \nu_{R_i}(xy)$$

$$\mathcal{G}_1 = \bigcap_{i=1}^d \bigcap_{(xy) \in R_i^*} \left[\frac{\nu_{R_i} - \sqrt{1 - (A_i - \mu_{R_i})^2}}{B_i}, \frac{\nu_{R_i}}{B_i} - 1 \right]$$

۲: برای هر Q_{ij} و هر $(xy) \in Q_{ij}^*$ انجام بده

$$M_{ij} = \min \left\{ \frac{\mu_{P_i}(x)}{w(P_i)}, \frac{\mu_{P_j}(y)}{w(P_j)} \right\}$$

$$N_{ij} = \max \left\{ \frac{\nu_{P_i}(x)}{w(P_i)}, \frac{\nu_{P_j}(y)}{w(P_j)} \right\}$$

$$\mu_{Q_{ij}} = \mu_{Q_{ij}}(xy), \quad \nu_{Q_{ij}} = \nu_{Q_{ij}}(xy)$$

$$\mathcal{G}_2 = \bigcap_{1 \leq i < j}^e \bigcap_{(xy) \in Q_{ij}^*} \left[\frac{\nu_{Q_{ij}} - \sqrt{1 - (M_{ij} - \mu_{Q_{ij}})^2}}{N_{ij}}, \frac{\nu_{Q_{ij}}}{N_{ij}} - 1 \right].$$

۳: $\mathcal{G} \leftarrow \mathcal{G}_1 \cap \mathcal{G}_2$

مثال ۱۰.۳. سوپر ابرگراف فازی فیثاغورسی H در شکل ۱ را در نظر بگیرید. بنابر قضیه ۹.۳ و الگوریتم ۱، بازه طلایی به صورت زیر به دست می‌آید، که نشان می‌دهد δ -مکمل H یک سوپر ابرگراف فازی فیثاغورسی $\bar{H}$ وجود دارد.

$$\mathcal{G} = \left[\frac{0.78 - \sqrt{0.99}}{0.7}, 0.1429 \right] - \{0\} \approx [-0.2786, 0.1429] \setminus \{0\}.$$

و برای $\delta = \frac{1}{\lambda} \in \mathcal{G}$ چون

$$\overline{P_1} = \{(a, \cdot/3, \cdot/4), (b, \cdot/5, \cdot/5)\}, \quad \overline{P_2} = \{(c, \cdot/4, \cdot/7), (d, \cdot/6, \cdot/6)\}$$

$$\overline{P_3} = \{(e, \cdot/7, \cdot/6), (f, \cdot/8, \cdot/4)\},$$

$$\mu_{\overline{R_1}}(ab) = \min\{\mu_{P_1}(a), \mu_{P_2}(b)\} - \mu_{R_1}(ab) = \cdot/3 - \cdot/2 = \cdot/1$$

$$\nu_{\overline{R_1}}(ab) = \nu_{R_1}(ab) - \frac{1}{\lambda} \max\{\nu_{P_1}(a), \nu_{P_2}(b)\} = \cdot/6 - \frac{\cdot/5}{\lambda} = \cdot/5375$$

و به صورت مشابه، $\overline{Q_{13}}, \overline{Q_{12}}, \overline{R_3}, \overline{R_2}$ و $\overline{Q_{23}}$ محاسبه شود.

بنابراین $\bar{H} = (\{\overline{P_i}\}_{i=1}^3, \{\overline{R_i}\}_{i=1}^3, \{\overline{Q_{12}}, \overline{Q_{13}}, \overline{Q_{23}}\})$ یک سوپر ابرگراف فازی فیثاغورسی است که در آن

$$\overline{R_1} = \{(ab, \cdot/1, \cdot/5375)\}, \quad \overline{R_2} = \{(cd, \cdot/1, \cdot/7125)\},$$

$$\overline{R_3} = \{(ef, \cdot/2, \cdot/625)\},$$

$$\overline{Q_{12}} = \{(ac, \cdot/0.739, \cdot/6120), (bd, \cdot/0.109, \cdot/6632)\},$$

$$\overline{Q_{13}} = \{(ae, \cdot/0.065, \cdot/4706), (bf, \cdot/0.041, \cdot/5632)\},$$

$$\overline{Q_{23}} = \{(cf, \cdot/0.039, \cdot/6120), (de, \cdot/0.009, \cdot/5674)\}.$$

فرض کنید H یک سوپر ابرگراف فازی فیثاغورسی روی X باشد. برای هر $(xy) \in R_i^*$ و $(xy) \in Q_{ij}^*$ قرار می‌دهیم:

$$a = 2B_i, \quad b = B_i + \sqrt{1 + (A_i - \mu_{R_i})^2}$$

$$c = 2N_{ij}, \quad d = N_{ij} + \sqrt{1 - (M_{ij} - \mu_{Q_{ij}})^2}$$

و لذا قضیه زیر را نتیجه می‌گیریم.

قضیه ۱۱.۳. فرض کنید $H = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{D})$ یک سوپر ابرگراف فازی فیثاغورسی روی X و $\mathcal{G} \neq \emptyset$ باشد. در این صورت مکمل H یک سوپر ابرگراف فازی فیثاغورسی است اگر و تنها اگر برای هر Q_{ij}^* ، $(xy) \in Q_{ij}^*$ ، هر P_i^* و هر P_i^* ، $(xy) \in P_i^*$ ، $(xy) \in [c, d]$ و $\nu_{Q_{ij}}(xy) \in [a, b]$.

اثبات. فرض کنید $1 \leq i \leq d$ و $(xy) \in R_i^*$ دلخواه و هر سوپر ابريال فازی دلخواه Q_{ij} و Q_{ij}^* باشند. در این صورت بنابر قضیه ۹.۳، $\bar{H}$ به عنوان مکمل H ($\delta = 1$) یک سوپر ابرگراف فازی است اگر و تنها اگر در گام اول دستگاه زیر را حل کنیم:

$$\frac{\nu_{R_i} - \sqrt{1 - (A_i - \mu_{R_i})^2}}{B_i} \leq 1 \leq \frac{\nu_{R_i}}{B_i} - 1 \quad (1)$$

$$\frac{\nu_{Q_{ij}} - \sqrt{1 - (M_{ij} - \mu_{Q_{ij}})^2}}{N_{ij}} \leq 1 \leq \frac{\nu_{Q_{ij}}}{N_{ij}} - 1 \quad (2)$$

زیرا بنابر فرض $\emptyset \neq G$.

گام دوم: نامعادله (۱) را حل می‌کنیم:

$$\frac{\nu_{R_i} - \sqrt{1 - (A_i - \mu_{R_i})^2}}{B_i} \leq 1 \Rightarrow \nu_{R_i} \leq B_i + \sqrt{1 - (A_i - \mu_{R_i})^2},$$

$$\frac{\nu_{R_i}}{B_i} - 1 \geq 1 \Rightarrow \nu_{R_i} \geq 2B_i,$$

$$\frac{\nu_{R_i} - \sqrt{1 - (A_i - \mu_{R_i})^2}}{B_i} \leq \frac{\nu_{R_i}}{B_i} - 1 \Rightarrow B_i \leq \sqrt{1 - (A_i - \mu_{R_i})^2},$$

بنابراین، $\nu_{R_i} \leq B_i + \sqrt{1 - (A_i - \mu_{R_i})^2}$ و $2B_i \leq \nu_{R_i} \leq B_i + \sqrt{1 - (A_i - \mu_{R_i})^2}$.
گام سوم: نامعادله (۲) را حل می‌کنیم:

$$\frac{\nu_{Q_{ij}} - \sqrt{1 - (M_{ij} - \mu_{Q_{ij}})^2}}{N_{ij}} \leq 1 \Rightarrow \nu_{Q_{ij}} \leq N_{ij} + \sqrt{1 - (M_{ij} - \mu_{Q_{ij}})^2},$$

$$\frac{\nu_{Q_{ij}}}{N_{ij}} - 1 \geq 1 \Rightarrow \nu_{Q_{ij}} \geq 2N_{ij},$$

$$\frac{\nu_{Q_{ij}} - \sqrt{1 - (M_{ij} - \mu_{Q_{ij}})^2}}{N_{ij}} \leq \frac{\nu_{Q_{ij}}}{N_{ij}} - 1 \Rightarrow N_{ij} \leq \sqrt{1 - (M_{ij} - \mu_{Q_{ij}})^2},$$

بنابراین $\nu_{Q_{ij}} \leq N_{ij} + \sqrt{1 - (M_{ij} - \mu_{Q_{ij}})^2}$ و $2N_{ij} \leq \nu_{Q_{ij}} \leq N_{ij} + \sqrt{1 - (M_{ij} - \mu_{Q_{ij}})^2}$.

□

فرض کنید $H = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{D})$ یک سوپر ابرگراف فازی فیثاغورسی روی X باشد و $\bar{H} = (\bar{\mathcal{V}}, \bar{\mathcal{E}}, \bar{\mathcal{D}})$ یک (δ) -مکمل از آن باشد. در این صورت می‌گوییم H و $\bar{H}$ هارمونیک هستند (و با نماد $H \equiv \bar{H}$) اگر یک بازه $\mathcal{B} = [b_1, b_2]$ وجود داشته باشد که $B = \emptyset$ یا اگر $B \neq \emptyset$ ، آن‌گاه برای هر $\delta \in \mathcal{B}$ ، $\bar{H}$ یک سوپر ابرگراف فازی فیثاغورسی باشد و به علاوه، $\mathcal{S}(H) = \mathcal{S}(\bar{H})$.

نتیجه ۱۲.۳. فرض کنید $H = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{D})$ یک سوپر ابرگراف فازی فیثاغورسی دلخواه روی X باشد و $\mathcal{A} \neq \emptyset, \mathcal{G} \neq \emptyset$ در این صورت $H \equiv \overline{H}$.

اثبات. بنابر قضیه ۹.۳، چون $\mathcal{G} \neq \emptyset$ ، به عنوان δ -مکمل H یک سوپر ابرگراف فازی فیثاغورسی است. از طرفی بنابر نتیجه ۶.۳، حداقل یک بازه $\mathcal{A} = [a_1, a_2]$ وجود دارد که $\square \quad S(H) = S(\overline{H})$ فلذا $\mathcal{B} = \mathcal{G} \cap \mathcal{A}$ دهیم اکنون قرار می‌دهیم $\overline{R}_i^* = R_i^*$ و $\overline{Q}_{ij}^* = Q_{ij}^*$

۴. آنتروپی فازی روی سوپر ابرگراف فازی فیثاغورسی

در این بخش، به معرفی آنتروپی فازی سوپر راس‌ها، سوپر یال‌ها و پیوندهای فازی فیثاغورسی می‌پردازیم و الگوریتم‌هایی را برای بهینه‌سازی آنتروپی فازی سوپر ابرگراف فازی فیثاغورسی معرفی می‌کنیم.

تعریف ۱.۴. فرض کنید $H = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{D})$ یک سوپر ابرگراف فازی روی X باشد و $|\mathcal{V}| = v$ ، $|\mathcal{E}| = e$ و $|\mathcal{D}| = d$ باشد. در این صورت تعریف می‌کنیم:

الف) $E^*(\mathcal{V}) = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^v \sum_{j=1}^v \frac{|P_i^*|}{|P_i^*|} (1 - |\mu_{P_i}(x_j) - \nu_{P_i}(x_j)|)$ فازی سوپر راس فازی فیثاغورسی می‌نامیم.

ب) $E^*(\mathcal{E}) = \frac{1}{e} \sum_{i,j \geq 1}^e \sum_{k \neq l \geq 1}^e \frac{|Q_{i,j}^*|}{|Q_{i,j}^*|} (1 - |\mu_{Q_{i,j}}((x_k, y_l)) - \nu_{Q_{i,j}}((x_k, y_l))|)$ و آن را آنتروپی فازی سوپر یال فازی فیثاغورسی می‌نامیم.

ج) $E^*(\mathcal{D}) = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d \sum_{k \neq l \geq 1}^d \frac{|R_i^*|}{|R_i^*|} (1 - |\mu_{R_i}(x_k y_l) - \nu_{R_i}(x_k y_l)|)$ و آن را آنتروپی فازی پیوند فازی فیثاغورسی می‌نامیم.

مثال ۲.۴. سوپر ابرگراف‌های فازی فیثاغورسی H و $\overline{H}$ در مثال‌های ۳.۳ و ۱۰.۳ را در نظر بگیرید. آن‌گاه با محاسبات به کمک تعریف ۱.۴، می‌توان دید که

$$E^*(\mathcal{V}) \approx 0.185, \quad E^*(\mathcal{E}) \approx 0.59, \quad E^*(\mathcal{D}) \approx 0.633,$$

$$E^*(\overline{\mathcal{V}}) \approx 0.185, \quad E^*(\overline{\mathcal{E}}) \approx 0.4353, \quad E^*(\overline{\mathcal{D}}) \approx 0.5083.$$

از این‌جا به بعد تلاش می‌کنیم تا برای هر سوپر ابرگراف فازی فیثاغورسی H ، آنتروپی فازی سوپر یال فازی فیثاغورسی را در سوپر ابرگراف فازی فیثاغورسی δ -مکمل $\overline{H}$ بهینه‌سازی کنیم.

قضیه ۳.۴. فرض کنید $H = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, D)$ سوپر ابرگراف فازی فیثاغورسی روی X باشد و پیوند R_i دلخواه باشد. در این صورت

$$\text{الف) } E^*(\mathcal{V}) = E^*(\overline{\mathcal{V}})$$

ب) با فرض $S(H) = S(\overline{H})$ داریم $E^*(D) = E^*(\overline{D})$ اگر،

$$\mu_{R_i}(xy) = \frac{A_i + \delta B_i}{2} \quad \text{یا} \quad \nu_{R_i}(xy) = \frac{A_i + \delta B_i}{2}.$$

اثبات. الف) بنابر تعریف بدیهی است.

ب) فرض کنید H یک سوپر ابرگراف فازی فیثاغورسی روی X باشد و $\overline{H}$ ، δ - مکمل آن باشد. در این صورت چون $S(H) = S(\overline{H})$ ، برای هر پیوند R_i و هر $(xy) \in R_i^*$

$$\mu_{\overline{R_i}}(xy) = A_i - \mu_{R_i}(xy) = A_i - \mu_{R_i},$$

$$\nu_{\overline{R_i}}(xy) = \nu_{R_i}(xy) - \delta B_i = \nu_{R_i} - \delta B_i.$$

در گام اول برای هر i ، $|\mu_{\overline{R_i}} - \nu_{\overline{R_i}}| = 1 - |\mu_{R_i} - \nu_{R_i}|$ اگر و تنها اگر

$$|\mu_{R_i} - \nu_{R_i}| = |\mu_{\overline{R_i}} - \nu_{\overline{R_i}}| \quad \text{که معادل}$$

$$|\mu_{R_i} - \nu_{R_i}| = |(A_i - \mu_{R_i}) - (\nu_{R_i} - \delta B_i)| = |A_i + \delta B_i - (\mu_{R_i} + \nu_{R_i})|$$

است. بنابراین

$$|\mu_{R_i} - \nu_{R_i}| = |A_i + \delta B_i - (\mu_{R_i} + \nu_{R_i})| \iff \mu_{R_i} - \nu_{R_i} = \pm [A_i + \delta B_i - (\mu_{R_i} + \nu_{R_i})].$$

در گام بعدی حالت‌های زیر را برای معادله بالا در نظر می‌گیریم:

حالت (۱) $\mu_{R_i} - \nu_{R_i} = A_i + \delta B_i - \mu_{R_i} - \nu_{R_i}$ که نتیجه می‌دهد:

$$2\mu_{R_i} = A_i + \delta B_i \Rightarrow \mu_{R_i} = \frac{A_i + \delta B_i}{2}$$

حالت (۲) $\mu_{R_i} - \nu_{R_i} = -[A_i + \delta B_i - \mu_{R_i} - \nu_{R_i}]$ که نتیجه می‌دهد:

$$0 = -A_i - \delta B_i + 2\nu_{R_i} \Rightarrow \nu_{R_i} = \frac{A_i + \delta B_i}{2}$$

بنابراین $E^*(D) = E^*(\overline{D})$ ، اگر برای هر پیوند R_i و هر $(xy) \in R_i^*$

$$\mu_{R_i}(xy) = \frac{A_i + \delta B_i}{2} \quad \text{یا} \quad \nu_{R_i}(xy) = \frac{A_i + \delta B_i}{2}.$$

□

قضیه ۴.۴. فرض کنید $H = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{D})$ یک سوپر ابرگراف فازی فیثاغورسی روی X باشد و $S(H) = S(\bar{H})$. در این صورت $E^*(\mathcal{E}) = E^*(\bar{\mathcal{E}})$ اگر برای هر $(xy) \in Q_{ij}^*$

$$\mu_{Q_{ij}}(xy) = \frac{M_{ij} + \delta N_{ij}}{2} \quad \text{یا} \quad \nu_{Q_{ij}}(xy) = \frac{M_{ij} + \delta N_{ij}}{2}.$$

□

اثبات. مشابه قضیه ۳.۴ ثابت می‌شود.

در قضیه زیر می‌خواهیم نقش δ - مکمل $\bar{H}$ را برای کاهش آنتروپی فازی در سوپر ابريال‌های فازی فیثاغورسی بررسی کنیم.

قضیه ۵.۴. فرض کنید $H = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{D})$ یک سوپر ابرگراف فازی فیثاغورسی روی X باشد، $S(H) = S(\bar{H})$ و $G \neq \emptyset$. در این صورت بازه I_δ وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $\delta \in I_\delta$ رابطه $E^*(\bar{\mathcal{E}}) \leq E^*(\mathcal{E})$ برقرار است.

اثبات. بنابر تعریف:

$$\begin{aligned} E^*(\bar{\mathcal{E}}) \leq E^*(\mathcal{E}) &\Leftrightarrow \frac{1}{e} \sum_{i,j} \sum_{k \neq l} \frac{1}{|Q_{i,j}^*|} \left(1 - |\mu_{\bar{Q}_{i,j}}(x_k y_l) - \nu_{\bar{Q}_{i,j}}(x_k y_l)| \right) \\ &\leq \frac{1}{e} \sum_{i,j \geq 1}^e \sum_{k \neq l \geq 1} \frac{|Q_{i,j}^*|}{|Q_{i,j}^*|} \left(1 - |\mu_{Q_{i,j}}(x_k y_l) - \nu_{Q_{i,j}}(x_k y_l)| \right) \\ &\Leftrightarrow \sum_{i,j} \frac{1}{|Q_{i,j}^*|} \sum_{k \neq l} |\mu_{\bar{Q}_{i,j}}(x_k y_l) - \nu_{\bar{Q}_{i,j}}(x_k y_l)| \\ &\geq \sum_{i,j} \frac{1}{|Q_{i,j}^*|} \sum_{k \neq l} |\mu_{Q_{i,j}}(x_k y_l) - \nu_{Q_{i,j}}(x_k y_l)| \\ &\Leftrightarrow \sum_{i,j} \frac{1}{|Q_{i,j}^*|} \sum_{k \neq l} |M_{ij} - \mu_{Q_{i,j}} - \nu_{Q_{i,j}} + \delta N_{ij}| \\ &\geq \sum_{i,j} \frac{1}{|Q_{i,j}^*|} \sum_{k \neq l} |\mu_{Q_{i,j}} - \nu_{Q_{i,j}}|, \quad (1), \end{aligned}$$

که در آن

$$\begin{aligned} \mu_{\bar{Q}_{i,j}} &= M_{ij} - \mu_{Q_{i,j}}, \quad \nu_{\bar{Q}_{i,j}} = \nu_{Q_{i,j}} - \delta N_{ij}, \\ M_{ij} &= \min \left\{ \frac{\mu_{P_i}(x_k)}{w(P_i)}, \frac{\mu_{P_j}(y_l)}{w(P_j)} \right\}, \quad N_{ij} = \max \left\{ \frac{\nu_{P_i}(x_k)}{w(P_i)}, \frac{\nu_{P_j}(y_l)}{w(P_j)} \right\}. \end{aligned}$$

برای حل نامعادله (۱) با تعیین علامت قدرمطلقها، حالت‌های زیر را داریم:

الف) اگر $\delta \leq \frac{\mu_{Q_{i,j}} + \nu_{Q_{i,j}} - M_{ij}}{N_{ij}}$ ، آن‌گاه:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i,j} \frac{1}{|Q_{i,j}^*|} \sum_{k \neq l} |M_{ij} - \mu_{Q_{i,j}} - \nu_{Q_{i,j}} + \delta N_{ij}| \geq \sum_{i,j} \frac{1}{|Q_{i,j}^*|} \sum_{k \neq l} |\mu_{Q_{i,j}} - \nu_{Q_{i,j}}| \\
 \Leftrightarrow & \sum_{i,j} \frac{1}{|Q_{i,j}^*|} \sum_{k \neq l} (\mu_{Q_{i,j}} + \nu_{Q_{i,j}} - M_{ij} - \delta N_{ij}) \geq \sum_{i,j} \frac{1}{|Q_{i,j}^*|} \sum_{k \neq l} |\mu_{Q_{i,j}} - \nu_{Q_{i,j}}| \\
 \Leftrightarrow & -\delta \sum_{i,j} \frac{1}{|Q_{i,j}^*|} \sum_{k \neq l} N_{ij} \geq \sum_{i,j} \frac{1}{|Q_{i,j}^*|} \sum_{k \neq l} (|\mu_{Q_{i,j}} - \nu_{Q_{i,j}}| - \mu_{Q_{i,j}} - \nu_{Q_{i,j}} + M_{ij}) \\
 \Leftrightarrow & -\delta \sum_{i,j} \frac{1}{|Q_{i,j}^*|} \sum_{k \neq l} N_{ij} \geq \sum_{i,j} \frac{1}{|Q_{i,j}^*|} \sum_{k \neq l} (M_{ij} - \inf\{\mu_{Q_{i,j}}, \nu_{Q_{i,j}}\}) \\
 \Leftrightarrow & \delta \sum_{i,j} \frac{1}{|Q_{i,j}^*|} \sum_{k \neq l} N_{ij} \leq \sum_{i,j} \frac{1}{|Q_{i,j}^*|} \sum_{k \neq l} (\inf\{\mu_{Q_{i,j}}, \nu_{Q_{i,j}}\} - M_{ij}) \\
 \Leftrightarrow & \delta \leq \frac{\sum_{i,j} \frac{1}{|Q_{i,j}^*|} \sum_{k \neq l} (\inf\{\mu_{Q_{i,j}}, \nu_{Q_{i,j}}\} - M_{ij})}{\sum_{i,j} \frac{1}{|Q_{i,j}^*|} \sum_{k \neq l} N_{ij}} \\
 \Leftrightarrow & \delta \in \bigcap_{i,j} \bigcap_{(x_k y_l) \in Q_{i,j}^*} \left(-\infty, \frac{\mu_{Q_{i,j}} + \nu_{Q_{i,j}} - M_{ij}}{N_{ij}} \right] \\
 & \cap \left(-\infty, \frac{\sum_{i,j} \frac{1}{|Q_{i,j}^*|} \sum_{k \neq l} (\inf\{\mu_{Q_{i,j}}, \nu_{Q_{i,j}}\} - M_{ij})}{\sum_{i,j} \frac{1}{|Q_{i,j}^*|} \sum_{k \neq l} N_{ij}} \right] \quad (۲).
 \end{aligned}$$

ب) اگر $\delta \geq \frac{\mu_{Q_{i,j}} + \nu_{Q_{i,j}} - M_{ij}}{N_{ij}}$ ، آن‌گاه:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i,j} \frac{1}{|Q_{i,j}^*|} \sum_{k \neq l} |M_{ij} - \mu_{Q_{i,j}} - \nu_{Q_{i,j}} + \delta N_{ij}| \geq \sum_{i,j} \frac{1}{|Q_{i,j}^*|} \sum_{k \neq l} |\mu_{Q_{i,j}} - \nu_{Q_{i,j}}| \\
 \Leftrightarrow & \sum_{i,j} \frac{1}{|Q_{i,j}^*|} \sum_{k \neq l} (\delta N_{ij} - \mu_{Q_{i,j}} - \nu_{Q_{i,j}} + M_{ij}) \geq \sum_{i,j} \frac{1}{|Q_{i,j}^*|} \sum_{k \neq l} |\mu_{Q_{i,j}} - \nu_{Q_{i,j}}| \\
 \Leftrightarrow & \delta \sum_{i,j} \frac{1}{|Q_{i,j}^*|} \sum_{k \neq l} N_{ij} \geq \sum_{i,j} \frac{1}{|Q_{i,j}^*|} \sum_{k \neq l} (|\mu_{Q_{i,j}} - \nu_{Q_{i,j}}| + \mu_{Q_{i,j}} + \nu_{Q_{i,j}} - M_{ij}) \\
 \Leftrightarrow & \delta \sum_{i,j} \frac{1}{|Q_{i,j}^*|} \sum_{k \neq l} N_{ij} \geq \sum_{i,j} \frac{1}{|Q_{i,j}^*|} \sum_{k \neq l} (\sup\{\mu_{Q_{i,j}}, \nu_{Q_{i,j}}\} - M_{ij})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \delta \geq \frac{\sum_{i,j} \frac{1}{|Q_{i,j}^*|} \sum_{k \neq l} (\imath \max\{\mu_{Q_{i,j}}, \nu_{Q_{i,j}}\} - M_{ij})}{\sum_{i,j} \frac{1}{|Q_{i,j}^*|} \sum_{k \neq l} N_{ij}} \\
&\Leftrightarrow \delta \in \bigcap_{i,j} \bigcap_{(x_k y_l) \in Q_{i,j}^*} \left[\frac{\mu_{Q_{i,j}} + \nu_{Q_{i,j}} - M_{ij}}{N_{ij}}, \infty \right) \\
&\cap \left[\frac{\sum_{i,j} \frac{1}{|Q_{i,j}^*|} \sum_{k \neq l} (\imath \max\{\mu_{Q_{i,j}}, \nu_{Q_{i,j}}\} - M_{ij})}{\sum_{i,j} \frac{1}{|Q_{i,j}^*|} \sum_{k \neq l} N_{ij}}, \infty \right) \quad (۳).
\end{aligned}$$

بنابراین $I_\delta = I_1 \cup I_2$ ، که در آن

$$\begin{aligned}
I_1 &= \left(\bigcap_{i,j} \bigcap_{(x_k y_l) \in Q_{i,j}^*} \left(-\infty, \frac{\mu_{Q_{i,j}} + \nu_{Q_{i,j}} - M_{ij}}{N_{ij}} \right] \right. \\
&\quad \left. \cap \left(-\infty, \frac{\sum_{i,j} \frac{1}{|Q_{i,j}^*|} \sum_{k \neq l} (\imath \min\{\mu_{Q_{i,j}}, \nu_{Q_{i,j}}\} - M_{ij})}{\sum_{i,j} \frac{1}{|Q_{i,j}^*|} \sum_{k \neq l} N_{ij}} \right] \right), \\
I_2 &= \left(\bigcap_{i,j} \bigcap_{(x_k y_l) \in Q_{i,j}^*} \left[\frac{\mu_{Q_{i,j}} + \nu_{Q_{i,j}} - M_{ij}}{N_{ij}}, \infty \right) \right. \\
&\quad \left. \cap \left[\frac{\sum_{i,j} \frac{1}{|Q_{i,j}^*|} \sum_{k \neq l} (\imath \max\{\mu_{Q_{i,j}}, \nu_{Q_{i,j}}\} - M_{ij})}{\sum_{i,j} \frac{1}{|Q_{i,j}^*|} \sum_{k \neq l} N_{ij}}, \infty \right) \right).
\end{aligned}$$

□

مثال ۶.۴. فرض کنید H یک سوپر ابرگراف فازی فیثاغورسی روی $X = \{x_i\}_{i=1}^6$ باشد که

$$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\},$$

$$P_1 = \{(x_1, \cdot/7, \cdot/3), (x_2, \cdot/6, \cdot/4)\}, P_2 = \{(x_3, \cdot/8, \cdot/2), (x_4, \cdot/5, \cdot/5)\},$$

$$P_3 = \{(x_5, \cdot/6, \cdot/4), (x_6, \cdot/7, \cdot/3)\}, R_1 = \{(x_1 x_2, \cdot/2, \cdot/6)\},$$

$$R_2 = \{(x_3 x_4, \cdot/3, \cdot/7)\}, R_3 = \{(x_5 x_6, \cdot/4, \cdot/6)\},$$

$$Q_{12} = \{(x_1 x_3, \cdot/1, \cdot/8), (x_2 x_4, \cdot/2, \cdot/7)\},$$

$$Q_{13} = \{(x_1 x_5, \cdot/15, \cdot/75), (x_2 x_6, \cdot/25, \cdot/65)\},$$

$$Q_{23} = \{(x_3 x_5, \cdot/2, \cdot/7), (x_4 x_6, \cdot/2, \cdot/6)\}.$$

در این صورت بنابر قضیه ۵.۴، محاسبات به صورت جدول ۱ استخراج می گردد.

$\forall \max(\mu_Q, \nu_Q) - M_{ij}$	$\forall \min(\mu_Q, \nu_Q) - M_{ij}$	$\delta_{ij}^{(\cdot)} = \frac{\mu_Q + \nu_Q - M_{ij}}{N_{ij}}$	N_{ij}	M_{ij}	$(x_k y_l)$
۱/۲۵	-۰/۱۵	۳/۶۶۶	۰/۱۵	۰/۳۵	$x_1 x_3$
۱/۱۵	۰/۱۵	۲/۶	۰/۲۵	۰/۲۵	$x_2 x_4$
۱/۲۰	۰/۰۰	۳/۰	۰/۲۰	۰/۳۰	$x_1 x_5$
۱/۰۰	۰/۲۰	۳/۰	۰/۲۰	۰/۳۰	$x_2 x_6$
۱/۱۰	۰/۱۰	۳/۰	۰/۲۰	۰/۳۰	$x_3 x_5$
۰/۹۵	۰/۱۵	۲/۲	۰/۲۵	۰/۲۵	$x_4 x_6$
۶/۶۵	۰/۴۵	$\min = ۲/۲, \max = ۳/۶۶۶ \dots$	۱/۲۵	۱/۷۵	Sum

جدول ۱. محاسبه ضرایب قضیه ۵.۴

بنابر جدول ۱، داریم:

$$L = \frac{۶/۶۵}{۱/۲۵} = ۵/۳۲, \quad U = \frac{۰/۴۵}{۱/۲۵} = ۰/۳۶,$$

و در نتیجه $I_\delta = (-\infty, ۰/۳۶۰] \cup [۵/۳۲۰, +\infty)$.

از طرفی بنابر الگوریتم ۱، $\mathcal{G} = [-۰/۵۵۹۶, ۰/۴] \setminus \{۰\}$. بنابراین $\overline{H}$ یک سوپر ابرگراف فازی است و $I_\delta \cap \mathcal{G} = [-۰/۵۵۹۶, ۰/۳۶۰] \setminus \{۰\}$ بازه ای است که در آن $E^*(\overline{\mathcal{E}}) \leq E^*(\mathcal{E})$.

تعریف ۷.۴. فرض کنید $H = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{D})$ یک سوپر ابرگراف فازی فیثاغورسی روی X باشد و $\overline{H}$ یک δ -مکمل از H باشد. در این صورت $\epsilon \in \mathcal{G}$ را یک نقطه بهینه برای سوپریال فازی فیثاغورسی H می گوئیم اگر $E_\epsilon^*(\overline{\mathcal{E}}) = \min\{E_\delta^*(\overline{\mathcal{E}}) \mid \delta \in \mathbb{R}\}$ که در آن $E_\epsilon^*(\overline{\mathcal{E}})$ را آنتروپی فازی بهینه برای سوپریال فازی فیثاغورسی وابسته به δ می گوئیم.

قضیه ۸.۴. فرض کنید H یک سوپر ابرگراف فازی فیثاغورسی روی X باشد و $\overline{H}$ یک δ -مکمل از H باشد. در این صورت $\epsilon \in \mathbb{R}$ وجود دارد که $E_\epsilon^*(\overline{\mathcal{E}}) = \min\{E_\delta^*(\overline{\mathcal{E}}) \mid \delta \in \mathbb{R}\}$.

اثبات. بنابر قضیه ۵.۴، I_δ وجود دارد که برای هر $\delta \in I_\delta$ ، رابطه $E^*(\overline{\mathcal{E}}) \leq E^*(\mathcal{E})$ برقرار است. اکنون قرار می دهیم:

$$E_\delta^*(\overline{\mathcal{E}}) = \frac{1}{e} \sum_{i,j} \frac{1}{|Q_{i,j}^*|} \sum_{k \neq l} \left(1 - |M_{ij}(x_k y_l) - \mu_{Q_{i,j}}(x_k y_l) - \nu_{Q_{i,j}}(x_k y_l) + \delta N_{ij}(x_k y_l)| \right).$$

که در آن $C = \frac{1}{e} \sum_{i,j} \frac{1}{|Q_{i,j}^*|} \sum_{k \neq l} 1$ اکنون تعریف می‌کنیم:

$$f(\delta) = \sum_{i,j} \frac{1}{|Q_{i,j}^*|} \sum_{k \neq l} |M_{ij}(x_k y_l) - \mu_{Q_{i,j}}(x_k y_l) - \nu_{Q_{i,j}}(x_k y_l) + \delta N_{ij}(x_k y_l)|.$$

و بنابراین $E_\delta^*(\bar{\mathcal{E}}) = C - \frac{1}{e} f(\delta)$ به‌وضوح، تابع $f(\delta)$ محدب است. فلذا $E_\delta^*(\bar{\mathcal{E}})$ یک تابع محدب فلذا پیوسته است.

از طرفی بنابر قضیه ۵.۴، قرار می‌دهیم $\mathcal{G} = [L_1, R_1] \cup [L_2, R_2] \cup \dots \cup [L_m, R_m]$ قرار می‌دهیم C یک زیربازه دلخواه از I_δ است. فرض کنید $M = \{L_1, R_1, L_2, R_2, \dots, L_m, R_m\}$ و قرار می‌دهیم

$$\epsilon = \arg \min_{\delta \in \partial \mathcal{G}} \left\{ \frac{1}{e} \sum_{i,j} \frac{1}{|Q_{i,j}^*|} \sum_{k \neq l} (1 - |M_{ij}(x_k y_l) - \mu_{Q_{i,j}}(x_k y_l) - \nu_{Q_{i,j}}(x_k y_l) + \delta N_{ij}(x_k y_l)|) \right\}.$$

□

الگوریتم ۲ آنتروپی فازی بهینه برای مکمل سوپر ابرگراف فازی فیثاغورسی

ورودی: سوپر ابرگراف فازی فیثاغورسی $H = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{D})$

خروجی: پیدا کردن δ بهینه (δ_{opt}) برای محاسبه $E_{opt}^*(\bar{\mathcal{E}})$ در سوپر ابرگراف فازی فیثاغورسی مکمل

۱: بازه طلایی $\mathcal{G} = [L_1, R_1] \cup [L_2, R_2] \cup \dots \cup [L_m, R_m]$ محاسبه شود.

۲: قرار دهید $C = \{L_1, R_1, L_2, R_2, \dots, L_m, R_m\}$

۳: برای هر $\delta \in C$ محاسبه زیر را انجام دهید:

$$E_\delta^*(\bar{\mathcal{E}}) = \frac{1}{e} \sum_{i,j} \frac{1}{|Q_{i,j}^*|} \sum_{k \neq l} (1 - |M_{ij}(x_k y_l) - \mu_{Q_{i,j}}(x_k y_l) - \nu_{Q_{i,j}}(x_k y_l) + \delta N_{ij}(x_k y_l)|),$$

$$N_{ij} = \max \left\{ \frac{\nu_{P_i}(x_k)}{w(P_i)}, \frac{\nu_{P_j}(y_l)}{w(P_j)} \right\} \text{ و } M_{ij} = \min \left\{ \frac{\mu_{P_i}(x_k)}{w(P_i)}, \frac{\mu_{P_j}(y_l)}{w(P_j)} \right\}$$

۴: کمترین ϵ را انتخاب کن به نحوی که $E_\delta^*(\bar{\mathcal{E}})$

۵: ϵ و $E_{\min}^*(\bar{\mathcal{E}})$ را استخراج کن.

مثال ۹.۴. سوپر ابرگراف فازی H در شکل ۱ مثال ۳.۳ را در نظر بگیرید. بنابر الگوریتم ۲، جداول ۲ و ۳ استخراج می‌شوند تا مقادیر $\delta_{opt} = -۰/۲۷۸۶$ و $E_{opt}^*(\bar{E}) = ۰/۳۶۲۵$ به دست می‌آیند.

در این مثال، $e = ۳$ و $|Q_{ij}^*| = ۲$ و در الگوریتم ۲، $E_\delta(\bar{E}) = ۱ - \frac{f(\delta)}{۶}$ است.

$Q_{i,j}$	$(x_k y_l)$	$M_{ij}(x_k y_l)$	$N_{ij}(x_k y_l)$	$\mu_{Q_{i,j}}$	$\nu_{Q_{i,j}}$
$Q_{۱۲}$	(a, c)	۱۷۳۹۱.۰	۳۰۴۳۵.۰	۱.۰	۶۵.۰
$Q_{۱۲}$	(b, d)	۲۶۰۸۷.۰	۲۹۴۱۲.۰	۲۵.۰	۷.۰
$Q_{۱۳}$	(a, e)	۱۷۶۴۷.۰	۲۴۰۰۰.۰	۱۷.۰	۵.۰
$Q_{۱۳}$	(b, f)	۲۹۴۱۲.۰	۲۹۴۱۲.۰	۲۹.۰	۶.۰
$Q_{۲۳}$	(c, f)	۱۷۳۹۱.۰	۳۰۴۳۵.۰	۱۷.۰	۶۵.۰
$Q_{۲۳}$	(d, e)	۲۶۰۸۷.۰	۲۶۰۸۷.۰	۲۶.۰	۶.۰

جدول ۲. محاسبه مقادیر طلایی.

لذا $C = \{-۰/۲۷۸۵۵۳, ۰/۱۴۲۵۷۸\}$ و $\mathcal{G} = [-۰/۲۷۸۵۵۳, ۰) \cup (۰, ۰/۱۴۲۸۵۷]$

δ	$f(\delta) = \sum_{r=1}^6 M_r - \mu_r - \nu_r + \delta N_r $	$E_\delta^*(\bar{E}) = ۱ - \frac{f(\delta)}{۶}$
$-۰/۲۷۸۵۵۳$	۴/۰۷۲۷۹	۰/۳۲۱۲۰
$۰/۱۴۲۸۵۷$	۳/۳۵۷۲۹	۰/۴۴۰۴۵

جدول ۳. تعیین نقطه بهینه.

۵. کاربرد آنتروپی فازی بهینه در ابر شبکه‌های مختلط

در این بخش برای اهمیت سوپر ابرگراف‌های فازی فیثاغورسی تلاش می‌کنیم مسائل واقعی را به صورت سوپر ابرگراف‌های فازی فیثاغورسی مدل‌سازی کنیم. از طرفی، برای بهینه‌سازی این مسائل در مدل‌سازی انجام شده از ابزارهای مکمل‌سازی آنتروپی فازی بهینه استفاده می‌کنیم. برای نمونه می‌توانیم به ابر شبکه‌های مختلط زنجیر غذایی، حمل و نقل مسائل اقتصادی، اجتماعی، پزشکی و مهندسی اشاره کنیم.

مثال ۱.۵. (مسئله اجتماعی) خیریه باران مهر علوی دارای سه شعبه در شهرهای کاشان (K)، تهران (T) و یزد (Y) است که هر شهر دارای دو دفتر است و زوج فازی فیثاغورسی (μ_P, ν_P) نشان‌دهنده درجه بودجه دفتر و درجه حمایت مالی از آسیب‌دیدگان را دارد. به‌علاوه، R_i ها نشان‌دهنده کمک بودجه‌ای و میزان هم‌پوشانی نیازمندان بین هر دو دفتر در هر شهر است و Q_{ij} ها نشان‌دهنده ارتباط بین دفاتر هر شهر با شهر دیگر از نظر کمک کردن در بودجه و حمایت مالی از نیازمندان دو شهر مختلف است. این ابر شبکه به‌صورت زیر مدل‌سازی شده است:

$$\begin{aligned} P_1 &= \{(k_1, 0.85, 0.25), (k_2, 0.8, 0.3)\}, \\ P_2 &= \{(t_1, 0.65, 0.45), (t_2, 0.6, 0.5)\}, \\ P_3 &= \{(y_1, 0.45, 0.65), (y_2, 0.55, 0.55)\}. \\ R_1 &= \{(k_1 k_2, 0.75, 0.3)\}, \\ R_2 &= \{(t_1 t_2, 0.55, 0.55)\}, \\ R_3 &= \{(y_1 y_2, 0.4, 0.7)\}. \\ Q_{12} &= \{(k_1 t_1, 0.2, 0.4), (k_2 t_2, 0.2, 0.5)\}, \\ Q_{13} &= \{(k_1 y_1, 0.2, 0.55), (k_2 y_2, 0.2, 0.7)\}, \\ Q_{23} &= \{(t_1 y_1, 0.2, 0.5), (t_2 y_2, 0.2, 0.5)\}. \end{aligned}$$

با توجه به جدول ۴ دیده می‌شود که $E^*(\mathcal{E}) = 0.675$ و عدد آنتروپی فازی فیثاغورسی بین شهرها بالا است. مدیر خیریه تصمیم می‌گیرد با مکمل‌سازی (تقویت بودجه یا ایجاد فضای تعامل بیشتر) این آنتروپی را کاهش دهد.

سوپر ابريال Q_{ij}	مولفه‌های (xy) با (μ, ν) و $1 - \mu - \nu $	آنتروپی یالی
Q_{12}	$(k_1 t_1) : (0.2, 0.4) \rightarrow 0.7 \quad (k_2 t_2) : (0.2, 0.5) \rightarrow 0.8$	$\frac{0.8 + 0.7}{2} = 0.75$
Q_{13}	$(k_1 y_1) : (0.2, 0.55) \rightarrow 0.65 \quad (k_2 y_2) : (0.2, 0.7) \rightarrow 0.5$	$\frac{0.65 + 0.5}{2} = 0.575$
Q_{23}	$(t_1 y_1) : (0.2, 0.5) \rightarrow 0.7 \quad (t_2 y_2) : (0.2, 0.5) \rightarrow 0.7$	$\frac{0.7 + 0.7}{2} = 0.7$

جدول ۴. جدول آنتروپی.

با کمک الگوریتم ۱ (محاسبه بازه طلایی)، $G = [-۰/۴۵۹۶, ۰)$ و به کمک الگوریتم ۲، $\epsilon = -۰/۴۵۹۶$ به دست می‌آید. اکنون δ -مکمل $\bar{H}$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\overline{R_1} = \{(k_1 k_2, ۰/۰۵, ۰/۴۳۸)\},$$

$$\overline{R_2} = \{(t_1 t_2, ۰/۰۵, ۰/۷۸۰)\},$$

$$\overline{R_3} = \{(y_1 y_2, ۰/۰۵, ۰/۹۹۹)\},$$

$$\overline{Q_{12}} = \{(k_1 t_1, ۰/۰۹۵۴۵, ۰/۴۹۴۰), (k_2 t_2, ۰/۰۷۲۷۳, ۰/۶۰۴۵)\},$$

$$\overline{Q_{13}} = \{(k_1 y_1, ۰/۰۰۴۵۵, ۰/۶۸۵۸), (k_2 y_2, ۰/۰۵, ۰/۸۱۴۹)\},$$

$$\overline{Q_{23}} = \{(t_1 y_1, ۰/۰۰۴۵۵, ۰/۶۳۵۸), (t_2 y_2, ۰/۰۵, ۰/۶۱۴۹)\}.$$

اکنون عدد آنتروپی فازی فیثاغورسی بین شهرها را در جدول ۵ محاسبه می‌کنیم. و عدد آنتروپی کل به صورت $E^*(\bar{\mathcal{E}}) = ۰/۴۰۴۵۷$ است. مشاهده می‌شود که در مدل جدید، عدد آنتروپی هم بین شهرها و هم در کل کاهش پیدا کرد و شفافیت تعامل بین دو شهر کاشان و تهران بیشتر از بقیه شهرها است و مدیر خیریه می‌تواند روی ارتباطات این دو شهر حساب ویژه‌ای داشته باشد.

سوپر ابريال	مولفه‌های (xy)	$1 - \mu_{\bar{Q}} - \nu_{\bar{Q}} $	آنتروپی یالی
$\overline{Q_{12}}$	$(k_2 t_2), (k_1 t_1)$	$۰/۴۶۸۲۳۰/۶۰۱۴۵$	$\frac{۰/۶۰۱۴۵ + ۰/۴۶۸۲۳}{۲} = ۰/۵۳۴۸۴$
$\overline{Q_{13}}$	$(k_2 y_2), (k_1 y_1)$	$۰/۲۳۵۱۰۰/۳۱۸۷۵$	$\frac{۰/۳۱۸۷۵ + ۰/۲۳۵۱۰}{۲} = ۰/۲۷۶۹۳$
$\overline{Q_{23}}$	$(t_2 y_2), (t_1 y_1)$	$۰/۴۳۵۱۰۰/۳۶۸۷۵$	$\frac{۰/۳۶۸۷۵ + ۰/۴۳۵۱۰}{۲} = ۰/۴۰۱۹۳$

جدول ۵. محاسبه $E^*(\bar{\mathcal{E}})$.

۶. نتیجه‌گیری

در این مطالعه، از مفهوم سوپر ابرگراف‌های فازی فیثاغورسی به عنوان ابزاری کارآمد برای مدل‌سازی سیستم‌های پیچیده و مختلط دارای عدم قطعیت استفاده می‌شود. با ترکیب نظریه مجموعه‌های فازی فیثاغورسی و ساختار سوپر ابرگراف‌ها، این امکان فراهم گردید که ابرشبکه‌هایی تحلیل شوند که در آن‌ها روابط بین ابررأس‌ها و ابريال‌ها با درجات همزمان عضویت و عدم عضویت مشخص می‌شوند.

در این پژوهش، ابتدا رده‌های مهمی از سوپر ابرگراف‌های فازی فیثاغورسی شامل انواع نرم، خشن و هموار بر اساس توابع وزن معرفی و طبقه‌بندی شدند. سپس وجود بازه طلایی برای بررسی مکمل‌سازی این سوپر ابرگراف‌ها اثبات گردید و الگوریتمی برای محاسبه آن ارائه شد. در واقع بازه طلایی بررسی می‌کند که سوپر ابرگرافهای فازی فیثاغورسی مکمل پذیر هستند یا خیر و اگر مکمل پذیر باشند مقادیری که موجب مکمل‌سازی می‌شود را معرفی می‌کند. در ادامه، معیارهای آنتروپی فازی به طور خاص برای سوپر ابررأس‌ها، سوپر ابرپال‌ها و پیوندها در سطوح سلسله‌مراتبی مختلف تعریف گردیدند. همچنین شرایط لازم برای برابری آنتروپی سوپر ابرگراف اصلی و مکمل آن بررسی شد و نشان داده شد که با استفاده از مکمل‌سازی بهینه می‌توان آنتروپی یا همان عدم قطعیت را در سوپر ابرپال‌ها کاهش داد. در گام نهایی، الگوریتمی برای یافتن مقدار بهینه پارامتر مکمل به منظور کاهش و بهینه‌سازی آنتروپی فازی سوپر ابرپال‌ها طراحی و پیاده‌سازی شد. کاربرد روش پیشنهادی در یک مسئله اجتماعی واقعی نشان داد که استفاده از مکمل بهینه می‌تواند هماهنگی بین اجزای سیستم را بهبود بخشد و عدم قطعیت را کاهش دهد.

روش پیشنهادی در مسائل واقعی از جمله تحلیل ابرشبکه‌های زنجیره تأمین، حمل و نقل، مسائل اجتماعی و سیستم‌های تصمیم‌گیری چندمعیاره با داده‌های فازی فیثاغورسی کاربرد دارد. با وجود کارایی روش، چالش‌هایی نظیر پیچیدگی محاسباتی الگوریتم‌ها برای ابرشبکه‌های بسیار بزرگ، حساسیت نتایج به انتخاب پارامتر و نیاز به اعتبارسنجی تجربی گسترده با داده‌های دنیای واقعی وجود دارد. برای پژوهش آینده، تعمیم چارچوب به انواع دیگر مجموعه‌های فازی، طراحی الگوریتم‌های کارآمدتر برای کاربردهای مقیاس بزرگ و اعتبارسنجی تجربی روش بر روی داده‌های واقعی از شبکه‌های اجتماعی و بیولوژیکی پیشنهاد می‌گردد.

مراجع

- [1] M. Akram, F. Wasim, J. C. R. Alcantud, A. N. Al-Kenani, Multi-criteria Optimization Technique with Complex Pythagorean Fuzzy N-soft Information. *Int J Comput Intell Syst*, 14(167) (2021), 1-24. <https://doi.org/10.1007/s44196-021-00008-x>
- [2] A. DeLuca, and S. Termini, A definition of a non-probabilistic entropy in the setting of fuzzy sets, *Inform. Control*, 20(4) (1972), 301-312.
- [3] M. Hamidi, F. Smarandache, and E. Davneshvar, Spectrum of Superhypergraphs via Flows, *J. Math.*, 2022 (2022), 12 pages.

- [4] M. Hamidi, F. Smarandache and M.h Taghinezhad, Decision Making Based on Valued Fuzzy Superhypergraphs, *Computer Modeling in Engineering & Sciences*, 138(2) (2024), 1907-1923. <https://doi.org/10.32604/cmcs.2023.030284>.
- [5] B. Kosko, Fuzzy entropy and conditioning, *Information Sciences*, 40(2) (1986), Pages 165-174.
- [6] B. Kosko. Fuzziness vs. probability. *International Journal of General Systems*, 17(2-3) (1990), 211–240.
- [7] S. Naz, S. Ashraf, M. Akram, A novel approach to decision-making with Pythagorean fuzzy information. *Mathematics*, 6 2018, 1-28.
- [8] F. Smarandache, Introduction to the n -SuperHyperGraph-the most general form of graph today, *Neutrosophic Sets Syst.*, 48 (2022), 483-485.
- [9] M. Shen Yang and Z. Hussain, Fuzzy Entropy for Pythagorean Fuzzy Sets with Application to Multicriterion Decision Making, *Complexity* Volume 2018, Article ID 2832839, 14 pages <https://doi.org/10.1155/2018/2832839>.
- [10] R. Verma, J. M. Merigó, M. Sahni, Pythagorean fuzzy graphs: Some results, *arXiv preprint arXiv:1806.06721*, 2018, pp. 1–56.
- [11] R. R. Yager, Pythagorean fuzzy subsets, In: 2013 Joint IFSA World Congress and NAFIPS Annual Meeting (IFSA/NAFIPS), (2013), 36286152.
- [12] L. Zhang, S. Sun, R. Wang, C. Suo, Graph-based multi-attribute decision-making method with new fuzzy information measures. *Complex Intell. Syst.* 11(293) (2025), 1-21. <https://doi.org/10.1007/s40747-025-01879-9>.